

**TENSOR ALJABAR-C* DAN APLIKASINYA PADA KOMPOSIT DUA
SISTEM SPIN- $\frac{1}{2}$ DENGAN HAMILTONIAN SINUSOIDAL
BERGANTUNG WAKTU**

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika



Oleh:
Rivani Adistia Dewi
1900140

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
2023**

LEMBAR HAK CIPTA

Tensor Aljabar-C* dan Aplikasinya pada Komposit Dua Sistem Spin- $\frac{1}{2}$ dengan Hamiltonian Sinusoidal Bergantung Waktu

Oleh
Rivani Adistia Dewi
1900140

Sebuah skripsi yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana
Matematika pada Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Rivani Adistia Dewi 2023
Universitas Pendidikan Indonesia
September 2023

Hak Cipta dilindungi undang-undang.
Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian,
dengan dicetak ulang, difoto kopi, atau cara lainnya tanpa ijin dari penulis.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul: "Tensor Aljabar- C^* dan Aplikasinya pada Komposit Dua Sistem Spin- $\frac{1}{2}$ dengan Hamiltonian Sinusoidal Bergantung Waktu" ini beserta seluruh isinya adalah benar karya saya sendiri. Saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika ilmu yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran etika keilmuan atau ada klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandung, Agustus 2023



Rivani Adistia Dewi

NIM. 1900140

LEMBAR PENGESAHAN

RIVANI ADISTIA DEWI

1900140


TENSOR ALJABAR-C* DAN APLIKASINYA PADA KOMPOSIT DUA

SISTEM SPIN- $\frac{1}{2}$ DENGAN HAMILTONIAN SINUSOIDAL

BERGANTUNG WAKTU

disetujui dan disahkan oleh:

Pembimbing I,

 8/8/2023

Dr. Sumanang Muhtar Gozali, M.Si.

NIP. 197411242005011001

Pembimbing II,



Imam Nugraha Albania, M.Pd., Ph.D.

NIP. 198604062010121003

Mengetahui,

Ketua Prodi Matematika,



Dr. Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.

NIP. 198207282005012001

ABSTRAK

Sistem spin- $\frac{1}{2}$ merupakan salah satu fenomena terpenting dalam mekanika kuantum. Fenomena dalam sistem spin- $\frac{1}{2}$ dinyatakan ke dalam tiga matriks Pauli, yaitu $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, dan $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dengan menyisipkan matriks identitas I , maka dapat dikonstruksi aljabar-C* $C^*(\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\})$ dengan $|\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \otimes \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}| = 16 = |\{E_{ij} : i, j = 1, 2, 3, 4\}|$, di mana E_{ij} adalah basis kanonik dari aljabar-C* $M_4(\mathbb{C})$. Pada penelitian ini, dengan menggunakan konsep kebebasan linier, diperoleh hasil bahwa $C^*(\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}) \otimes C^*(\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}) \cong M_4(\mathbb{C})$. Ini berarti, untuk setiap observabel di komposit dua sistem spin- $\frac{1}{2}$, dapat dinyatakan melalui reduksi lapangan dari \mathbb{C} ke \mathbb{R} pada $\text{span}\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \otimes \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ yang merupakan aljabar non-asosiatif. Selanjutnya, diberikan Hamiltonian

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J} \sin(\omega t) (\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) (I \otimes \sigma_3)$$

dan state awal yang merupakan superposisi (kombinasi linier) dari basis Bell. Dengan menggunakan metode faktor integrasi dan fakta komutasi dari operator untuk eksponensial, maka diperoleh state bergantung waktu

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{it}{\hbar}} \left(\frac{i\mathcal{J}}{\hbar\omega} \cos(\omega t) \right) \left(\frac{i\mathcal{J}}{\hbar\omega} \sin(\omega t) \right) v_{i(5-i)} \right)_{i=1}^4,$$

dengan $v_{ij} = \delta_{(i+j)_5} (-1)^{\text{maks}\{i,j\}}$, di mana δ_{ij} adalah Kronecker delta.

Kata kunci: matriks Pauli, hasil kali tensor, relasi komutasi.

ABSTRACT

Spin- $\frac{1}{2}$ system is one of the most important phenomenon in quantum mechanics. Such a system is known to be expressed as Pauli matrices, that is $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, and $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. By inserting the identity matrix I , we can construct a C^ -algebra $C^*({I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3})$ with $|{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \otimes {I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}| = 16 = |{E_{ij}: i, j = 1, 2, 3, 4}|$, where E_{ij} is the canonical basis of C^* -algebra $M_4(\mathbb{C})$. In this study, by using the linear independence concept, we got $C^*({I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}) \otimes C^*({I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}) \cong M_4(\mathbb{C})$. This means, that for any observable in the composite of two spin- $\frac{1}{2}$ systems, it can be expressed by the field reduction from \mathbb{C} to \mathbb{R} in $\text{span}\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \otimes \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ where the structure itself is non-associative algebra. Furthermore, given a Hamiltonian*

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + J \sin(\omega t) (\sigma_3 \otimes I) + J \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) (I \otimes \sigma_3)$$

and the initial state which is a superposition (linear combination) of Bell basis, by using the integration factor method and the commutation fact of the exponential operator, we got the time-dependent state

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{it}{\hbar}} \left(\frac{iJ}{\hbar\omega} \cos(\omega t) \right) \left(\frac{iJ}{\hbar\omega} \sin(\omega t) \right) v_{i(5-i)} \right)_{i=1}^4,$$

with $v_{ij} = \delta_{(i+j)5} (-1)^{\text{maks}\{i,j\}}$, where δ_{ij} is Kronecker delta.

