BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang di dalamnya terdapat konsep dasar dari analisis runtun waktu, yaitu konsep dari: proses stokastik, kestasioneran, rata-rata, fungsi autokovariansi, fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial, *white noise*, model proses linier umum (AR, MA, ARMA, dan ARIMA), identifikasi model, penaksiran parameter model Autoregresif, verifikasi, dan konsep dari metode bootstrap persentil.

2.1 Analisis Runtun Waktu

2.1.1 Proses Stokastik

Dalam analisis runtun waktu, barisan observasi pada suatu variabel dipandang sebagai realisasi dari variabel acak berdistribusi bersama, yakni terdapat fungsi kepadatan peluang bersama pada variabel acak $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, misalnya:

$$f_{1,2,...,n}(Z_1, Z_2, ..., Z_n) \qquad (2.1.1.1)$$

subskrip $1,2,\ldots,n$ pada fungsi kepadatan peluang itu menunjukkan kenyataan bahwa parameter maupun bentuk fungsi kepadatan peluang itu bergantung pada titik waktu tertentu yang diperhatikan. Jika fungsi kepadatan peluang (2.1.1.1) diketahui, maka dengan mudah dapat dibuat pernyataan tentang hasil yang mungkin dari observasi yang belum terealisasikan. Model seperti ini dinamakan proses stokastik karena observasi berurutan yang tersusun melalui waktu mengikuti suatu hukum peluang (Zanzawi, 1987).

2.1.2 Kestasioneran

Untuk setiap runtun waktu $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ dengan fungsi kepadatan bersama bersama $f_{1,2,...,n}(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$, jika ingin melihat data ke-Z_{n+1} maka peluangnya menjadi $P(Z_{n+1} | Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ yang berarti peluang Z_{n+1} berdasarkan data sebelumnya $Z_1, Z_2, ..., Z_n$. Suatu proses dikatakan proses stasioner apabila distribusi gabungan dan distribusi bersyaratnya tidak berubah oleh adanya selang waktu dan jika tidak maka proses tersebut dikatakan nonstasioner.

Untuk Z_t stasioner dengan sebarang t, berlaku:

1. $E(Z_t) = \mu$; untuk setiap t. (2.1.2.1)

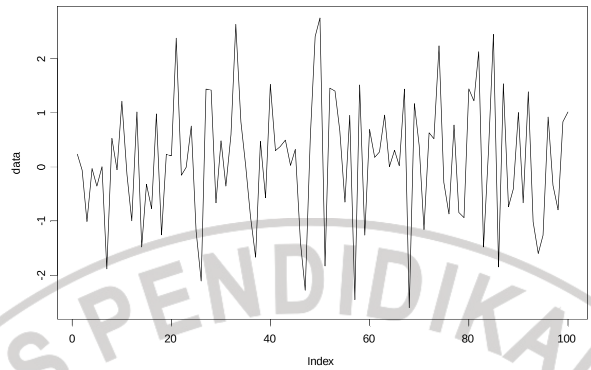
2. $$E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu) = \begin{cases} \sigma_z^2 & \text{untuk} \quad k = 0 \\ \gamma_k & \text{untuk} \quad k \neq 0 \end{cases} \qquad (2.1.2.2)$$

γ_k dan μ untuk setiap lag k (panjang pergeseran) adalah konstan.

Secara umum data runtun waktu yang stasioner apabila:

1. Tidak terdapat perubahan rata-rata dari waktu ke waktu.
2. Apabila plot runtun berkala tidak memperlihatkan adanya perubahan variansi yang cukup berarti dari waktu ke waktu.

Plot proses stasioner dapat dilihat sebagai berikut:

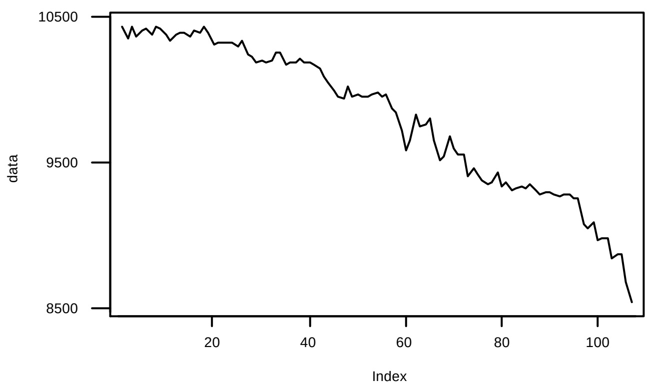


Gambar (2.1.2.1) Plot Runtun Waktu yang Stasioner

Secara umum data runtun waktu yang nonstasioner apabila:

1. Rata-rata menyimpang dari waktu ke waktu.
2. Variansi tidak konstan terhadap waktu.

Plot proses nonstasioner dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar (2.1.2.2) Plot Runtun Waktu yang Nonstasioner

2.1.3 Rata-Rata, Fungsi Autokovariansi, Fungsi Autokorelasi, dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Fungsi rata-rata untuk proses stokastik $(Z_t; t \in T)$ dengan $T = \{0,1,2,...\}$, didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu_t = E(Z_t) \qquad \text{untuk } t = 0,1,2,... \tag{2.1.3.1}$$

dengan μ_t adalah nilai yang diharapkan dari proses pada waktu t. Fungsi autokovariansi didefinisikan sebagai berikut:

$$\gamma_k = \text{kov}(Z_t, Z_{t-k}) \qquad \text{untuk } k = 1,2,...$$

$$= E[(Z_t - \mu_t)(Z_{t-k} - \mu_{t-k})] \tag{2.1.3.2}$$

untuk setiap lag-k (panjang pergeseran).

