BAB III

SELANG KEPERCAYAAN

UNTUK PERAMALAN MODEL AUTOREGRESIF

3.1 Metode Analisis Runtun Waktu Box-Jenkins dalam Menentukan Selang Kepercayaan untuk Peramalan Model Autoregresif

Diberikan runtun waktu terobservasi $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$ dengan $E(Z_t) = 0$; $\forall t \in \{1, 2, ..., n\}$. Misalkan runtun waktu $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$ memenuhi proses stasioner AR(p) berikut ini:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t . \qquad (3.1.1)$$

Persamaan (3.1.1) dapat juga ditulis:

$$\phi(B) Z_t = a_t \qquad (3.1.2)$$

di mana $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ adalah operator AR(p).

Jika diamati untuk satu periode mendatang, yakni Z_{n+1}, maka persamaan (3.1.1) menjadi:

$$Z_{n+1} = \phi_1 Z_n + \phi_2 Z_{n-1} + \cdots + \phi_p Z_{n+1-p} + a_{n+1} . \qquad (3.1.3)$$

Untuk menghitung ramalan satu periode mendatang, yakni menghitung $\hat{Z}_n(1)$ adalah tidak lain dengan cara menghitung nilai ekspektasi bersyarat $E(Z_{n+1} \mid \{Z_1, Z_2 ..., Z_n\})$,yaitu:

$$\hat{Z}_n(1) = E(Z_{n+1} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\})$$

$$= E((\phi_1 Z_n + \phi_2 Z_{n-1} + \cdots + \phi_\mathrm{p} Z_{n+1-\mathrm{p}} + a_{n+1}) \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\})$$

$$= E(\phi_1 Z_n \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + E(\phi_2 Z_{n-1} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + \cdots$$
$$+ E(\phi_\mathrm{p} Z_{n+1-\mathrm{p}} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + E(a_{n+1} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\})$$

$$= \phi_1 E(Z_n \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + \phi_2 E(Z_{n-1} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + \cdots$$
$$+ \phi_\mathrm{p} E(Z_{n+1-\mathrm{p}} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + 0$$

$$= \phi_1 Z_n + \phi_2 Z_{n-1} + \cdots + \phi_\mathrm{p} Z_{n+1-\mathrm{p}}\,. \tag{3.1.4}$$

Jika diamati untuk k periode mendatang, maka persamaan (3.1.1) menjadi:

$$Z_{n+k} = \phi_1 Z_{n+k-1} + \phi_2 Z_{n+k-2} + \cdots + \phi_\mathrm{p} Z_{n+k-\mathrm{p}} + a_{n+k} \tag{3.1.5}$$

dan ramalan k periode mendatang $\hat{Z}_n(k)$ adalah:

$$\hat{Z}_n(k) = E(Z_{n+k} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\})$$

$$= E((\phi_1 Z_{n+k-1} + \phi_2 Z_{n+k-2} + \cdots + \phi_\mathrm{p} Z_{n+k-\mathrm{p}} + a_{n+k}) \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\})$$

$$= E(\phi_1 Z_{n+k-1} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + E(\phi_2 Z_{n+k-2} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + \cdots$$
$$+ E(\phi_\mathrm{p} Z_{n+k-\mathrm{p}} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + E(a_{n+k} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\})$$

$$= \phi_1 E(Z_{n+k-1} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + \phi_2 E(Z_{n-k-2} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + \cdots$$
$$+ \phi_\mathrm{p} E(Z_{n+k-\mathrm{p}} \mid \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}) + 0$$

$$= \phi_1 \hat{Z}_n(k-1) + \phi_2 \hat{Z}_n(k-2) + \cdots + \phi_\mathrm{p} \hat{Z}_n(k-\mathrm{p}), \quad \mathrm{k} > \mathrm{p}\,. \tag{3.1.6}$$

Dapat dilihat bahwa nilai-nilai sesatan yang lalu tidak mengambil peranan apapun dalam perhitungan ini, karena proses itu tidak mempunyai suku *Moving Average* (MA). Wajah ramalan yang dihasilkan pada persamaan (3.1.6) selalu merupakan penyusutan geometrik dari observasi terakhir ke rata-rata proses itu. Untuk meyakinkan hal ini, Z_{n+k} akan ditulis dalam bentuk sesatan random berikut ini.

