

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Tahun pertama perkuliahan merupakan masa transisi dari siswa sekolah menengah menjadi mahasiswa di perguruan tinggi namun tidak semua mahasiswa berada dalam kondisi siap pada level ini (Guzman dkk, 1998). Pada masa transisi, mahasiswa dihadapkan pada banyak perubahan kontrak didaktik (Brousseau, 1997). Mahasiswa juga dihadapkan pada perubahan cara berpikir matematis yang sulit, yakni dari suatu konsep yang diperoleh secara intuitif berdasarkan pada pengalaman menuju konsep yang ditentukan oleh definisi formal dan sifat-sifat konsep yang direkonstruksi melalui deduksi logis (Tall, 1992). Selain itu, mahasiswa juga mengalami perubahan dari pendekatan pemecahan masalah yang lebih menekankan pada komputasi ke pendekatan yang lebih banyak berbasis pada pembuktian matematis (Selden, 2012).

Berbagai argumentasi tentang peran pembuktian dalam pembelajaran matematika telah dikemukakan oleh para ahli. Hanna (1995) menegaskan bahwa pembuktian dalam praktik matematika memiliki peran utama sebagai verifikasi dan pembenaran, tetapi dalam pendidikan matematika pembuktian lebih banyak berfungsi sebagai penjelas terhadap nilai kebenaran suatu pernyataan. Knuth (2002) menyatakan bahwa pembuktian berperan sebagai verifikasi terhadap suatu dugaan yang memungkinkan mengarah pada sebuah penemuan. Selain itu, pembuktian juga berperan sebagai dasar pemahaman matematika yang penting untuk mengembangkan, membangun, dan berkomunikasi dalam matematika (Ball & Bass, 2003; Carpenter, Franke, & Levi, 2003). Oleh karena itu, pembuktian dianggap sebagai aktivitas esensial dalam pembelajaran matematika (Almeida, 2000).

Aktivitas pembuktian bukan kali pertama dikenal mahasiswa saat memasuki universitas. Mahasiswa telah dibekali kemampuan menyusun bukti matematis secara sederhana/informal saat berada di jenjang sekolah dasar dan menengah (Depdiknas, 2003; Kemdiknas, 2006, Kemdikbud, 2013; Kemdikbud, 2016).

Meskipun demikian, gagasan tentang pembuktian hampir selalu dihubungkan dengan pembelajaran matematika di perguruan tinggi (Stylianides dan Stylianides, 2008). Di perguruan tinggi/universitas, kemampuan menyusun bukti matematis secara formal menjadi domain penting pembelajaran matematika (Alcock & Weber, 2010). Pembuktian matematis secara formal dilakukan dengan melibatkan penggunaan definisi formal atau teorema yang telah ditetapkan sebelumnya (Selden, 2012). Pembuktian matematis secara formal juga mengacu pada bentuk logika yang akurat atau mengacu pada bentuk bukti yang digunakan oleh matematikawan untuk berkomunikasi dalam kegiatan seminar atau artikel ilmiah (Reid, 2001).

Proses pembuktian matematis yang dilakukan matematikawan sangat berbeda dengan logika yang ada di buku teks dan yang diajarkan di kelas. Pembuktian yang dilakukan matematikawan meliputi proses intuisi, *trial* dan *error*, spekulasi, dugaan, dan kemudian pembuktian, namun pembuktian yang diajarkan kepada mahasiswa lebih difokuskan pada mengenalkan teorema, membuktikan, dan kemudian memberikan contoh terkait teorema (Almeida, 2003). Selain itu, bukti dari suatu lemma, teorema, dan corollary yang disajikan dalam buku teks dikembangkan secara deduktif dari premis menuju konklusi seringkali tidak mudah untuk dapat dipahami secara komprehensif oleh mahasiswa pemula dalam belajar membuktikan (Kusnandi, 2012). Akibatnya, mahasiswa mengalami kesulitan dalam mempelajari pembuktian formal.

