BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Penelitian

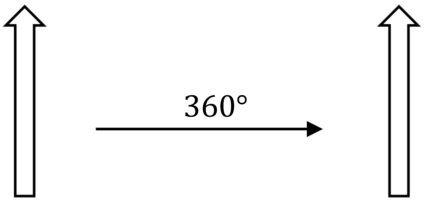
Mekanika adalah cabang ilmu fisika yang mempelajari gerak benda. Dalam perkembangannya, mekanika sampai saat ini terbagi menjadi dua, yaitu mekanika klasik dan mekanika kuantum. Mekanika kuantum digunakan untuk memprediksi state benda-benda pada level atomik atau subatomik, berbeda dengan mekanika klasik. Contoh teori pada mekanika klasik adalah hukum Newton yang tidak dapat diterapkan pada benda-benda level atomik atau subatomik. Hal inilah yang menyebabkan perkembangan studi mekanika kuantum yang berperan seperti mekanika klasik pada level atomik atau subatomik.

Pada awal perkembangannya di permulaan abad ke-20, mekanika kuantum menjelaskan sifat-sifat partikel pada level atomik atau subatomik di mana mekanika klasik tidak dapat diterapkan. Awalnya sifat partikel pada level atomik atau subatomik yang terobservasi hanya posisi dan momentum. Seiring perkembangan penelitian para fisikawan, ternyata partikel pada level atomik atau subatomik juga mengalami perputaran yang dikenal dengan istilah spin. Sebagai contoh, partikel pada level atomik atau subatomik seperti elektron, proton, dan neutron mempunyai sifat mekanika kuantum yang dikenal dengan spin-$\frac{1}{2}$. Sistem spin-$\frac{1}{2}$ merupakan salah satu sistem kuantum yang memainkan peranan penting dalam memahami momentum sudut intrinsik sebuah partikel (Goudsmit, S.; Uhlenbeck, G. E., 1926). Untuk menginvestigasi pondasi matematis dari mekanika kuantum, para peneliti menggunakan alat-alat matematis mulai dari ruang vektor hingga aljabar-C*.

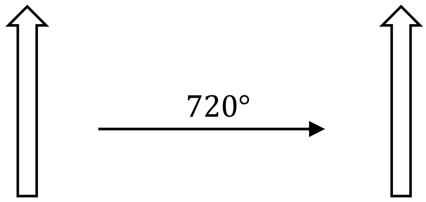
Hubungan antara mekanika kuantum dan matematika analisis berawal dari persamaan Schrödinger yang memprediksi state kuantum dari sebuah sistem fisika yang menjelaskan evolusi waktu dari fungsi gelombang (Nielsen, M. A.; Chuang, I. L., 2010). Selanjutnya, Heisenberg memperkenalkan formulasi mekanika matriks dari sistem kuantum yang memberikan arah investigasi yang lebih mendalam kepada struktur matematis yang berada di sistem kuantum (Nielsen, M. A.; Chuang, I. L., 2010).

von Neumann (1942) dan Wigner (1939) mengembangkan kerangka kerja sistematis untuk mekanika kuantum menggunakan ruang Hilbert. Kerangka kerja ini meletakkan dasar untuk memahami state kuantum sebagai vektor-vektor di ruang Hilbert dan kuantum-kuantum yang dapat diamati (observabel). Namun untuk kerangka kerja yang lebih umum diperlukan sistem yang lebih "komprehensif" karena banyak fenomena kuantum tidak dapat dijelaskan oleh vektor-vektor di ruang Hilbert (operator self-adjoint) saja. Oleh sebab itu munculah pengembangan aljabar-C* yang diperkenalkan oleh Gelfand & Naimark (1943). Aljabar-C* merupakan kelas dari struktur aljabar yang dikarakterisasi oleh ke-self-adjoint-an, norm-penutup, dan involusi. Menurut Haag (1996) sifat-sifat dari aljabar-C* menjadikan aljabar-C* "cocok" digunakan untuk menjelaskan sistem mekanika kuantum yang salah satunya adalah sistem spin-$\frac{1}{2}$.