Dari persamaan (3.1.5) diperoleh:

$$Z_{n+k} - \phi_1 Z_{n+k-1} - \phi_2 Z_{n+k-2} - \cdots - \phi_{\mathrm{p}} Z_{n+k-\mathrm{p}} = a_{n+k}$$

$$\Leftrightarrow \ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_{\mathrm{p}} B^{\mathrm{p}}) Z_{n+k} = a_{n+k}$$

$$\Leftrightarrow \ \phi(B) Z_{n+k} = a_{n+k}. \qquad (3.1.7)$$

Bentuk persamaan (3.1.7) dapat ditulis sebagai suatu proses MA (∞) , yakni :

$$Z_{n+k} = \psi(B) a_{n+k} \quad \text{dengan } \psi(B) = \frac{1}{\phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots \qquad (3.1.8)$$

yang juga dapat ditulis sebagai:

$$Z_{n+k} = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) a_{n+k}$$

$$= a_{n+k} + \psi_1 a_{n+k-1} + \psi_2 a_{n+k-2} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{n+k-j} \qquad (3.1.9)$$

dengan $\psi_0 = 1$. Persamaan (3.1.9) tidak hanya berlaku untuk Z_t dengan nilai $t = n + k$ saja, tetapi berlaku untuk Z_t dengan nilai t berapapun, seperti $\{..., n+k-2, n+k-1, n+k, ...\}$. Dengan menggunakan persamaan (3.1.9) pada $\{Z_{n+k-1}, Z_{n+k-2}, ..., Z_{n+k-p}\}$ dan mensubstitusikannya pada persamaan (3.1.5), maka diperoleh:

$$Z_{n+k} = \phi_1 (a_{n+k-1} + \psi_1 a_{n+k-2} + \psi_2 a_{n+k-3} + \cdots + \psi_{\mathrm{p}-1} a_{n+k-\mathrm{p}} + \psi_{\mathrm{p}} a_{n+k-\mathrm{p}-1} + \psi_{\mathrm{p}+1} a_{n+k-\mathrm{p}-2}$$

$$+ \cdots + \psi_{k-2} a_{n+1} + \psi_{k-1} a_n + \psi_k a_{n-1} + \cdots) + \phi_2 (a_{n+k-2} + \psi_1 a_{n+k-3} + \psi_2 a_{n+k-4}$$

$$+ \cdots + \psi_{\mathrm{p}-2} a_{n+k-\mathrm{p}} + \psi_{\mathrm{p}-1} a_{n+k-\mathrm{p}-1} + \psi_{\mathrm{p}} a_{n+k-\mathrm{p}-2} + \cdots + \psi_{k-3} a_{n+1} + \psi_{k-2} a_n + \psi_{k-1} a_{n-1}$$

$$+\cdots)+\cdots+\phi_p(a_{n+k-p}+\psi_1 a_{n+k-p-1}+\psi_2 a_{n+k-p-2}+\cdots+\psi_{k-1-p}a_{n+1}+\psi_{k-p}a_n$$

$$+\psi_{k+1-p}a_{n-1}+\cdots)+a_{n+k}$$

$$=a_{n+k}+\phi_1 a_{n+k-1}+(\phi_1\psi_1+\phi_2)a_{n+k-2}+(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1+\phi_3)a_{n+k-3}+(\phi_1\psi_3+\phi_2\psi_2+\phi_3\psi_1$$

$$+\phi_4)a_{n+k-4}+\cdots+(\phi_1\psi_{p-1}+\phi_2\psi_{p-2}+\phi_3\psi_{p-3}+\phi_4\psi_{p-4}+\cdots+\phi_p)a_{n+k-p}+(\phi_1\psi_p$$