Autokorelasi pada lag-k didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_k = \frac{\text{kov}(Z_t, Z_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(Z_t)\,\text{var}(Z_{t-k})}}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \tag{2.1.3.3}$$

Untuk $k = 0$:

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1. \tag{2.1.3.4}$$

Himpunan $\{\rho_k; k = 0,1,2,...\}$ dengan $\rho_0 = 1$ disebut fungsi autokorelasi (fak). Alat lain yang diperlukan dalam analisis runtun waktu adalah fungsi autokorelasi parsial (fakp) yang ditulis $\{\phi_{kk}; k = 1,2,...\}$, yaitu himpunan autokorelasi parsial untuk berbagai lag- k , yang definisikan sebagai berikut:

$$\phi_{kk} = \frac{\left|\underline{P}_k^*\right|}{\left|\underline{P}_k\right|}$$

dengan $\underline{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks autokorelasi $k \times k$

dan $\underline{P}_k^*$ adalah $\underline{P}_k$ dengan kolom terakhir diganti dengan $\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$, sehingga:

$$\phi_{11} = \rho_1 \tag{2.1.3.5}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \tag{2.1.3.6}$$

dan seterusnya.

2.1.4 *White Noise*

Proses $\{a_t\}$ dinamakan proses *white noise* jika barisan variabel acak $\{a_t\}$ saling bebas dengan rata-rata nol dan variansinya konstan, yakni:

$$E(a_t) = 0 \quad \text{dan} \quad \text{var}(a_t) = \sigma_a^2 . \tag{2.1.4.1}$$

Oleh karena barisan variabel acak $\{a_t\}$ saling bebas, maka fungsi autokovariansinya adalah:

$$\gamma_k = E(a_t, a_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{2.1.4.2}$$

dengan fungsi autokorelasinya berbentuk:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}. \tag{2.1.4.3}$$

2.1.5 Model Proses Linier Umum

Model Box-Jenkins untuk analisis runtun waktu menggunakan operator *backshift* B yang didefinisikan sebagai:

$$BZ_t = Z_{t-1} \tag{2.1.5.1}$$

dan operator diferensi ∇ yang didefinisikan sebagai:

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1-B)Z_t\,. \tag{2.1.5.2}$$

Dengan demikian kedua operator ini mempunyai hubungan:

$$\nabla = (1-B)\,. \tag{2.1.5.3}$$

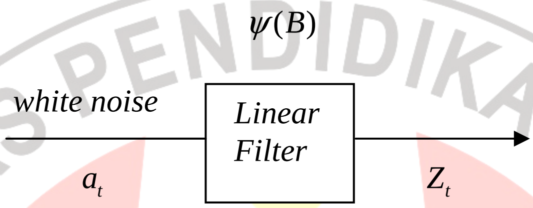
Model linier yang sering dijumpai dalam analisis runtun waktu berbentuk:

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t \tag{2.1.5.4}$$

dengan $\phi(B)$ dan $\theta(B)$ adalah polinom dalam runtun waktu dan a_t adalah *white noise* berdistribusi normal. Persamaan (2.1.5.4) dapat ditulis pula dalam bentuk:

$$Z_t = \psi(B)a_t \tag{2.1.5.5}$$

dengan $\psi(B) = \dfrac{\theta(B)}{\phi(B)}$, maka $\{Z_t\}$ dapat dipandang sebagai runtun yang dihasilkan dengan melewatkan proses *white noise* $\{a_t\}$ melalui suatu *linear filter* dengan fungsi transfer $\psi(B)$, seperti yang ditunjukkan di dalam gambar (2.1.5.1).



Gambar (2.1.5.1) Representasi Runtun Waktu Sebagai Hasil *Linear Filter* Jumlah Tertimbang dari Observasi Sebelumnya

Untuk suatu μ yang konstan di mana $\mu \neq 0$, representasi model pada persamaan (2.1.5.5) dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \mu + \psi(B)a_t \\
&= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots \qquad (2.1.5.6)
\end{aligned}
$$

dengan $\psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots)$. Jika barisan $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$ tidak berhingga ataupun berhingga tapi konvergen maka fungsi transfer $\psi(B)$ dikatakan stabil dan runtun waktu yang dihasilkan bersifat stasioner. Model pada persamaan (2.1.5.6) juga dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots \\
&= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \qquad (2.1.5.7)
\end{aligned}
$$

Untuk sederhananya, Y_t sering dituliskan sebagai Z_t, dengan pengertian $\mu = 0$, sehingga persamaan (2.1.5.7) dapat dituliskan sebagai:

$$Z_t = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j a_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \right) a_t = \psi(B) a_t \qquad (2.1.5.8)$$

dengan $\psi_0 = 1$.

Selanjutnya, model pada persamaan (2.1.5.5) dapat ditulis pula sebagai jumlah tertimbang nilai-nilai Z yang lalu ditambah *white noise* sekarang a_t, yakni:

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} + a_t$$

$$\Leftrightarrow Z_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} = a_t$$

$$\Leftrightarrow Z_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j Z_t = a_t$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j \right) Z_t = a_t$$

$$\Leftrightarrow \pi(B) Z_t = a_t . \qquad (2.1.5.9)$$

Berikut ini adalah beberapa macam model runtun waktu yang linier di dalam metode peramalan univariat Box-Jenkins:

2.1.5.1 Model Autoregresif Orde-p (AR(p))

Dalam hal $\pi_j = 0$ untuk $j > \mathrm{p}$, maka persamaan (2.1.5.9) menjadi:

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \cdots + \pi_\mathrm{p} Z_{t-\mathrm{p}} + a_t \,. \qquad (2.1.5.1.1)$$

Persamaan (2.1.5.1.1) disebut proses Autoregresif orde-p atau AR(p). Untuk membedakan proses Autoregresif orde-p dengan proses linier umum, maka digunakan notasi $\pi_j = \phi_j$, sehingga persamaan (2.1.5.1.1) menjadi:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_\mathrm{p} Z_{t-\mathrm{p}} + a_t \qquad (2.1.5.1.2)$$

Persamaan (2.1.5.1.2) merupakan bentuk umum dari proses Autoregresif orde-p yang dapat juga ditulis:

$$\phi(B) Z_t = a_t \qquad (2.1.5.1.3)$$

dengan $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_\mathrm{p} B^\mathrm{p})$ dinamakan operator AR(p).