Keywords: *Pauli matrices, tensor product, commutation relation.*

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN.....	ii
UCAPAN TERIMA KASIH.....	iii
ABSTRAK	iv
<i>ABSTRACT</i>	v
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR TABEL.....	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Penelitian	1
1.2 Rumusan Masalah Penelitian	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	6
1.5 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	9
2.1 Aljabar Banach Kompleks	9
2.2 Aljabar- C^* dan Hasil Kali Tensor.....	12
2.3 Mekanika Kuantum dan Operator (Matriks) Pauli.....	15
BAB III METODE PENELITIAN.....	17
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	21
4.1 Struktur $\text{span} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$	21
4.2 State $ \psi(t)\rangle$	27
4.3 Plot Nilai Ekspektasi	30
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....	36
5.1 Kesimpulan.....	36
5.2 Saran.....	36
DAFTAR PUSTAKA	38

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$	21
Tabel 4.2 Relasi Komutasi di $\mathcal{A} \setminus \{\sigma_0\} \otimes \mathcal{A} \setminus \{\sigma_0\}$	24

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 “Perputaran” pada mekanika klasik	2
Gambar 1.2 “Perputaran” pada spin- $\frac{1}{2}$	2
Gambar 2.1 Diagram sifat universal hasil kali tensor X dan Y	14
Gambar 4.1 Representasi spin partikel saat $t = 0$	32
Gambar 4.2 Representasi spin partikel saat $t = 25$	32
Gambar 4.3 Plot nilai ekspektasi $15 \leq t \leq 20$	32
Gambar 4.4 Plot nilai ekspektasi $0 \leq t \leq 5$	33
Gambar 4.5 Representasi spin partikel saat $t = \beta$	33
Gambar 4.6 Plot nilai ekspektasi $0 \leq t \leq \gamma_3$	33
Gambar 4.7 Representasi spin partikel $0 \leq t \leq \gamma_1$	33
Gambar 4.8 Representasi spin partikel $\gamma_2 \leq t \leq \gamma_3$	33
Gambar 4.9 Plot nilai ekspektasi $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$	34
Gambar 4.10 Plot nilai ekspektasi $\lambda_1 \leq t \leq \lambda_2$	34
Gambar 4.11 Representasi spin partikel $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$	34
Gambar 4.12 Representasi spin partikel $\lambda_1 \leq t \leq \lambda_2$	34
Gambar 4.13 Plot nilai ekspektasi $\mu_1 \leq t \leq \mu_4$	35
Gambar 4.14 Representasi spin partikel $\mu_1 \leq t \leq \mu_2$	35
Gambar 4.15 Representasi spin partikel $\mu_2 \leq t \leq \mu_3$	35
Gambar 4.16 Representasi spin partikel $\mu_3 \leq t \leq \mu_4$	35

DAFTAR PUSTAKA

- Andoni, S. (2022). Spin 1/2 One- and Two-particle System in Physical Space without Eigen-algebra or Tensor Product. *Math Meth Appl Sci*, 1-14.
- Bratteli, O.; Robinson, D. W. (1987). *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: C*- and W*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Coggins, M. (2021). *Introduction to Quantum Computing with Qiskit*. Scarborough Quantum Computing Ltd.
- Duarte, F. J.; Taylor, T. S.; Slaten, J. C.;. (2020). On the Probability Amplitude of Quantum Entanglement and the Pauli Matrices. *Optical and Quantum Electronics*, 52(106).
- Gelfand, I. M.; Naimark, M. A. (1943). On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space. *Recueil Mathématique (Matematicheskii Sbornik)*, 12(54), 197-217.
- Goudsmit, S.; Uhlenbeck, G. E. (1926). Spinning Electrons and the Structure of Spectra. *Nature*, 117, 264-265.
- Haag, R. (1996). *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer.
- Hall, B. C. (2013). *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer.
- Jin, L.; Song, Z.;. (2019). Bulk-Boundary Correspondence in a Non-Hermitian System in One Dimension with Chiral Inversion Symmetry. *Physical Review B*, 99.
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library.
- Lin, S.; Jin, L.; Song, Z.;. (2019). Symmetry Protected Topological Phases Characterized by Isolated Exceptional Points. *Physical Review B*, 99(16).
- Miller, M.; Miller, D.;. (2021). GraphStateVis: Interactive Visual Analysis of Qubit Graph State and Their Stabilizer Groups. *IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*.
- Nielsen, M. A.; Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.

- Nishimura, J.; Tsuchiya, A.; (2019). Complex Langevin Analysis of the Space-Time Structure in the Lorentzian Type IIB Matrix Model. *Journal High Energy Physics*, arXiv:1904.05919.
- Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Schlatter, A. (2018). On the Vacuum Energy in Bohmian Mechanics. *Journal of Physics Communications*, 2.
- Stepney, T. S.; Kahn, J.; Kueng, R.; Guta, M.;. (2022). Projected Least-Squares Quantum Process Tomography. 6.
- Takesaki, M. (2002). *Theory of Operator Algebras I*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- Tempel, D. G.; Aspuru-Guzik, Alán. (2012). Quantum Computing Without Wavefunctions: Time-Dependent Density Functional Theory for Universal Quantum Computation. *Scientific Reports*, 2(391).
- von Neumann, J. (1942). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer.
- Wigner, E. (1939). On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group. *Annals of Mathematics*, 40(1), 149-204.
- Willette, T. Z.; Wilkowski, D.; Lefevre, R.; Taichenachev, A. V.; Yudin, V. I.;. (2022). SU(2) Hyper-clocks: Quantum Engineering of Spinor Interferences for Times and Frequency Metrology. *Physical Review Research*, 4(2).