Spin-$\frac{1}{2}$ adalah "perputaran" partikel pada suatu sistem fisika. Adapun karakteristik "perputaran" pada sistem spin-$\frac{1}{2}$ berbeda dengan karakteristik "perputaran" pada mekanika klasik. Pada mekanika klasik, dibutuhkan "perputaran" $360°$ agar suatu benda kembali ke "posisi awal", sedangkan pada sistem spin-$\frac{1}{2}$, dibutuhkan "perputaran" $720°$ agar suatu benda kembali ke "posisi awal".



Gambar 1.1 "Perputaran" pada mekanika klasik



Gambar 1.2 "Perputaran" pada spin-$\frac{1}{2}$

Sakurai (1994) mengemukakan bahwa state dari suatu partikel pada sistem spin-$\frac{1}{2}$ berkorespondensi dengan operator-operator spin yang dideskripsikan ke dalam matriks 2×2 yang disebut matriks Pauli, yaitu

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Setiap matriks Pauli memiliki sifat self-adjoint, trace-nya sama dengan 0 (*traceless*), determinannya sama dengan -1, serta memenuhi relasi komutasi $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ dan relasi anti-komutasi $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\sigma_i^2$, di mana ϵ_{ijk} adalah simbol Levi-Civita dan δ_{ij} adalah Kronecker delta.

Matriks Pauli yang merupakan korespondensi dari sistem spin-$\frac{1}{2}$ secara aktif masih dipelajari oleh para peneliti sebagaimana yang akan disajikan berikut ini.

1. Matriks Pauli memiliki peranan penting dalam (Jin, L.; Song, Z.;, 2019) yang digunakan untuk membangun deskripsi matematis dari sistem yang dipelajari terutama sifat-sifat topologi dan berbagai pengaruh dari ke-non-Hermitian-an sistem, yaitu: Hamiltonian yang didefinisikan untuk memperkenalkan non-Hermitian ke dalam sistem yang diteliti direpresentasikan oleh matriks Pauli (hal 2), matriks Pauli digunakan untuk mendefinisikan lapangan vektor 2-komponen (hal 3), matriks Pauli merepresentasikan apa yang diperoleh oleh penulis yang ekuivalen dengan Hamiltonian Bloch melalui suatu prosedur dalam sistem non-Hermitian (hal 4).
2. Matriks Pauli memainkan peran penting dalam (Miller, M.; Miller, D.;, 2021), yaitu mendeskripsikan state kuantum tertentu dengan menggunakan grup stabilizer. Penelitian tersebut mendiskusikan state graf yang merupakan jenis khusus dari state stabilizer, di mana untuk setiap state graf $|G\rangle$ mempunyai grup stabilizer $S = \{\pm\sigma_1^r\sigma_3^{\Gamma r} \big| r \in F_2^n\}$, Γ adalah matriks ajasensi dari graf G dan F_2^n adalah lapangan n-tuple dari 0 atau 1.
3. Matriks Pauli digunakan untuk merepresentasikan struktur ruang waktu dari model $(3+1)D$. (Nishimura, J.; Tsuchiya, A.;, 2019)
4. Di dalam (Lin, S.; Jin, L.; Song, Z.;, 2019), matriks Pauli digunakan untuk menkonstruksi Hamiltonian non-Hermitian 2-komponen. Matriks Pauli juga menjelaskan sifat-sifat simetri dari sistem yang diteliti. Selain itu, matriks Pauli digunakan untuk menurunkan invarian topologi.
5. Di dalam (Schlatter, 2018), matriks Pauli digunakan untuk mengkonstruksi Hamiltonian pada persamaan Schrödinger dari sistem elektron di lintasan Bohmian.
6. Dalam (Willette, T. Z.; Wilkowski, D.; Lefevre, R.; Taichenachev, A. V.; Yudin, V. I.;, 2022), sistem spin-$\frac{1}{2}$ dideskripsikan melalui *hyper-clock* grup $SU(2)$ dengan basis matriks-matriks Pauli.
7. Dalam (Stepney, T. S.; Kahn, J.; Kueng, R.; Guta, M.;, 2022), matriks Pauli memainkan peranan penting sebagai operator pengukuran untuk

mengumpulkan data pada *setting* eksperimen yang sederhana dan muncul dalam ekspresi estimator kuadrat terkecil yang diperoleh oleh penulis. Sebagai operator pengukuran, matriks Pauli memainkan peranan dalam menghitung peluang sistem kubit yang terkait dengan matriks Choi.