2.1.5.1.1 Model Autoregresif Orde-1 (AR(1))

Bentuk umum proses Autoregresif orde-1 yang dinotasikan dengan AR(1) adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \qquad (2.1.5.1.1.1)$$

atau ditulis:

$$(1 - \phi_1 B) Z_t = a_t \qquad (2.1.5.1.1.2)$$

dengan asumsi suku sesatan a_t adalah *white noise* berdistribusi normal, a_t independen dengan Z_{t-1}, dan model stasioner. Maka:

$$E(Z_t) = E(\phi_1 Z_{t-1}) + E(a_t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = \phi_1 \mu + 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 0 .$$

Sedangkan variansinya adalah:

$$\text{var}(Z_t) = \text{var}(\phi_1 Z_{t-1}) + \text{var}(a_t) .$$

$$\Leftrightarrow \text{var}(Z_t) = \phi_1^2 \, \text{var}(Z_{t-1}) + \sigma_a^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_z^2 = \phi_1^2 \sigma_z^2 + \sigma_a^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_z^2 (1 - \phi_1^2) = \sigma_a^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} . \qquad (2.1.5.1.1.3)$$

Agar σ_z^2 berhingga dan tidak negatif haruslah $-1 < \phi < 1$ yang merupakan syarat runtun waktu yang stasioner. Pada umumnya, syarat perlu dan syarat cukup proses AR(1) stasioner adalah akar $\phi(B) = 0$ haruslah terletak di luar lingkaran satuan.

Dengan mengalikan persamaan (2.1.5.1.1.1) dengan Z_{t-k} dan mengambil ekspektasinya, maka diperoleh:

$$E(Z_t Z_{t-k}) = E(\phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}) .$$

Untuk $k \geq 1$; $\quad \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + 0$

$$\gamma_k = \phi_1 (\phi_1 \gamma_{k-2})$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k = \phi_1^2 \gamma_0 . \quad (2.1.5.1.1.4)$$

Sedangkan fungsi autokorelasi (fak) adalah:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi_1^k \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1^k \quad \text{untuk} \quad k \geq 1 \quad (2.1.5.1.1.5)$$

yang menurun secara eksponensial. Sedangkan fungsi autokorelasi parsial (fakp)-nya adalah:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1^1 = \phi_1 \quad (2.1.5.1.1.6)$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0 . \quad (2.1.5.1.1.7)$$

Maka:

$$\phi_{kk} = 0, \text{ untuk } k > 1 \quad (2.1.5.1.1.8)$$

di mana fakp-nya hanya mempunyai satu suku atau terputus setelah lag ke-1. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa ciri-ciri teoritis AR(1) adalah fak turun secara eksponensial sedangkan fakp-nya terputus setelah lag ke-1.

2.1.5.1.2 Model Autoregresif Orde-2 (AR(2))

Bentuk umum proses Autoregresif orde-2 yang dinotasikan dengan AR(2) adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \quad (2.1.5.1.2.1)$$

atau ditulis:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Z_t = a_t \quad (2.1.5.1.2.2)$$

dengan asumsi suku sesatan a_t adalah *white noise* berdistribusi normal dan a_t independen dengan Z_{t-1}, Z_{t-2}. Untuk syarat stasioneritas, berlaku $\mu = 0$. Dengan mengalikan persamaan (2.1.5.1.2.1) dengan Z_{t-k} dan mengambil ekspektasinya, maka diperoleh:

$$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}).$$

Untuk $k = 0$; $\quad \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 \left(1 - \phi_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_0} - \phi_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \right) = \sigma_a^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 (1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2) = \sigma_a^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_z^2 = \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2} \qquad (2.1.5.1.2.3)$$

$k \geq 1$; $\quad \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$. (2.1.5.1.2.4)

Sedangkan fungsi autokorelasi (fak) diperoleh dengan membagi persamaan (2.1.5.1.2.4) dengan γ_0 menjadi:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}. \qquad (2.1.5.1.2.5)$$

Jika dimulai dengan:

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1 \qquad (2.1.5.1.2.6)$$

maka untuk $k = 1$, diperoleh:

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}. \qquad (2.1.5.1.2.7)$$

Untuk $k = 2$, diperoleh:

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2. \qquad (2.1.5.1.2.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1.5.1.2.7) ke persamaan (2.1.5.1.2.8) diperoleh:

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 \,. \tag{2.1.5.1.2.9}$$

Untuk $k = 3$, diperoleh:

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 \tag{2.1.5.1.2.10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1.5.1.2.7) dan (2.1.5.1.2.9) ke persamaan (2.1.5.1.2.10), maka diperoleh:

$$\rho_3 = \phi_1 \left(\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 \right) + \phi_2 \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_3 = \phi_1 \left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1-\phi_2} \right) + \frac{\phi_1 \phi_2}{1-\phi_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_3 = \frac{\phi_1^3 + \phi_1 \phi_2 - \phi_1 \phi_2^2 + \phi_1 \phi_2}{1-\phi_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_3 = \frac{\phi_1^3 + 2\phi_1 \phi_2 - \phi_1 \phi_2^2}{1-\phi_2}$$

Adapun untuk $k > 3$, ρ_k dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.1.5.1.2.5) sebagai hubungan berulang.