$$+\phi_2\psi_{p-1}+\phi_3\psi_{p-2}+\phi_4\psi_{p-3}+\cdots+\phi_p\psi_1)a_{n+k-p-1}+(\phi_1\psi_{p+1}+\phi_2\psi_p+\phi_3\psi_{p-1}+\phi_4\psi_{p-2}$$

$$+\cdots+\phi_p\psi_2)a_{n+k-p-2}+\cdots+(\phi_1\psi_{k-2}+\phi_2\psi_{k-3}+\cdots+\phi_p\psi_{k-1-p})a_{n+1}+(\phi_1\psi_{k-1}+\phi_2\psi_{k-2}$$

$$+\cdots+\phi_p\psi_{k-p})a_n+(\phi_1\psi_k+\phi_2\psi_{k-1}+\cdots+\phi_p\psi_{k+1-p})a_{n-1}+\cdots. \qquad (3.1.10)$$

Dari (3.1.9) dan (3.1.10) , diperoleh:

$$\psi_0=1 \qquad (3.1.11)$$

$$\psi_1=\phi_1$$

$$\psi_2=\phi_1\psi_1+\phi_2$$

$$\psi_3=\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1+\phi_3$$

$$\psi_4=\phi_1\psi_3+\phi_2\psi_2+\phi_3\psi_1+\phi_4$$

$$\vdots$$

$$\psi_p=\phi_1\psi_{p-1}+\phi_2\psi_{p-2}+\phi_3\psi_{p-3}+\phi_4\psi_{p-4}+\cdots+\phi_p$$

$$\psi_{p+1}=\phi_1\psi_p+\phi_2\psi_{p-1}+\phi_3\psi_{p-2}+\phi_4\psi_{p-3}+\cdots+\phi_p\psi_1$$

$$\psi_{p+2}=\phi_1\psi_{p+1}+\phi_2\psi_p+\phi_3\psi_{p-1}+\phi_4\psi_{p-2}+\cdots+\phi_p\psi_2$$

$$\vdots$$

$$\psi_{k-1}=\phi_1\psi_{k-2}+\phi_2\psi_{k-3}+\cdots+\phi_p\psi_{k-1-p}$$

$$\psi_k = \phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-\mathrm{p}}$$

$$\psi_{k+1} = \phi_1\psi_k + \phi_2\psi_{k-1} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k+1-\mathrm{p}}$$

$$\vdots$$

Misalkan $\hat{Z}_n(k)$ adalah suatu ramalan dari Z_{n+k} yang merupakan nilai ekspektasi Z_{n+k}. Jika diketahui runtun waktu yang lalu sampai waktu t-nya adalah $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$, maka:

$$\hat{Z}_n(k) = E(Z_{n+k} \left| \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}\right.)$$

$$= 0 + (\phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-\mathrm{p}})E(a_n \left| \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}\right.) + (\phi_1\psi_k$$

$$+ \phi_2\psi_{k-1} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k+1-\mathrm{p}})E(a_{n-1} \left| \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}\right.) + \cdots$$

$$= (\phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-\mathrm{p}})a_n + (\phi_1\psi_k + \phi_2\psi_{k-1} + \cdots$$

$$+ \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k+1-\mathrm{p}})a_{n-1} + \cdots. \quad (3.1.12)$$

Sesatan ramalan untuk k periode mendatang adalah sebagai berikut:

$$e_n(k) = Z_{n+k} - \hat{Z}_n(k)$$

$$= \{a_{n+k} + \phi_1 a_{n+k-1} + (\phi_1\psi_1 + \phi_2)a_{n+k-2} + (\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3)a_{n+k-3} + (\phi_1\psi_3 + \phi_2\psi_2$$

$$+ \phi_3\psi_1 + \phi_4)a_{n+k-4} + \cdots + (\phi_1\psi_{\mathrm{p}-1} + \phi_2\psi_{\mathrm{p}-2} + \phi_3\psi_{\mathrm{p}-3} + \phi_4\psi_{\mathrm{p}-4} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}})a_{n+k-\mathrm{p}}$$

