BAB III
METODE PENELITIAN

Misalkan $\mathcal{A} = \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ di mana σ_i adalah matriks-matriks Pauli. Perhatikan himpunan $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ berikut:

$$\{I\otimes I, I\otimes\sigma_1, I\otimes\sigma_2, I\otimes\sigma_3, \sigma_1\otimes I, \sigma_1\otimes\sigma_1, \sigma_1\otimes\sigma_2, \sigma_1\otimes\sigma_3, \sigma_2\otimes I, \sigma_2\otimes\sigma_1, \sigma_2\otimes\sigma_2,$$
$$\sigma_2\otimes\sigma_3, \sigma_3\otimes I, \sigma_3\otimes\sigma_1, \sigma_3\otimes\sigma_2, \sigma_3\otimes\sigma_3\}.$$

Secara otomatis, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ merupakan generator dari aljabar-C* $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ dengan norm operator (matriks) dan involusi konjuget transpose. Secara matematis, untuk $u \in \mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A})$, maka $\exists\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{16} \in \mathbb{C}$ secara tunggal sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} u = {} & \alpha_1(I\otimes I) + \alpha_2(I\otimes\sigma_1) + \alpha_3(I\otimes\sigma_2) + \alpha_4(I\otimes\sigma_3) + \alpha_5(\sigma_1\otimes \mathrm{I}) + \alpha_6(\sigma_1\otimes\sigma_1) \\ & + \alpha_7(\sigma_1\otimes\sigma_2) + \alpha_8(\sigma_1\otimes\sigma_3) + \alpha_9(\sigma_2\otimes I) + \alpha_{10}(\sigma_2\otimes\sigma_1) \\ & + \alpha_{11}(\sigma_2\otimes\sigma_2) + \alpha_{12}(\sigma_2\otimes\sigma_3) + \alpha_{13}(\sigma_3\otimes I) + \alpha_{14}(\sigma_3\otimes\sigma_1) \\ & + \alpha_{15}(\sigma_3\otimes\sigma_2) + \alpha_{16}(\sigma_3\otimes\sigma_3). \end{aligned}$$

Dalam konteks mekanika kuantum, hasil kali tensor $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ digunakan untuk menjelaskan komposit dua sistem spin-$\frac{1}{2}$. Sebagai contoh, $\sigma_1\otimes\sigma_1$ menyatakan state observabel (karena $\sigma_1\otimes\sigma_1$ self-adjoint) yang berkorespondensi pada komponen-x dari partikel pertama yang diukur secara simultan dengan komponen-x dari partikel kedua. Contoh berikutnya, $\sigma_2\otimes I$ menyatakan state observabel yang berkorespondensi pada komponen-y dari partikel pertama yang diukur sedangkan partikel kedua diabaikan. Hasil kali tensor secara esensial adalah untuk memahami keterlibatan antara satu partikel dengan partikel lainnya yang muncul dalam dua komposit sistem kuantum.

Rumusan masalah yang pertama sesuai dengan subbab **1.2** adalah untuk mengetahui apakah $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A}) \cong M_4(\mathbb{C})$. Perhatikan bahwa banyaknya unsur dari $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ adalah 16 yang sama dengan dimensi $M_4(\mathbb{C})$, maka cukup dibuktikan apakah $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ bebas linier atau tidak. Metode untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan mengklasifikasikan bentuk-bentuk dari elemen $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ yang "serupa" ke dalam subhimpunan-subhimpunan $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, kemudian dianalisa apakah setiap elemen dari setiap subhimpunan tersebut merupakan kombinasi linier dari elemen lain subhimpunan tersebut atau tidak.

Teorema 3.1 (State Bell dan entangel maksimal):

Terdapat empat state entangel maksimal pada sistem spin-$\frac{1}{2}$ dua kubit, yaitu:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle);$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle); |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

State-state pada **Teorema 3.1** menunjukkan bentuk optimal dari ke-entangel-an kuantum sistem dua kubit (Nielsen, M. A.; Chuang, I. L., 2010). **Entangel** dalam hal ini adalah keterlibatan antara satu partikel dalam mempengaruhi state dari partikel lain tanpa memperhatikan jarak dari kedua partikel tersebut. Misalkan

$$U = (|\phi^+\rangle \quad |\phi^-\rangle \quad |\psi^+\rangle \quad |\psi^-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $UU^* = I = U^*U$ di mana U^* didefinisikan seperti pada **Contoh 2.2.2**. Ini menunjukkan bahwa U adalah matriks uniter, oleh karena itu kolom-kolom tersebut membentuk sebuah basis ortogonal, maka state Bell disebut juga basis Bell.