Jika persamaan (2.1.5.1.2.7) dan (2.1.5.1.2.9) disubstitusikan pada persamaan (2.1.5.1.2.3) maka diperoleh:

$$\sigma_z^2 = \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{\left(1 - \phi_1 \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right) - \phi_2 \left(\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 \right) \right)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{\left(\frac{(1-\phi_2) - \phi_1^2 - \phi_2\left(\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)\right)}{(1-\phi_2)} \right)}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1-\phi_2) - \phi_1^2 - \phi_2\left(\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)\right)}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1-\phi_2) - \phi_1^2 - \phi_2\phi_1^2 - \phi_2^2(1-\phi_2)}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1-\phi_2) - \phi_2^2(1-\phi_2) - \phi_1^2 - \phi_2\phi_1^2}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1-\phi_2^2)(1-\phi_2) - (1+\phi_2)\phi_1^2}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_2)(1-\phi_2) - (1+\phi_2)\phi_1^2}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_2)^2 - (1+\phi_2)\phi_1^2}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1+\phi_2)\left\{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right\}}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_2-\phi_1)(1-\phi_2+\phi_1)}$$

$$= \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}. \qquad (2.1.5.1.2.10)$$

Karena σ_z^2 harus positif dan diketahui σ_a^2 positif, maka haruslah:

$1-\phi_2 > 0$

$1+\phi_2 > 0$

$$1-\phi_1-\phi_2>0$$

$$1+\phi_1-\phi_2>0$$

dengan kata lain harus dipenuhi:

$$-1<\phi_2<1$$

$$\phi_1+\phi_2<1$$

$$\phi_2-\phi_1<1 \qquad (2.1.5.1.2.11)$$

yang merupakan syarat runtun waktu yang stasioner untuk AR(2).

Adapun fakp untuk proses Autoregresif orde-2 atau AR(2) diberikan sebagai berikut:

$$\phi_{11}=\rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad (2.1.5.1.2.12)$$

$$\phi_{22}=\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22}=\frac{\left(\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}+\phi_2\right)-\left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)^2}{1-\left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22}=\frac{\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2-\phi_2^2}{1-\phi_2}\right)-\frac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}}{1-\frac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22}=\frac{\frac{(1-\phi_2)\left(\phi_1^2+\phi_2-\phi_2^2\right)-\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}}{\frac{(1-\phi_2)^2-\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22} = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2 - \phi_2\phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_2^3 - \phi_1^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22} = \frac{\phi_2 - 2\phi_2^2 - \phi_2^3 - \phi_2\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22} = \frac{\phi_2\left(\left(1-2\phi_2 - \phi_2^2\right) - \phi_1^2\right)}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22} = \frac{\phi_2\left((1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right)}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{22} = \phi_2 \qquad (2.1.5.1.2.13)$$

Untuk $k = 3$, diperoleh:

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1\rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{33} = \frac{\begin{array}{l}(1)(1)(\phi_1\rho_2+\phi_2\rho_1)+(\rho_1)(\phi_1\rho_1+\phi_2)(\rho_2)+(\phi_1+\phi_2\rho_1)(\rho_1)(\rho_1)\\ -(\rho_2)(1)(\phi_1+\phi_2\rho_1)-(\rho_1)(\phi_1\rho_1+\phi_2)(1)-(\phi_1\rho_2+\phi_2\rho_1)(\rho_1)(\rho_1)\end{array}}{\begin{array}{l}(1)(1)(1)+(\rho_1)(\rho_1)(\rho_2)+(\rho_2)(\rho_1)(\rho_1)-(\rho_2)(1)(\rho_2)\\ -(\rho_1)(\rho_1)(1)-(1)(\rho_1)(\rho_1)\end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{33} = \frac{\begin{array}{l}\phi_1\rho_2+\phi_2\rho_1+\phi_1\rho_1^2\rho_2+\phi_2\rho_1\rho_2+\phi_1\rho_1^2+\phi_2\rho_1^3\\ -\phi_1\rho_2-\phi_2\rho_1\rho_2-\phi_1\rho_1^2-\phi_2\rho_1-\phi_1\rho_1^2\rho_2-\phi_2\rho_1^3\end{array}}{1+\rho_1^2\rho_2+\rho_2\rho_1^2+\rho_2^2-\rho_1^2-\rho_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{33} = 0. \qquad (2.1.5.1.2.14)$$

Maka:

$$\phi_{kk} = 0, \text{ untuk } k > 2. \qquad (2.1.5.1.2.15)$$

Dapat disimpulkan fakp-nya terputus setelah lag ke-2. Untuk fak dan fakp untuk orde yang lebih tinggi dapat ditentukan dengan cara yang serupa.

2.1.5.2 Model *Moving Average* Orde-q (MA(q))

Dalam hal $\psi_j = 0$ untuk $j > \mathrm{q}$, maka persamaan (2.1.5.8) menjadi:

$$Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots + \psi_{\mathrm{q}} a_{t-\mathrm{q}}. \qquad (2.1.5.2.1)$$

Persamaan (2.1.5.2.1) disebut proses *Moving Average* orde-q atau MA(q). Untuk membedakan proses *Moving Average* orde-q dengan proses linier umum, digunakan notasi $\psi_j = -\theta_j$, sehingga persamaan (2.1.5.2.1) menjadi:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_{\mathrm{q}} a_{t-\mathrm{q}} \qquad (2.1.5.2.2)$$

Persamaan (2.1.5.2.2) merupakan bentuk umum dari proses *Moving Average* orde-q atau MA(q) yang dapat juga ditulis:

$$Z_t = \theta(B)a_t \qquad (2.1.5.2.3)$$

dengan $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$ dinamakan operator MA(q).