$$+ (\phi_1\psi_{\mathrm{p}} + \phi_2\psi_{\mathrm{p}-1} + \phi_3\psi_{\mathrm{p}-2} + \phi_4\psi_{\mathrm{p}-3} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_1)a_{n+k-\mathrm{p}-1} + (\phi_1\psi_{\mathrm{p}+1} + \phi_2\psi_{\mathrm{p}} + \phi_3\psi_{\mathrm{p}-1}$$

$$+ \phi_4\psi_{\mathrm{p}-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_2)a_{n+k-\mathrm{p}-2} + \cdots + (\phi_1\psi_{k-2} + \phi_2\psi_{k-3} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-1-\mathrm{p}})a_{n+1}$$

$$+ (\phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-\mathrm{p}})a_n + (\phi_1\psi_k + \phi_2\psi_{k-1} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k+1-\mathrm{p}})a_{n-1}$$

$$+ \cdots \} - \{(\phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2} + \cdots + \phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-\mathrm{p}})a_n + (\phi_1\psi_k + \phi_2\psi_{k-1} + \cdots$$

$$+\phi_{\mathrm{p}}\psi_{k+1-\mathrm{p}})a_{n-1}+\cdots\}$$

$$=a_{n+k}+\phi_1 a_{n+k-1}+(\phi_1\psi_2+\phi_2)a_{n+k-2}+(\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1+\phi_3)a_{n+k-3}+(\phi_1\psi_3+\phi_2\psi_2$$

$$+\phi_3\psi_1+\phi_4)a_{n+k-4}+\cdots+(\phi_1\psi_{\mathrm{p}-1}+\phi_2\psi_{\mathrm{p}-2}+\phi_3\psi_{\mathrm{p}-3}+\phi_4\psi_{\mathrm{p}-4}+\cdots+\phi_{\mathrm{p}})a_{n+k-\mathrm{p}}$$

$$+(\phi_1\psi_{\mathrm{p}}+\phi_2\psi_{\mathrm{p}-1}+\phi_3\psi_{\mathrm{p}-2}+\phi_4\psi_{\mathrm{p}-3}+\cdots+\phi_{\mathrm{p}}\psi_1)a_{n+k-\mathrm{p}-1}+(\phi_1\psi_{\mathrm{p}+1}+\phi_2\psi_{\mathrm{p}}$$

$$+\phi_3\psi_{\mathrm{p}-1}+\phi_4\psi_{\mathrm{p}-2}+\cdots+\phi_{\mathrm{p}}\psi_2)a_{n+k-\mathrm{p}-2}+\cdots+(\phi_1\psi_{k-2}+\phi_2\psi_{k-3}+\cdots$$

$$+\phi_{\mathrm{p}}\psi_{k-1-\mathrm{p}})a_{n+1}. \tag{3.1.13}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.1.11) ke persamaan (3.1.13), maka persamaan (3.1.13) menjadi:

$$e_n(k)=a_{n+k}+\psi_1 a_{n+k-1}+\psi_2 a_{n+k-2}+\psi_3 a_{n+k-3}+\psi_4 a_{n+k-4}+\cdots+\psi_{\mathrm{p}} a_{n+k-\mathrm{p}}+\psi_{\mathrm{p}+1} a_{n+k-\mathrm{p}-1}$$

$$+\psi_{\mathrm{p}+2} a_{n+k-\mathrm{p}-2}+\cdots+\psi_{k-1} a_{n+1}. \tag{3.1.14}$$