Sistem kuantum spin-$\frac{1}{2}$ sebagaimana sistem mekanika kuantum lainnya melibatkan persamaan Schrödinger: $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t_0, t)\rangle = H(t)|\psi(t_0, t)\rangle$, di mana $|\psi(t_0, t)\rangle = U(t_0, t)|\xi\rangle$ serta $U(t_0, t)$ dan $|\xi\rangle$ berturut-turut adalah operator evolusi waktu dan state awal. Asumsikan waktu awal $t_0 = 0$, Hamiltonian $H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)(\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I \otimes \sigma_3)$, dan state awal $|\xi\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle)$, di mana $\mathcal{J}$: konstanta kekuatan interaksi antar kubit dan ω: konstanta frekuensi interaksi antar kubit, selanjutnya notasikan $(t_0, t) = (t)$. Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, maka persamaan Schrödinger di atas menjadi

$$\frac{d}{dt}U(t) + \frac{i\mathcal{J}}{\hbar}\left[\frac{\sigma_1 \otimes \sigma_1}{\mathcal{J}} + \sin(\omega t)(\sigma_3 \otimes I) + \cos(\omega t)(I \otimes \sigma_3)\right]U(t) = 0$$

dan

$$2|\psi(t)\rangle = U(t)(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle).$$

Pemilihan Hamiltonian bergantung waktu $H(t)$ di atas didasarkan kepada kajian literatur yang penjelasannya adalah sebagai berikut:

(1) Pemilihan $H_0(t) = \sigma_1 \otimes \sigma_1$ menggambarkan sistem di mana pada masing-masing kubit mengalami balikan bit oleh pembalik-bit $\sigma_1 \otimes \sigma_1$ pada dua kubit. Sistem seperti ini berguna dalam simulasi koreksi kesalahan kuantum di mana kesalahan balikan bit adalah kesalahan yang umum terjadi, selain itu dapat mensimulasikan jenis kuantum *gate* dari kuantum komputasi (Coggins, 2021).

(2) Fungsi sinus memperkenalkan interaksi antar kubit yang memastikan bahwa kekuatan interaksi berosilasi sepanjang waktu. Fungsi sinus ini berguna untuk mensimulasikan sistem dinamik di mana kekuatan interaksi berubah setiap saat, contohnya dalam kuantum komputasi (Tempel, D. G.; Aspuru-Guzik, Alán, 2012). Pergeseran fase sebesar $\frac{\pi}{2}$ menjamin bahwa dua kubit berubah-ubah secara independen (berbeda) sepanjang waktu, karena pergeseran fase tersebut akan memberikan *delay* dalam osilasi.

(3) $\sigma_3 \otimes I$ dan $I \otimes \sigma_3$ menjamin bahwa pembalikan fase dialami pada masing-masing kubit secara terpisah, hal ini salah satunya berguna untuk mensimulasi aproksimasi fase kuantum atau transformasi Fourier kuantum (Nielsen, M. A.; Chuang, I. L., 2010).

Rumusan masalah yang kedua sesuai dengan subbab **1.2** adalah untuk mengetahui state $|\psi(t)\rangle$ sepanjang waktu $t > 0$. Untuk mencari $|\psi(t)\rangle$ diperlukan operator evolusi waktu $U(t)$ dengan state awal $|\xi\rangle$. Untuk tujuan ini, pertama-tama perlu dicari solusi persamaan Schrödinger

$$\frac{d}{dt}U(t) + \frac{i\mathcal{J}}{\hbar}\left[\frac{\sigma_1 \otimes \sigma_1}{\mathcal{J}} + \sin(\omega t)\,(\sigma_3 \otimes I) + \cos(\omega t)\,(I \otimes \sigma_3)\right]U(t) = 0$$

untuk $U(t)$, kemudian mengalikannya dengan $|\xi\rangle$. Metode untuk memecahkan rumusan masalah yang kedua ini adalah dengan menggunakan faktor integrasi persamaan diferensial linier homogen dan fakta bahwa $e^{A+B} = e^A e^B$ jika dan hanya jika $AB - BA = 0$ untuk matriks-matriks kompatibel A dan B, serta fakta bahwa $1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$ adalah konvergen untuk setiap matriks persegi A.

Dalam menentukan plot nilai ekspektasi, maka perlu menghitung nilai ekspektasi. Untuk menghitung nilai ekspektasi diperlukan operator nilai ekspektasi. Misalkan $\mathcal{O}$ adalah operator nilai ekspektasi (observabel), maka nilai ekspektasi dari operator $\mathcal{O}$ adalah $\langle\psi(t)|\mathcal{O}|\psi(t)\rangle$. Menghitung nilai ekspektasi dari waktu ke waktu merupakan perhitungan yang memerlukan banyak waktu dan rawan kesalahan, sehingga untuk menentukan plot nilai ekspektasi akan digunakan alat bantu Jupyter Notebook dengan Quantum Tools in Python (QuTiP) *library* seperti yang disajikan pada subbab **4.3**.