2.1.5.3 Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA(p,q))

Perluasan yang dapat diperoleh dari model Autoregresif dan *Moving Average* adalah model campuran yang berbentuk:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \qquad (2.1.5.3.1)$$

dan dinamakan model ARMA(p,q). Model ini dapat juga ditulis:

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t\,. \qquad (2.1.5.3.2)$$

Untuk stasioneritas dan invertibilitas memerlukan akar-akar $\phi(B) = 0$ dan $\theta(B) = 0$ terletak di luar lingkaran satuan.

2.1.5.4 Model *Intregated Autoregressive Moving Average* (ARIMA(p,d,q))

Runtun waktu yang stasioner jarang sekali dijumpai dalam praktek, namun stasioneritas merupakan asumsi yang bermanfaat dalam mempelajari runtun waktu. Ada banyak hal yang menyebabkan suatu runtun waktu tidak stasioner, tetapi kiranya paling banyak dijumpai adalah runtun waktu yang tidak mempunyai rata-rata yang tetap.

Barisan Z_t dikatakan mengikuti bentuk ARIMA(p,d,q), jika proses selisih suatu runtun waktu $W_t = \nabla^d Z_t$ adalah proses stasioner ARMA(p,q). Jika W_t

adalah ARMA(p,q) maka Z_t adalah ARIMA(p,d,q). Sebagai contoh, dipilih $\mathrm{d}=1$. Untuk proses ARIMA(p,1,q) dengan $W_t = Z_t - Z_{t-1}$, diperoleh:

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}} W_{t-\mathrm{p}} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_{\mathrm{q}} a_{t-\mathrm{q}} \tag{2.1.5.4.1}$$

atau

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} = {} & \phi_1 (Z_{t-1} - Z_{t-2}) + \phi_2 (Z_{t-2} - Z_{t-3}) + \cdots + \phi_{\mathrm{p}} (Z_{t-\mathrm{p}} - Z_{t-\mathrm{p}-1}) \\ & + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_{\mathrm{q}} a_{t-\mathrm{q}} \end{aligned} \tag{2.1.5.4.2}$$

sehingga

$$\begin{aligned} Z_t = {} & (1+\phi_1) Z_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1) Z_{t-2} + (\phi_3 - \phi_2) Z_{t-3} + \cdots + (\phi_{\mathrm{p}} - \phi_{\mathrm{p}-1}) Z_{t-\mathrm{p}} \\ & - \phi_{\mathrm{p}} Z_{t-\mathrm{p}-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_{\mathrm{q}} a_{t-\mathrm{q}}. \end{aligned} \tag{2.1.5.4.3}$$

2.1.6 Identifikasi Model

Untuk mengidentifikasi model linear ARMA yang merupakan representasi suatu proses yang dimanifestasikan oleh runtun waktu $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, dihitung rata-rata, variansi, fak, dan fakp runtun waktu itu, selanjutnya fak $\{r_k\}$ dan fakp $\{\hat{\phi}_{kk}\}$ digambar, masing-masing dengan garis batas $2\mathrm{SE}(r_k)$ dan $2\mathrm{SE}(\hat{\phi}_{kk})$. Grafik $\{r_k\}$ dan $\{\hat{\phi}_{kk}\}$ harus menunjukkan model yang sementara dapat diterima. Hal ini dapat dilakukan dengan memperhatikan di mana $\{r_k\}$ atau $\{\hat{\phi}_{kk}\}$ terputus; yakni, jika pada suatu nilai k nilai $r_k < 2\mathrm{SE}(r_k)$ dan $\hat{\phi}_{kk} < 2\mathrm{SE}(\hat{\phi}_{kk})$. Pedoman untuk pengamatan ini diberikan dalam tabel (2.1.6.1).

Tabel (2.1.6.1) Bentuk Pendekatan $\{r_k\}$ dan $\{\hat{\phi}_{kk}\}$ untuk Model AR, MA, dan ARMA

AR(p)	$\hat{\phi}_{kk} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right); k > \text{p}$ (fakp terputus setelah lag ke-p)
MA(q)	$r_k \sim N\left(0; \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{\text{q}} r_i^2\right)\right); k > \text{q}$ (fak terputus setelah lag ke-q)
ARMA(p,q)	baik r_k maupun $\hat{\phi}_{kk}$ tidak terputus

Perlu diingat bahwa r_k sangat berkorelasi antara satu dengan yang lain. Oleh karena itu fak dan fakp hanya digunakan sebagai petunjuk umum saja, sehingga beberapa model bisa dicoba untuk data tersebut.

Jika ada alasan yang cukup untuk mengira bahwa $E(Z_t) \neq 0$, maka setiap model harus ditulis dengan $Y_t = Z_t - \bar{Z}$, dan bukannya Z_t. Jadi kerapkali diperlukan uji hipotesis bahwa $E(Z_t) = 0$, dengan membandingkan $\bar{Z}$ dengan SE($\bar{Z}$) yang tergantung pada prosesnya. Nilai var($\bar{Z}$) untuk proses AR disajikan dalam tabel (2.1.6.2).

Tabel (2.1.6.2) Nilai $\operatorname{var}(\bar{Z})$ untuk Proses AR

AR(1)	$\operatorname{var}(\bar{Z}) = \dfrac{(1+r_1)\sum_{t=1}^{n}(Z_t-\bar{Z})^2}{n^2(1-r_1)}$
AR(2)	$\operatorname{var}(\bar{Z}) = \dfrac{(1+r_1)(1-2r_1^2+r_2)\sum_{t=1}^{n}(Z_t-\bar{Z})^2}{n^2(1-r_1)(1-r_2)}$

2.1.7 Penaksiran Parameter Model Autoregresif

Setelah model sementara untuk suatu runtun waktu diidentifikasi, langkah selanjutnya adalah menaksir parameter - parameter model tersebut. Penaksiran parameter untuk model Autoregresif diberikan sebagai berikut.