Oleh karena $E(e_n(k))=0$, maka ramalannya tak bias. Sedangkan variansi dari sesatan ramalannya adalah:

$$\mathrm{var}(e_n(k))=\mathrm{var}(a_{n+k})+\psi_1^2\mathrm{var}(a_{n+k-1})+\psi_2^2\mathrm{var}(a_{n+k-2})+\psi_3^2\mathrm{var}(a_{n+k-3})+\psi_4^2\mathrm{var}(a_{n+k-4})$$

$$+\cdots+\psi_{\mathrm{p}}^2\mathrm{var}(a_{n+k-\mathrm{p}})+\psi_{\mathrm{p}+1}^2\mathrm{var}(a_{n+k-\mathrm{p}-1})+\psi_{\mathrm{p}+2}^2\mathrm{var}(a_{n+k-\mathrm{p}-2})$$

$$+\cdots+\psi_{k-1}^2\mathrm{var}(a_{n+1})$$

$$=\sigma_a^2+\psi_1^2\sigma_a^2+\psi_2^2\sigma_a^2+\psi_3^2\sigma_a^2+\psi_4^2\sigma_a^2+\cdots+\psi_{\mathrm{p}}^2\sigma_a^2+\psi_{\mathrm{p}+1}^2\sigma_a^2+\psi_{\mathrm{p}+2}^2\sigma_a^2$$

$$+\cdots+\psi_{k-1}^2\sigma_a^2$$

$$=\sigma_a^2(1+\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2+\psi_4^2+\cdots+\psi_{\mathrm{p}}^2+\psi_{\mathrm{p}+1}^2+\psi_{\mathrm{p}+2}^2+\cdots+\psi_{k-1}^2)$$

$$=\sigma_a^2\sum_{j=0}^{k-1}\psi_j^2 \tag{3.1.15}$$

dengan $\left\{\psi_j^2\right\}_{j=0}^{k-1}$ memenuhi persamaan (3.1.11).

Dengan demikian selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk Z_{n+k} yang dikonstruksi dengan menggunakan prosedur Box dan Jenkins (1976) adalah sebagai berikut:

$$\left[\hat{Z}_n(k) - z_{\alpha/2}\left(\sigma_a^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2\right)^{1/2}, \hat{Z}_n(k) + z_{\alpha/2}\left(\sigma_a^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2\right)^{1/2}\right]. \quad (3.1.16)$$

dengan $z_{\alpha/2}$ adalah nilai yang diperoleh dari tabel distribusi normal baku dengan peluang sebesar $(1-\alpha/2)$.

3.2 Metode Bootstrap Persentil dalam Menentukan Selang Kepercayaan untuk Peramalan Model Autoregresif

Misalkan runtun waktu $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$ memenuhi kondisi yang ada pada persamaan (3.1.1) dan (3.1.2). Dengan menggunakan nilai $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, ..., \hat{\phi}_\mathrm{p}\}$ yang merupakan suatu penaksir kuadrat terkecil untuk $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_\mathrm{p}\}$, nilai taksiran dari sesatan dapat dihitung sebagai berikut:

$$\hat{a}_t = Z_t - \hat{\phi}_1 Z_{t-1} - \hat{\phi}_2 Z_{t-2} - \cdots - \hat{\phi}_\mathrm{p} Z_{t-\mathrm{p}} \text{ untuk } t = \mathrm{p}+1, \mathrm{p}+2, ..., n. \quad (3.2.1)$$

Agar jumlah dari sesatan sama dengan nol sesuai dengan asumsi ekspektasi sesatan sama dengan nol, maka pemusatan terhadap nilai $\hat{a}_t$ perlu dilakukan, yakni:

$$\tilde{a}_t = \hat{a}_t - \frac{1}{T-\mathrm{p}} \sum_{t=\mathrm{p}+1}^{n} \hat{a}_t . \quad (3.2.2)$$

Selanjutnya F_a ditaksir oleh fungsi distribusi empiris $\hat{F}_a$ dengan memberikan peluang $\dfrac{1}{n-\mathrm{p}}$ pada $\tilde{a}_t$, yaitu:

$$\hat{F}_a : \text{peluang } \frac{1}{n-\mathrm{p}} \text{ pada } \tilde{a}_t \quad \text{untuk } t = \mathrm{p}+1, \mathrm{p}+2, \ldots, n . \qquad (3.2.3)$$