8. Dalam (Andoni, 2022), matriks Pauli digunakan untuk merepresentasikan model geometris yang merupakan penjumlahan dari tiga buah vektor ortogonal. Matriks-matriks Pauli ini mendefinisikan spin vektor "ke atas" dan "ke bawah" dari model tersebut, selain sebagai transformasi dalam rotasi *improper*.
9. Di dalam (Duarte, F. J.; Taylor, T. S.; Slaten, J. C.;, 2020), amplitudo probabilitas untuk entangel kuantum yang merupakan state Bell dapat digunakan untuk memperoleh matriks Pauli dan dengan metode yang dijelaskan dalam artikel tersebut, berlaku *reversible*. Secara spesifik:
   a. σ_1 berkaitan dengan ϕ^+;
   b. $i\sigma_2$ berkaitan dengan ϕ^-;
   c. I berkaitan dengan ψ^+;
   d. σ_3 berkaitan dengan ψ^-.

Dalam menentukan state dari suatu partikel di satu sistem spin-$\frac{1}{2}$, matriks Pauli digunakan untuk menentukan state dari satu partikel, sehingga untuk menentukan state dari dua buah partikel, perlu mendesain hasil kali tensor dari matriks Pauli. Ruang lingkup dalam skripsi ini adalah komposit dua sistem spin-$\frac{1}{2}$, yakni aljabar-C* $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ dengan $\mathcal{A} = \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, di mana I adalah matriks identitas 2×2, kemudian menyatakan state dengan state awal dari superposisi (kombinasi linier) basis tensor.

Perhatikan bahwa untuk setiap $\sigma_i\otimes\sigma_j \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, matriks 4×4 $\sigma_i\otimes\sigma_j$ memiliki empat entri tak nol $(\pm 1, \pm i)$, dan entri lainnya sama dengan nol (lihat subbab **4.1** halaman 21) dengan banyak matriks dari himpunan $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ adalah 16 yang sama banyaknya dengan basis kanonik $M_4(\mathbb{C})$. Di lain pihak, basis kanonik dari $M_4(\mathbb{C})$ adalah E_{ij} yang merupakan matriks 4×4 di mana entri baris ke-i dan kolom ke-j sama dengan 1 dan entri lainnya sama dengan nol. Ini berarti setiap matriks basis kanonik untuk $M_4(\mathbb{C})$ memiliki satu entri tak nol $(+1)$ dan entri lainnya sama dengan nol, maka menarik untuk dikaji apakah himpunan $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ bebas linier atau tidak.

State bergantung waktu terkait erat dengan operator evolusi waktu dan state awal. Di lain pihak, operator evolusi waktu bergantung kepada Hamiltonian pada persamaan Schrödinger-nya. Sejatinya, penentuan Hamiltonian bergantung waktu dan state awal didasarkan pada uji coba laboratorium atau fenomena kuantum yang hendak diobservasi. Namun dalam tulisan ini, penentuan Hamiltonian bergantung waktu dan state awal didasarkan pada asumsi-asumsi teoretis yang penjelasannya dapat dilihat di **Bab III** halaman 19, di mana Hamiltonian bergantung waktu dan state awal yang akan digunakan pada tulisan ini berturut-turut adalah

$$H(t) = (\sigma_1\otimes\sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3\otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I\otimes\sigma_3)$$

dan

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle).$$

1.2 Rumusan Masalah Penelitian

Berdasarkan **1.1.3**, maka masalah dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Apakah $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A}) \cong M_4(\mathbb{C})$?
2. Menyatakan state bergantung waktu $|\psi(0,t)\rangle; t > 0$ dengan Hamiltonian bergantung waktu

$$H(t) = (\sigma_1\otimes\sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3\otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I\otimes\sigma_3)$$

dan superposisi dari basis Bell sebagai state awal.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan **1.2**, maka tujuan yang hendak dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat ke-saling tertukar-an antara $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})\otimes\mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ dan $M_4(\mathbb{C})$.
2. Mengetahui state bergantung waktu $|\psi(0,t)\rangle; t > 0$ dengan Hamiltonian bergantung waktu