Beberapa hasil penelitian menunjukkan mahasiswa di perguruan tinggi mengalami kesulitan serius untuk mempelajari dan menyusun pembuktian matematis. Hasil penelitian Moore (1994) menunjukkan terdapat tujuh kesulitan yang dialami oleh mahasiswa saat mengkonstruksi bukti matematis, yaitu (1) tidak tahu definisi, (2) tidak tahu cara menggunakan definisi, (3) memiliki sedikit pemahaman intuitif mengenai konsep, (4) bayangan konsep tidak memadai untuk melakukan pembuktian, (5) tidak dapat menggeneralisasi contoh, (6) kesulitan dalam menggunakan bahasa dan notasi matematika, dan (7) tidak tahu cara memulai pembuktian. Kesulitan-kesulitan yang dikemukakan Moore berkaitan

dengan pemahaman konsep dan bukan pada logika deduktif dalam konstruksi pembuktian.

Weber (2001) mengklasifikasikan kesulitan mahasiswa menyusun bukti matematis kedalam dua aspek, yakni (1) mahasiswa tidak memiliki konsep yang akurat mengenai pembuktian matematika, dan (2) kurangnya pemahaman mahasiswa terhadap teorema atau konsep. Sejalan dengan temuan Weber, Knap (2005) juga mengklasifikasikan kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematis pada dua aspek, yaitu (1) kesulitan menggunakan logika dan bahasa dalam pembuktian, dan (2) kurangnya pengetahuan yang spesifik mengenai definisi, teorema, strategi heuristik, dan kemampuan menggeneralisasi contoh. Kedua klasifikasi menunjukkan bahwa paling tidak terdapat dua aspek yang harus dikuasai mahasiswa untuk mengatasi kesulitan saat mengkonstruksi pembuktian matematis, yakni (1) pemahaman terkait struktur dan konsep pembuktian, serta (2) pemahaman terkait fakta, konsep, definisi, dan teorema dalam matematika.

Secara umum, mahasiswa menyadari bahwa pembuktian matematis seharusnya dilakukan secara formal namun yang terjadi sebaliknya, yakni dilakukan secara informal (Almeida, 2000). Mahasiswa meyakini bahwa pembuktian teorema dinyatakan valid jika dan hanya jika mengikuti format tradisional seperti pembuktian dua kolom yang diajarkan pada pembuktian geometri atau melalui sebuah atau beberapa contoh spesifik (Harel & Shower, 1998). Padahal, penggunaan contoh spesifik hanya untuk membantu proses konstruksi bukti dan bukan sebagai bukti yang valid (Alcock & Weber, 2010). Hal ini terlihat juga pada studi pendahuluan yang dilakukan terhadap empat puluh lima mahasiswa yang dipilih secara acak untuk menyelesaikan masalah pembuktian yang berkaitan dengan materi keterbagian, yakni “Buktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa $n^3 - n$ habis dibagi 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ ”.

Hasil studi pendahuluan menunjukkan tidak ditemukannya penggunaan prosedur induksi matematika dalam konstruksi pembuktian yang dihasilkan. Sebanyak 76% mahasiswa memilih menyelesaikan masalah pembuktian melalui penggunaan contoh khusus sedangkan 24% mahasiswa menggunakan prosedur pembuktian lain yang tidak mendukung penyelesaian masalah. Melalui wawancara

diketahui bahwa sebagian besar mahasiswa menyatakan lupa prosedur pembuktian dengan menggunakan induksi matematika. Selain itu, diketahui juga terdapat mahasiswa yang mengetahui prosedur pembuktian dengan menggunakan induksi matematika namun tidak dapat mengaplikasikannya dalam penyelesaian masalah. Oleh karenanya, mahasiswa cenderung memilih sebarang dua atau tiga bilangan bulat positif yang lebih mudah digunakan untuk menunjukkan pernyataan $n^3 - n$ habis dibagi 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ bernilai benar.

Hasil studi pendahuluan juga menunjukkan bahwa mahasiswa tidak memiliki pemahaman yang baik terkait fakta habis dibagi. Hanya terdapat 2% mahasiswa yang mampu menuliskan notasi habis dibagi secara tepat, sebanyak 29% mahasiswa salah dalam menuliskan notasi habis dibagi, dan sebanyak 69% tidak menuliskan notasi hasil dibagi dalam penyelesaian masalah pembuktian yang diberikan. Gambar 1.1 menunjukkan penyelesaian masalah pembuktian yang dilakukan oleh mahasiswa tanpa menggunakan notasi hasil bagi yang tepat dan prosedur pembuktian sebagaimana petunjuk soal.