Diberikan model Autoregresif orde-p ((AR(p)) di mana:

$$Z_t-\mu=\phi_1(Z_{t-1}-\mu)+\phi_2(Z_{t-2}-\mu)+\cdots+\phi_p(Z_{t-p}-\mu)+a_t. \qquad (2.1.7.1)$$

Persamaan tersebut merupakan suatu model regresi dengan variabel penaksiran $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots, Z_{t-p}$, variabel responsif Z_t, parameter Autoregresif $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$, dan konstanta μ. Jika model yang telah ditaksir ditunjukkan oleh:

$$Z_t-\hat{\mu}=\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})+\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})+\cdots+\hat{\phi}_p(Z_{t-p}-\hat{\mu})+\hat{a}_t \qquad (2.1.7.2)$$

maka diperoleh:

$$\hat{a}_t=(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_p(Z_{t-p}-\hat{\mu}). \qquad (2.1.7.3)$$

Berdasarkan metode kuadrat terkecil, ditentukan:

$$S(\hat{\phi},\hat{\mu})=\sum_{t=p+1}^{n}\hat{a}_t=\sum_{t=p+1}^{n}\left[(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_p(Z_{t-p}-\hat{\mu})\right]^2. \qquad (2.1.7.4)$$

Kemudian $S(\hat{\phi},\hat{\mu})$ diturunkan secara parsial terhadap $\hat{\mu}$ dan disamakan dengan nol, yakni:

$$\frac{\partial S(\hat{\phi},\hat{\mu})}{\partial\hat{\mu}}=\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}2[(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}(Z_{t-\mathrm{p}}-\hat{\mu})](-1+\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2+\cdots+\hat{\phi}_\mathrm{p})=0$$

$$\Leftrightarrow-\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}2[(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}(Z_{t-\mathrm{p}}-\hat{\mu})]$$

$$+\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}2[(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}(Z_{t-\mathrm{p}}-\hat{\mu})]$$

$$+\hat{\phi}_2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}2[(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}(Z_{t-\mathrm{p}}-\hat{\mu})]$$

$$+\cdots+\hat{\phi}_\mathrm{p}\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}2[(Z_t-\hat{\mu})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\hat{\mu})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\hat{\mu})-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}(Z_{t-\mathrm{p}}-\hat{\mu})]=0$$

$$\Leftrightarrow-\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\hat{\phi}_1Z_{t-1}-\hat{\phi}_2Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}Z_{t-\mathrm{p}})-\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p})\right]$$

$$+\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\hat{\phi}_1Z_{t-1}-\hat{\phi}_2Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}Z_{t-\mathrm{p}})-\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p})\right]$$

$$+\hat{\phi}_2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\hat{\phi}_1Z_{t-1}-\hat{\phi}_2Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}Z_{t-\mathrm{p}})-\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p})\right]$$

$$+\cdots+\hat{\phi}_\mathrm{p}\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\hat{\phi}_1Z_{t-1}-\hat{\phi}_2Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}Z_{t-\mathrm{p}})-\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p})\right]=0$$

$$\Leftrightarrow-\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1Z_{t-1}-\hat{\phi}_2Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}Z_{t-\mathrm{p}})+\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p})$$

$$+\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1Z_{t-1}-\hat{\phi}_2Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p}Z_{t-\mathrm{p}})-\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_\mathrm{p})$$

$$+\hat{\phi}_2\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})-\hat{\phi}_2\sum_{t=p+1}^{n}\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)$$

$$+\cdots+\hat{\phi}_p\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})-\hat{\phi}_p\sum_{t=p+1}^{n}\mu(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)=0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})+\hat{\phi}_1\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})$$

$$+\hat{\phi}_2\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})+\cdots+\hat{\phi}_p\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})$$

$$+\hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)(n-p)-\hat{\phi}_1\hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)(n-p)$$

$$-\hat{\phi}_2\hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)(n-p)-\cdots-\hat{\phi}_p\hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)(n-p)=0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)(n-p)(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)=$$

$$(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mu}=\frac{\sum_{t=p+1}^{n}(Z_t-\hat{\phi}_1 Z_{t-1}-\hat{\phi}_2 Z_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_p Z_{t-p})}{(n-p)(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p)}. \qquad (2.1.7.5)$$

Untuk sejumlah n:

$$\sum_{t=p+1}^{n}\frac{Z_t}{n-p}\approx\sum_{t=p+1}^{n}\frac{Z_{t-1}}{n-p}\approx\cdots\approx\sum_{t=p+1}^{n}\frac{Z_{t-p}}{n-p}\approx\bar{Z} \qquad (2.1.7.6)$$

dengan mengabaikan nilai-nilai ϕ, maka persamaan (2.1.7.5) tereduksi menjadi:

$$\hat{\mu}=\frac{\bar{Z}-\hat{\phi}_1\bar{Z}-\hat{\phi}_2\bar{Z}-\cdots\hat{\phi}_p\bar{Z}}{1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\cdots-\hat{\phi}_p}=\bar{Z}. \qquad (2.1.7.7)$$