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I \otimes \sigma_3)$$

dan superposisi dari basis Bell sebagai state awal.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat Teoritis:

1. Memberikan framework silabus untuk mempelajari tensor dari aljabar-C* dan membuktikan secara mendetail atas setiap definisi bahwa $M_4(\mathbb{C})$ adalah aljabar-C*.
2. Menjelaskan bahwa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ bebas linier dan banyak matriks dari himpunan $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ adalah 16 yang sama banyaknya dengan basis kanonik $M_4(\mathbb{C})$, sehingga $\mathrm{C}^*(\mathcal{A}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ dan $M_4(\mathbb{C})$ memiliki sifat ke-saling tertukar-an.
3. Menjelaskan bahwa ketidakpastian Heisenberg berpeluang lebih kecil pada komposit dua sistem spin-$\frac{1}{2}$ dibandingkan sistem kubit tunggal.
4. Memberikan bentuk state $|\psi(t)\rangle$ untuk Hamiltonian bergantung waktu

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I \otimes \sigma_3)$$

dan state awal

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle).$$

Manfaat Praktis:

1. Memberikan cara alternatif untuk membatasi $M_4(\mathbb{C})$ terhadap unsur-unsur self-adjoint-nya sebagai representasi dari observabel.
2. Bagi bidang fisika, penelitian ini bisa menjadi acuan untuk mengetahui state bergantung waktu dari suatu partikel pada komposit dua sistem spin-$\frac{1}{2}$ dengan Hamiltonian bergantung waktu

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I \otimes \sigma_3)$$

dan state awal

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle).$$

1.5 Sistematika Penulisan

Bab I Pendahuluan: (1) Menyajikan latar belakang bagaimana sistem mekanika kuantum berkaitan dengan aljabar-C* dan ruang lingkup sistem spin-$\frac{1}{2}$; dan (2) menyatakan rumusan masalah penelitian, tujuan penelitian, serta manfaat penelitian terkait dua struktur ruang vektor dan state bergantung waktu $|\psi(0,t)\rangle; t > 0$ atas Hamiltonian bergantung waktu

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I \otimes \sigma_3).$$

Bab II Kajian Pustaka: Menyajikan teori-teori relevan yang terdiri atas ruang vektor, aljabar kompleks, aljabar kompleks unital, norm, aljabar kompleks bernorm, norm operator (matriks), barisan Cauchy, barisan yang lengkap, aljabar Banach kompleks, involusi, konjuget transpose, aljabar-C*, hasil kali tensor, sifat universal, vektor ket sebagai state, contoh superposisi pada sistem spin-$\frac{1}{2}$, pembalik-bit, pembalik-fase dan ketidakpastian Heisenberg terkait relasi komutasi.

Bab III Metode Penelitian: (1) Menyajikan prosedur dalam membuktikan himpunan $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ bebas linier melalui fakta bahwa suatu himpunan dikatakan bebas linier jika untuk setiap elemen di himpunan tersebut bukan merupakan kombinasi linier elemen lainnya dari himpunan tersebut; dan (2) menyajikan prosedur dalam menentukan state bergantung waktu dengan Hamiltonian bergantung waktu

$$H(t) = (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3 \otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I \otimes \sigma_3)$$

dan state awal

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle).$$

Prosedur yang digunakan adalah menyelesaikan persamaan diferensial linier orde satu (persamaan Schrödinger) menggunakan metode faktor integrasi dan beberapa manipulasi aljabar.