$n^3 - n$ habis dibagi 3 $\forall n \in \mathbb{N}$
 Misalkan $n = 3$ maka $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$
 24 bisa dibagi 3 = 8
 Misalkan $n = 2$
 $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$
 6 habis dibagi 3

Gambar 1.1 Penyelesaian Soal Pembuktian oleh Mahasiswa

Materi habis dibagi adalah salah satu topik yang dipelajari oleh mahasiswa tahun pertama yang menempuh mata kuliah teori bilangan. Pembelajaran teori bilangan merupakan wadah yang ideal bagi mahasiswa yang baru mulai belajar tentang pemecahan masalah, penalaran, generalisasi, abstraksi dan pembuktian (Selden & Selden, 2002). Pada perkuliahan teori bilangan, mahasiswa diperkenalkan pembuktian formal dengan memanfaatkan definisi dan teorema. Selain itu, mahasiswa juga diperkenalkan beberapa metode pembuktian, seperti implikasi, biimplikasi, kontradiksi, dan induksi matematika. Lebih lanjut, Selden & Selden (2002) menyatakan pembuktian dalam teori bilangan memiliki versi

umum yang topik bahasannya lebih banyak melibatkan bilangan bulat positif. Mahasiswa tahun pertama telah familiar dengan bilangan bulat positif dan operasi-operasi yang berlaku pada bilangan bulat positif. Hal ini tentu akan mengurangi tingkat abstraksi baru dan disequilibrasi yang terjadi secara bersamaan pada struktur kognitif mahasiswa tahun pertama.

Mahasiswa tahun pertama seringkali mengalami kesulitan kognitif yang berkaitan dengan kemampuan mengorganisasi atau mereorganisasi pengetahuan yang telah dimiliki (Guzman dkk, 1998). Di sisi lain, setiap individu memiliki cara yang berbeda dalam menerima, memperoleh, mengorganisasi, dan memproses informasi sebagai upaya menyelesaikan masalah (Rozenchwajg, 2005). Oleh karena itu, dosen harus menyadari bahwa setiap mahasiswa memiliki karakteristik yang berbeda-beda. Perbedaan karakteristik seseorang untuk menanggapi suatu tugas kognitif merujuk pada gaya kognitif (Kozhevnikov, 2007). Pemahaman tentang gaya kognitif merupakan hal yang penting karena gaya kognitif berperan sebagai penghubung antara domain kepribadian dan kemampuan kognitif (Messick, 1994). Di bidang pendidikan, gaya kognitif berperan sebagai prediktor terkait prestasi akademik diluar kemampuan umum (Stenberg & Zang, 2001). Peneliti di berbagai bidang terapan menemukan bahwa gaya kognitif dapat menjadi prediktor kesuksesan seseorang yang lebih baik dibandingkan faktor kecerdasan (Kozhevnikov, 2007).

Salah satu dimensi gaya kognitif yang banyak mendapat perhatian dari para peneliti adalah gaya kognitif reflektif dan impulsif atau dikenal sebagai konseptual tempo (Kagan, 1966; Stenberg & Grigorenko, 1997; Keller & Ripoll, 2001; Kozhevnikov, 2007). Gaya kognitif reflektif dan impulsif didefinisikan sebagai sebuah sifat dari sistem kognitif yang merupakan kombinasi dari lama waktu pengambilan keputusan dan hasil kinerja pada situasi penyelesaian masalah (Rozenchwajg, 2005). Gaya kognitif reflektif dan impulsif didasarkan pada banyaknya waktu yang digunakan seseorang dalam merespon suatu situasi dan keakuratan jawaban dari respon yang diberikan (Kozhevnikov, 2007). Individu bergaya kognitif reflektif mempertimbangkan semua pilihan yang tersedia dan mempunyai konsentrasi yang tinggi saat belajar namun terjadi sebaliknya pada

individu bergaya kognitif impulsif (Reynolds & Janzen, 2004). Hal ini mengindikasikan bahwa mahasiswa bergaya kognitif reflektif memerlukan lebih banyak waktu dalam memeriksa masalah, mempertimbangkan solusi alternatif, dan memeriksa akurasi dan kelengkapan setiap hipotesis. Sebaliknya, mahasiswa bergaya kognitif impulsif memiliki kecenderungan untuk membuat keputusan yang cepat dan merespon dengan hal yang terlintas dalam pikiran bukan dengan pemeriksaan kritis.