Pengaruh dari persamaan (2.1.7.7) adalah:

$$\hat{\mu}=\bar{Z}.$$

Selanjutnya $S(\hat{\phi},\bar{Z})$ diturunkan secara parsial terhadap $\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2,\ldots,$dan $\hat{\phi}_{\mathrm{p}}$ kemudian disamakan dengan nol, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial S(\hat{\phi},\bar{Z})}{\partial\hat{\phi}_1}=-2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\bar{Z})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\bar{Z})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\bar{Z})-\cdots-\hat{\phi}_{\mathrm{p}}(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})\right](Z_{t-1}-\bar{Z})=0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\phi},\bar{Z})}{\partial\hat{\phi}_2}=-2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\bar{Z})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\bar{Z})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\bar{Z})-\cdots-\hat{\phi}_{\mathrm{p}}(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})\right](Z_{t-2}-\bar{Z})=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S(\hat{\phi},\bar{Z})}{\partial\hat{\phi}_{\mathrm{p}}}=-2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}\left[(Z_t-\bar{Z})-\hat{\phi}_1(Z_{t-1}-\bar{Z})-\hat{\phi}_2(Z_{t-2}-\bar{Z})-\cdots-\hat{\phi}_{\mathrm{p}}(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})\right](Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})=0$$

kemudian disederhanakan, menjadi:

$$\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_t-\bar{Z})(Z_{t-1}-\bar{Z})=\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-1}-\bar{Z})^2+\hat{\phi}_2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-1}-\bar{Z})(Z_{t-2}-\bar{Z})$$
$$+\cdots+\hat{\phi}_{\mathrm{p}}\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-1}-\bar{Z})(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})$$

$$\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_t-\bar{Z})(Z_{t-2}-\bar{Z})=\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-1}-\bar{Z})(Z_{t-2}-\bar{Z})+\hat{\phi}_2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-2}-\bar{Z})^2$$
$$+\cdots+\hat{\phi}_{\mathrm{p}}\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-2}-\bar{Z})(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})$$

$$\vdots$$

$$\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_t-\bar{Z})(Z_{t-2}-\bar{Z})=\hat{\phi}_1\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-1}-\bar{Z})(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})+\hat{\phi}_2\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-2}-\bar{Z})(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})$$
$$+\cdots+\hat{\phi}_{\mathrm{p}}\sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n}(Z_{t-\mathrm{p}}-\bar{Z})^2\,. \qquad (2.1.7.8)$$

Persamaan (2.1.7.8) disebut persamaan normal dan jika ditulis dalam bentuk matriks, maka bentuknya menjadi:

$$\underline{Z}^t \underline{Z}\hat{\underline{\phi}} = \underline{Z}^t \underline{V} \tag{2.1.7.9}$$

dengan

$$\underline{Z} = \underset{(n-\mathrm{p})\times \mathrm{p}}{\begin{bmatrix} Z_{\mathrm{p}} - \bar{Z} & Z_{\mathrm{p}-1} - \bar{Z} & \cdots & Z_1 - \bar{Z} \\ Z_{\mathrm{p}+1} - \bar{Z} & Z_{\mathrm{p}} - \bar{Z} & \cdots & Z_2 - \bar{Z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n-1} - \bar{Z} & Z_{n-2} - \bar{Z} & \cdots & Z_{n-\mathrm{p}} - \bar{Z} \end{bmatrix}}$$

$$\underline{V} = \underset{(n-\mathrm{p})\times 1}{\begin{bmatrix} Z_{\mathrm{p}+1} - \bar{Z} \\ Z_{\mathrm{p}+2} - \bar{Z} \\ \vdots \\ Z_n - \bar{Z} \end{bmatrix}} \quad \text{dan} \quad \hat{\underline{\phi}} = \underset{(\mathrm{p}\times 1)}{\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{\mathrm{p}} \end{bmatrix}}.$$

Kita asumsikan $\underline{Z}^t \underline{Z}$ *nonsingular*, sehingga $\underline{Z}^t \underline{Z}$ mempunyai invers, yakni $(\underline{Z}^t \underline{Z})^{-1}$. Dengan demikian $\hat{\underline{\phi}}$ taksiran untuk $\underline{\phi}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\phi}} = (\underline{Z}^t \underline{Z})^{-1} \underline{Z}^t \underline{V}\,. \tag{2.1.7.10}$$

2.1.8 Verifikasi (*Diagnostic Check*)

Langkah selanjutnya adalah verifikasi, yaitu memeriksa apakah model yang diestimasi cukup sesuai dengan data yang dimiliki. Pemeriksaan ini dapat dilakukan dengan uji *Portmanteau.* Adapun statistik uji yang digunakan adalah statistik yang telah dikembangkan oleh Box-Pierce dan telah dimodifikasi kembali oleh Box dan Ljung, sehingga disebut modifikasi Box-Pierce (atau Ljung-Box-Pierce). Uji ini menggunakan fak sesatan untuk menguji hipotesisnya.

Berikut ini adalah langkah-langkah pengujiannya:

1. Perumusan hipotesis

   H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$ (Model cocok).

   H_1 : Salah satu tidak nol (Model tidak cocok).

2. Statistik uji

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{r_k^2(\hat{a})}{n-k} \quad (2.1.8.1)$$

   dengan:

   n = banyaknya observasi;

   K = banyaknya lag yang diamati;

   $r_k^2(\hat{a})$ = autokorelasi sesatan untuk lag ke-k.

3. Kriteria pengujian

   Tolak H_0 jika $Q > \chi^2_{1-\alpha,\, K-p-q}$.

4. Kesimpulan

   Penafsiran dari H_0 ditolak atau diterima.