Suatu sampel bootstrap $a^*_{\mathrm{p}+1}, a^*_{\mathrm{p}+2}, \ldots, a^*_n$ yang berukuran $n-\mathrm{p}$ kemudian diambil secara acak dengan pengembalian dari distribusi $\hat{F}_a$, yakni:

$$\hat{F}_a \rightarrow (a^*_{\mathrm{p}+1}, a^*_{\mathrm{p}+2}, \ldots, a^*_n) . \qquad (3.2.4)$$

Runtun waktu bootstrap Z^*_t untuk proses AR(p) kemudian dihitung dengan mengikuti cara berulang balik (*recursive*) berikut ini:

$$Z^*_{\mathrm{p}+1} = \hat{\phi}_1 Z_{\mathrm{p}} + \hat{\phi}_2 Z_{\mathrm{p}-1} + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z_1 + a^*_{\mathrm{p}+1}$$

$$Z^*_{\mathrm{p}+2} = \hat{\phi}_1 Z^*_{\mathrm{p}+1} + \hat{\phi}_2 Z_{\mathrm{p}} + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z_2 + a^*_{\mathrm{p}+2}$$

$$\vdots$$

$$Z^*_{2\mathrm{p}+1} = \hat{\phi}_1 Z^*_{2\mathrm{p}} + \hat{\phi}_2 Z^*_{2\mathrm{p}-1} + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z^*_{\mathrm{p}+1} + a^*_{2\mathrm{p}+1}$$

$$Z^*_{2\mathrm{p}+2} = \hat{\phi}_1 Z^*_{2\mathrm{p}-1} + \hat{\phi}_2 Z^*_{2\mathrm{p}} + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z^*_{\mathrm{p}+2} + a^*_{2\mathrm{p}+2}$$

$$\vdots$$

$$Z^*_n = \hat{\phi}_1 Z^*_{n-1} + \hat{\phi}_2 Z^*_{n-2} + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z^*_{n-\mathrm{p}} + a^*_n . \qquad (3.2.5)$$

Persamaan (3.2.5) dapat juga ditulis sebagai:

$$Z^*_t = \hat{\phi}_1 Z^*_{t-1} + \hat{\phi}_2 Z^*_{t-2} + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z^*_{t-\mathrm{p}} + a^*_t \text{ untuk } t = \mathrm{p}+1, \mathrm{p}+2, \ldots, n \qquad (3.2.6)$$

di mana $Z^*_t = Z_t$ untuk $t = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$. Adapun model yang telah ditaksir ditunjukkan oleh:

$$Z_t^* = \hat{\phi}_1^* Z_{t-1}^* + \hat{\phi}_2^* Z_{t-2}^* + \cdots + \hat{\phi}_p^* Z_{t-p}^* + \hat{a}_t^* \text{ untuk } t = p+1, p+2, \ldots, n \qquad (3.2.7)$$

di mana $Z_t^* = Z_t$ untuk $t = 1, 2, \ldots, p$. Dari persamaan (3.2.7) diperoleh:

$$\hat{a}_t^* = Z_t^* - \hat{\phi}_1^* Z_{t-1}^* - \hat{\phi}_2^* Z_{t-2}^* - \cdots - \hat{\phi}_p^* Z_{t-p}^* \qquad (3.2.8)$$

dan

$$\sum_{t=p+1}^{n} \left(\hat{a}_t^*\right)^2 = \sum_{t=p+1}^{n} \left(Z_t^* - \hat{\phi}_1^* Z_{t-1}^* - \hat{\phi}_2^* Z_{t-2}^* - \cdots - \hat{\phi}_p^* Z_{t-p}^*\right)^2 . \qquad (3.2.9)$$