Gray, dkk (1997) menegaskan bahwa setiap mahasiswa memiliki pendekatan penyelesaian tugas matematika melalui cara yang berbeda, bergantung pada gaya kognitif yang dimiliki. Hal ini berarti gaya kognitif, termasuk gaya kognitif reflektif dan impulsif, berperan juga dalam menentukan pendekatan yang dipilih oleh mahasiswa dalam menyelesaikan masalah matematika seperti masalah pembuktian. Beberapa peneliti telah memfokuskan penelitian pada pembuktian matematis, terutama penelitian tentang konstruksi bukti matematis. Gibson (1998) menggambarkan konstruksi bukti menggunakan bantuan diagram untuk memahami informasi, menemukan ide, memvalidasi dan mengurangi ketegangan kognitif selama proses pembuktian. Pinto dan Weber (dalam Abdussakir, 2004b) menggambarkan jalur berpikir yang digunakan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti. Abdussakir (2014a, 2014b) menggambarkan proses berpikir yang digunakan oleh mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti dengan menggunakan strategi semantik. Syamsuri, dkk (2016) mendeskripsikan karakteristik konstruksi bukti formal berdasarkan struktur bukti yang dihasilkan dan pemahaman konseptual mahasiswa dalam bentuk Model Kuadran.

Upaya meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematis juga dilakukan oleh beberapa peneliti. Kusnandi (2008) dan Salsabila, dkk (2015) menggunakan strategi abduktif-deduktif untuk meningkatkan kemampuan pembuktian. Arnawa (2009) menggunakan teori APOS untuk mengembangkan kemampuan mahasiswa dalam memvalidasi bukti. Kodirun (2014) menggunakan pendekatan progresif untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian. Samparadja (2014) menerapkan pendekatan induktif-deduktif berbasis definisi termodifikasi untuk meningkatkan kemampuan pembuktian.

Adapun bidang kajian yang dilakukan oleh mayoritas peneliti tersebut adalah pembuktian di bidang aljabar dengan menekankan pada prosedur dan proses berpikir dalam pembuktian tanpa melibatkan karakteristik yang dimiliki mahasiswa seperti gaya kognitif.

Penelitian mengenai karakteristik subjek dengan gaya kognitif, khususnya gaya kognitif refleksif dan impulsif tidak hanya menganalisis kinerja pemrosesan informasi, namun juga perbedaan kualitatif dalam proses penalaran dan pemecahan masalah (Palladino, dkk., 1997). Lebih lanjut, Palladino, dkk menegaskan bahwa proses elaborasi dan solusi strategis yang diadopsi oleh subjek dengan gaya kognitif impulsif kurang efektif dibandingkan dengan subjek dengan gaya kognitif reflektif. Hasil penelitian Abdul & Agung (2015) menunjukkan bahwa pada proses pemecahan masalah matematika, subjek yang bergaya kognitif *reflektif* terlihat sangat berhati-hati dalam setiap tahapannya sehingga saat terjadi kesalahan subjek yang bergaya kognitif *reflektif* sadar akan kesalahannya dan memperbaiki kesalahan tersebut. Di sisi lain, subjek yang bergaya kognitif impulsif cenderung cepat dan kurang berhati-hati dalam memecahkan masalah yang dihadapinya. Selain itu, hasil penelitian Warli (2013) menunjukkan bahwa subjek dengan gaya kognitif reflektif mempunyai kreativitas pemecahan masalah geometri yang lebih baik daripada subjek bergaya kognitif impulsif. Hasil penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa gaya kognitif reflektif dan impulsif memiliki pengaruh dalam pembelajaran matematika.