2.2 Metode Bootstrap Persentil

Misal $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ adalah sampel acak dari suatu populasi data berdistribusi F yang tidak diketahui dan berukuran n, yakni:

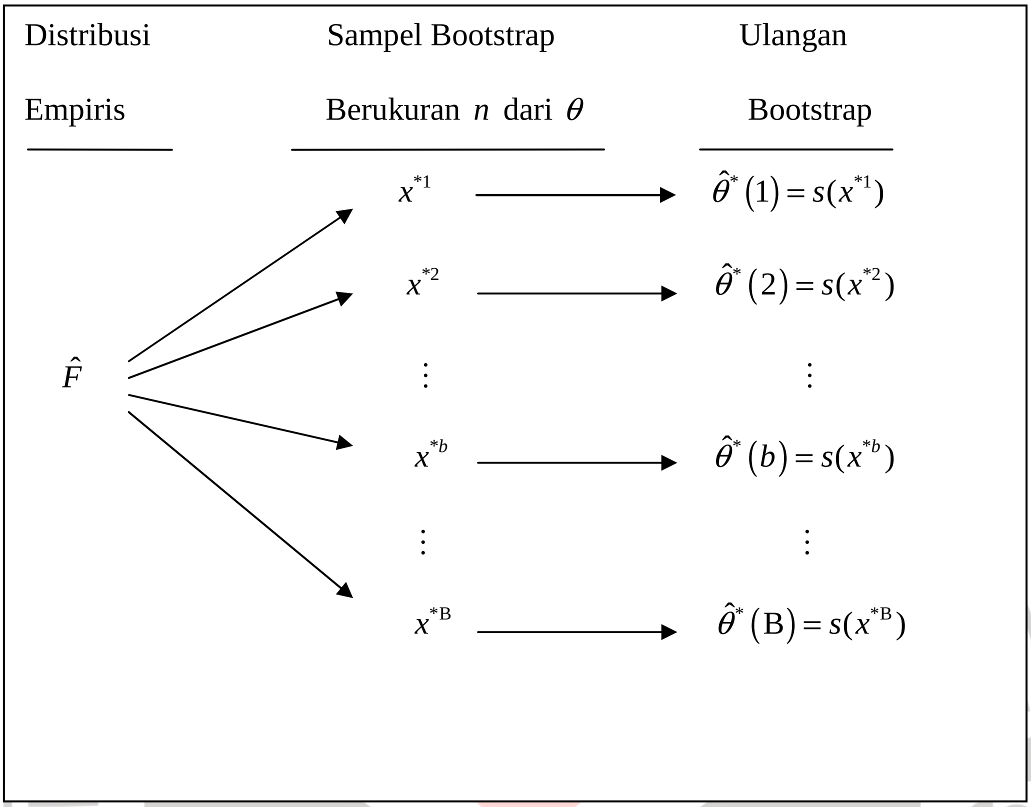
$$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \overset{i.i.d.}{\sim} F \quad (2.2.1)$$

dan F kemudian ditaksir melalui fungsi distribusi empiris $\hat{F}$ yang didefinisikan sebagai distribusi diskrit dengan memberikan peluang $1/n$ untuk setiap nilai $x_i, i = 1, 2, ..., n$. Dari distribusi $\hat{F}$, diambil sampel acak berukuran n dengan pengembalian dari data awal $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, dinotasikan:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \overset{i.i.d.}{\sim} \hat{F}. \tag{2.2.2}$$

$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ disebut sampel bootstrap dan notasi bintang (*) menunjukkan bahwa X^* adalah sampel yang dibangun dari *resampling* dengan pengembalian dari sampel acak X pada $\hat{F}$. Adapun kemungkinan suatu sampel bootstrap yang dapat diperoleh adalah $x_1^* = x_5$, $x_2^* = x_{12}$, $x_3^* = x_5$, ..., $x_n^* = x_7$. Sampel bootstrap menetapkan bahwa $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ terdiri dari anggota sampel asli $(x_1, x_2, ..., x_n)$ yang beberapa anggotanya muncul nol kali, beberapa muncul sekali, beberapa muncul dua kali, dan maksimal muncul n kali. Dengan demikian ada n^n buah sampel bootstrap yang mungkin dapat diperoleh dan $\binom{2n-1}{n}$ buah sampel bootstrap yang berbeda. Masalahnya adalah berapa kali pengambilan sampel bootstrap harus diulangi. Jika pengambilan sampel bootstrap yang diulangi sebanyak semua sampel bootstrap yang mungkin, maka untuk ukuran n buah sampel yang cukup besar, hal ini memerlukan waktu yang lama dalam prakteknya. Oleh karena keterbatasan inilah, simulasi Monte Carlo digunakan, di mana pengambilan sampel bootstap diulangi sebanyak B kali.

Berikut ini adalah gambaran umum dari algoritma bootstrap:



Gambar (2.2.1) Algoritma Bootstrap dengan Ulangan B

Misalkan untuk masing-masing B sampel bootstrap $x^{*1}, x^{*2}, \ldots, x^{*B}$, dihitung $\hat{\theta}^{*}(b) = s(x^{*b})$; $b = 1, 2, \ldots, B$, yaitu nilai $\hat{\theta}$ untuk setiap sampel bootstrap di mana $\hat{\theta}$ adalah taksiran dari θ. Selang kepercayaan bootstrap persentil pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ didefinisikan dengan persentil ke- $100(\alpha/2)$ dan ke- $100(1-\alpha/2)$ pada $\hat{\theta}^{*}$. Sehingga selang persentil dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left[\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)}\right]. \qquad (2.2.3)$$

Prosedurnya adalah dengan mengurutkan $\hat{\theta}^{*}(b) = s\left(x^{*b}\right);\ b = 1, 2, ..., \mathrm{B}$. Setelah itu, nilai statistik terurut tadi diambil yang ke-$\mathrm{B}(\alpha/2)$ dan ke-$\mathrm{B}(1-\alpha/2)$ sebagai pendekatan Monte-Carlo dari $\hat{\theta}^{*(\alpha/2)}$ dan $\hat{\theta}^{*(1-\alpha/2)}$. Selang kepercayaan bootstrap seperti pada hasil tersebut oleh Efron disebut metode bootstrap persentil.