Nilai minimum dari jumlah kuadrat sesatan, $\sum_{t=p+1}^{n} (\hat{a}_t^*)^2$, dicapai dengan meminimumkan (mendeferensialkan) $\sum_{t=p+1}^{n} (\hat{a}_t^*)^2$ secara parsial terhadap $\hat{\phi}_1^*, \hat{\phi}_2^*, \ldots, \hat{\phi}_p^*$ dan menyamakan hasil yang diperoleh dengan nol, sehingga diperoleh taksiran kuadrat terkecil bootstrap $\underline{\hat{\phi}}^* = \underset{p\times 1}{\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^* \\ \hat{\phi}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p^* \end{bmatrix}}$ melalui persamaan:

$$\underline{\hat{\phi}}^* = (\underline{Z}^{*\,t} \underline{Z}^*)^{-1} \underline{Z}^{*\,t} \underline{A}^* \qquad (3.2.10)$$

di mana $\underline{Z}^* = \underset{(n-p)\times p}{\begin{bmatrix} Z_p^* & Z_{p-1}^* & \cdots & Z_1^* \\ Z_{p+1}^* & Z_p^* & \cdots & Z_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n-1}^* & Z_{n-2}^* & \cdots & Z_{n-p}^* \end{bmatrix}}$ dan $\underline{A}^* = \underset{(n-p)\times 1}{\begin{bmatrix} Y_{p+1}^* \\ Y_{p+2}^* \\ \vdots \\ Y_n^* \end{bmatrix}}$.

di mana persamaan (3.2.10) tersebut merupakan hasil penerapan persamaan normal (2.1.7.8) pada data bootstrap.

Dengan menggunakan $\{\hat{\phi}_1^*, \hat{\phi}_2^*, ..., \hat{\phi}_p^*\}$, nilai periode mendatang bootstrap dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$Z_{n+1}^* = \hat{\phi}_1^* Z_n + \hat{\phi}_2^* Z_{n-1} + \cdots + \hat{\phi}_p^* Z_{n+1-p} + a_{n+1}^* \quad (3.2.11)$$

$$Z_{n+2}^* = \hat{\phi}_1^* Z_{n+1}^* + \hat{\phi}_2^* Z_n + \cdots + \hat{\phi}_p^* Z_{n+2-p} + a_{n+2}^*$$

$$\vdots$$

Persamaan (3.2.11) dapat pula ditulis sebagai:

$$Z_{n+k}^* = \hat{\phi}_1^* Z_{n+k-1}^* + \hat{\phi}_2^* Z_{n+k-2}^* + \cdots + \hat{\phi}_p^* Z_{n+k-p}^* + a_{n+k}^* \text{ untuk } k = 1, 2, ... \quad (3.2.12)$$

di mana $Z_{t+k-j}^* = Z_{t+k-j}$ untuk $j \geq k$ dan a_{n+k}^* diambil secara acak dengan pengembalian dari distribusi $\hat{F}_a$.

Selang kepercayaan bootstrap persentil $100(1-\alpha)\%$ yang didefinisikan dengan persentil ke-$100(\alpha/2)$ dan ke-$100(1-\alpha/2)$ pada Z_{n+k}^* diberikan sebagai berikut:

$$Z_{n+k(lo)} = Z_{n+k}^{*(\alpha/2)}$$

$$Z_{n+k(up)} = Z_{n+k}^{*(1-\alpha/2)} \quad (3.2.13)$$

atau ditulis:

$$\left[Z_{n+k}^{*(\alpha/2)}, Z_{n+k}^{*(1-\alpha/2)} \right] \quad (3.2.14)$$

Untuk lebih memudahkan memahami masalah komputasi penentuan selang kepercayaan bootstrap persentil untuk peramalan model Autoregresif, berikut ini diberikan algoritmanya:

Algoritma Penentuan Selang Kepercayaan Bootstrap Persentil untuk Peramalan Model Autoregresif Orde-p (AR(p))

Misalkan: $$\underset{(n-\mathrm{p})\times\mathrm{p}}{\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{p}} & Z_{\mathrm{p}-1} & \cdots & Z_1 \\ Z_{\mathrm{p}+1} & Z_{\mathrm{p}} & \cdots & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n-1} & Z_{n-2} & \cdots & Z_{n-\mathrm{p}} \end{bmatrix}} \text{ dan } \underset{(n-\mathrm{p})\times 1}{\underline{A} = \begin{bmatrix} Z_{\mathrm{p}+1} \\ Z_{\mathrm{p}+2} \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}.$$