Paparan terkait hasil penelitian, pendapat para ahli dan fakta-fakta mengenai pembuktian matematis dan gaya kognitif reflektif-impulsif menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian matematis dan dimensi gaya kognitif reflektif-impulsif merupakan hal yang layak untuk dikaji. Penulis belum menemukan kajian terkait kemampuan pembuktian matematis dan gaya kognitif reflektif-impulsif yang dilakukan terhadap mahasiswa, khususnya mahasiswa di tahun pertama perkuliahan. Oleh karenanya, penulis memfokuskan kajian secara mendalam terkait kemampuan pembuktian matematis mahasiswa tingkat pertama ditinjau dari gaya kognitif reflektif dan impulsif. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan

informasi secara komprehensif kepada dosen mengenai kemampuan pembuktian matematis mahasiswa tingkat pertama berdasarkan gaya kognitif yang dimiliki.

1.2 Rumusan Masalah

Fokus utama penelitian berkaitan dengan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa dan gaya kognitif. Kemampuan pembuktian matematis mahasiswa yang dikaji mengacu pada konstruksi bukti matematis yang dihasilkan oleh mahasiswa tahun pertama dalam menyelesaikan soal pembuktian yang berkaitan dengan materi perkuliahan teori bilangan, khususnya keterbagian bilangan bulat. Adapun gaya kognitif yang dimaksud dalam penelitian meliputi gaya kognitif reflektif dan gaya kognitif impulsif. Secara garis besar, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimanakah kemampuan pembuktian mahasiswa pada pembelajaran teori bilangan ditinjau dari gaya kognitif reflektif dan impulsif?”. Secara khusus, garis besar permasalahan penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut.

1. Bagaimanakah kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada pembelajaran teori bilangan ditinjau dari gaya kognitif reflektif?
2. Bagaimanakah kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada pembelajaran teori bilangan ditinjau dari gaya kognitif impulsif?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan utama penelitian adalah untuk memperoleh gambaran profil yang komprehensif mengenai kemampuan pembuktian mahasiswa pada pembelajaran teori bilangan ditinjau dari gaya kognitif reflektif dan impulsif. Profil kemampuan pembuktian matematis berfokus pada konstruksi bukti yang dihasilkan oleh mahasiswa tahun pertama, baik yang bergaya kognitif reflektif maupun impulsif, dalam menyelesaikan soal pembuktian terkait materi keterbagian bilangan bulat. Secara khusus, penelitian dilaksanakan dengan tujuan berikut.

1. Menganalisis kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada pembelajaran teori bilangan ditinjau dari gaya kognitif reflektif.

2. Menganalisis kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada pembelajaran teori bilangan ditinjau dari gaya kognitif impulsif.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Secara Teoritis

Memberikan kontribusi tentang kemampuan pembuktian matematis mahasiswa tahun pertama, khususnya dalam hal mengkonstruksi bukti, ditinjau dari gaya kognitif reflektif dan impulsif. Kemampuan mengkonstruksi pembuktian matematis dijabarkan melalui kemampuan mahasiswa tahun pertama berkenaan dengan tiga aspek kemampuan, yakni (1) mengidentifikasi premis beserta implikasinya dan kondisi yang mendukung untuk membangun suatu pembuktian, (2) membuat koneksi antara fakta yang diketahui dalam pernyataan dengan unsur yang hendak dibuktikan, dan (3) mengorganisasi dan memanipulasi fakta berdasarkan definisi dan teorema yang diberikan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan.

2. Secara Praktis

Penelitian ini memberikan informasi kepada dosen/pengajar mengenai kemampuan mahasiswa tahun pertama dalam mengkonstruksi bukti matematis ditinjau dari gaya kognitif reflektif dan impulsif. Informasi tersebut diharapkan menjadi bahan pertimbangan bagi dosen/pengajar dalam merancang dan mengelola pembelajaran dengan memperhatikan gaya kognitif mahasiswa. Melalui informasi ini juga diharapkan dosen/pengajar dapat mengupayakan strategi pembelajaran pembuktian matematis yang tepat bagi mahasiswa, khususnya mahasiswa tahun pertama, dengan mempertimbangkan karakteristik gaya kognitif yang dimiliki.