Bab IV Hasil dan Pembahasan: (1) Menyajikan nilai eigen dari elemen-elemen $\mathcal{A}\backslash\{I\} \otimes \mathcal{A}\backslash\{I\}$ (**Lemma 4.1.1**); (2) menyajikan sifat-sifat $\mathcal{A}\backslash\{I\} \otimes \mathcal{A}\backslash\{I\}$ dan kaitannya terhadap matriks-matriks Pauli (**Proposisi 4.1.2**); (3) menyimpulkan bahwa peluang untuk menghitung secara presisi kuantitas fisis di sistem dua komposit lebih besar dari komposit tunggal pada sistem spin-$\frac{1}{2}$ serta menyajikan bentuk relasi komutasi dari $\mathcal{A}\backslash\{I\} \otimes \mathcal{A}\backslash\{I\}$ (**Proposisi 4.1.3**); (4) menyajikan pernyataan bahwa $C^*(\mathcal{A})\otimes C^*(\mathcal{A}) \cong M_4(\mathbb{C})$ beserta buktinya (**Teorema 4.1.4**); (4) menyatakan bentuk umum operator evolusi waktu (**Lemma 4.2.1**) dan bentuk umum state bergantung waktu (**Teorema 4.2.2**); dan (5) memplot nilai ekspektasi dan menganalisa fenomena yang terjadi melalui grafik atas operator nilai ekspektasi $\sigma_1\otimes I$ dan $I\otimes\sigma_1$ menggunakan Jupyter Notebook dengan QuTiP *library*.

Bab V Kesimpulan dan Saran: (1) Menyajikan kesimpulan bahwa $C^*(\mathcal{A})\otimes C^*(\mathcal{A}) \cong M_4(\mathbb{C})$, sehingga observabel di komposit dua sistem spin-$\frac{1}{2}$ meliputi semua matriks self-adjoint di $M_4(\mathbb{C})$; (2) menyajikan kesimpulan bahwa untuk setiap observabel di komposit dua sistem spin-$\frac{1}{2}$ yang meliputi semua matriks self-adjoint di $M_4(\mathbb{C})$ dapat dinyatakan ke dalam $\sum_{i,j}\alpha_{ij}\left(\sigma_i\otimes\sigma_j\right)$ untuk setiap $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$ dan $\sigma_i\otimes\sigma_j\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$; (3) menyajikan kesimpulan bahwa untuk Hamiltonian

$$H(t) = (\sigma_1\otimes\sigma_1) + \mathcal{J}\sin(\omega t)\,(\sigma_3\otimes I) + \mathcal{J}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)(I\otimes\sigma_3)$$

dan state awal $|\xi\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle)$, diperoleh state bergantung waktu

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{it}{\hbar}\right)\left(\frac{i\mathcal{J}}{\hbar\omega}\cos(\omega t)\right)\left(\frac{i\mathcal{J}}{\hbar\omega}\sin(\omega t)\right)\delta_{i(5-i)}}\right)_{i=1}^{4},$$

dengan $\nu_{ij} = \delta_{(i+j)5}(-1)^{\text{maks}\{i,j\}}$; (4) memberikan saran bahwa untuk menelaah observabel dari komposit dua sistem kuantum dengan generator $\mathcal{A}$, cukup memperhatikan himpunan $\mathcal{B} = \left\{\sum_{i,j}\alpha_{ij}\left(\sigma_i\otimes\sigma_j\right)\middle|\alpha_{ij}\in\mathbb{R},\sigma_i\otimes\sigma_j\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right\}$ yang merupakan subhimpunan dari aljabar-C* $C^*(\mathcal{A})\otimes C^*(\mathcal{A})$ dengan definisi perkalian $AB = (AB+BA)/2$, sehingga $\mathcal{B}$ adalah aljabar non-asosiatif; (5) memberikan saran bahwa pada komposit n-sistem kuantum dengan generator $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\ldots\otimes\mathcal{A}$ sebanyak n buah dan Hamiltonian komutatif bergantung waktu, solusi persamaan Schrödinger tampaknya bisa diperoleh dengan menggunakan metode faktor integrasi; dan (6) memberikan saran penelitian lanjutan terkait formulasi dari relasi komutasi sebagaimana disajikan pada **Tabel 4.1.2**.