1. Hitung $\underset{(\mathrm{p}\times 1)}{\underline{\hat{\phi}} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{\mathrm{p}} \end{bmatrix}}$ taksiran kuadrat terkecil untuk $\underset{(\mathrm{p}\times 1)}{\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{\mathrm{p}} \end{bmatrix}}$ melalui persamaan:

$$\underline{\hat{\phi}} = (\underline{Z}^t \underline{Z})^{-1} \underline{Z}^t \underline{A}.$$

2. Hitung $\hat{a}_t$ nilai taksiran dari sesatan untuk $t = \mathrm{p}+1,\ldots,n$ melalui persamaan:

$$\hat{a}_t = Z_t - \hat{\phi}_1 Z_{t-1} - \hat{\phi}_2 Z_{t-2} - \cdots - \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z_{t-\mathrm{p}} \quad .$$

3. Pusatkan nilai taksiran dari sesatan tersebut:

$$\tilde{a}_i = \hat{a}_i - \bar{a} \text{ , dengan } \bar{a} = \frac{1}{n-\mathrm{p}} \sum_{i=\mathrm{p}+1}^{n} \hat{a}_i \ .$$

4. Ambil sebuah sampel bootstrap: $a^*_{\mathrm{p}+1}, a^*_{\mathrm{p}+2}, \ldots, a^*_n$ yang berukuran $n-\mathrm{p}$ secara acak dengan pengembalian dari distribusi empiris $\hat{F}_a$.

Hitung Z_t^* dengan rumus:

$$Z_t^* = \hat{\phi}_1 Z_{t-1}^* + \hat{\phi}_2 Z_{t-2}^* + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}} Z_{t-\mathrm{p}}^* + a_t^* \text{ untuk } t = \mathrm{p}+1, \mathrm{p}+2, \ldots, n$$

di mana $Z_t^* = Z_t$ untuk $t = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$.

5. Hitung $\underset{(\mathrm{p}\times 1)}{\underline{\hat{\phi}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^* \\ \hat{\phi}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{\mathrm{p}}^* \end{bmatrix}}$ taksiran kuadrat terkecil bootstrap melalui persamaan:

$$\underline{\hat{\phi}}^* = (\underline{Z}^{*\,t}\underline{Z}^*)^{-1}\underline{Z}^{*\,t}\underline{A}^*$$

di mana $\underline{Z}^* = \underset{(n-\mathrm{p})\times \mathrm{p}}{\begin{bmatrix} Z_{\mathrm{p}}^* & Z_{\mathrm{p}-1}^* & \cdots & Z_1^* \\ Z_{\mathrm{p}+1}^* & Z_{\mathrm{p}}^* & \cdots & Z_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n-1}^* & Z_{n-2}^* & \cdots & Z_{n-\mathrm{p}}^* \end{bmatrix}}$ dan $\underline{A}^* = \underset{(n-\mathrm{p})\times 1}{\begin{bmatrix} Z_{\mathrm{p}+1}^* \\ Z_{\mathrm{p}+2}^* \\ \vdots \\ Z_n^* \end{bmatrix}}$.

6. Hitung nilai k periode mendatang bootstrap dengan rumus:

$$Z_{n+k}^* = \hat{\phi}_1^* Z_{n+k-1}^* + \hat{\phi}_2^* Z_{n+k-2}^* + \cdots + \hat{\phi}_{\mathrm{p}}^* Z_{n+k-\mathrm{p}}^* + a_{n+k}^*$$

di mana $Z_{n+k-j}^* = Z_{n+k-j}$ untuk $j \geq k$ dan a_{n+k}^* diambil secara acak dengan pengembalian dari distribusi empiris $\hat{F}_a$.

7. Ulangi langkah (4), (5), dan (6) sebanyak B kali.

8. Tentukan selang kepercayaan bootstrap persentil $100(1-\alpha)\%$ untuk Z_{n+k}^* yang dinyatakan oleh:

$$\left[Z_{n+k}^{*(\alpha/2)}, Z_{n+k}^{*(1-\alpha/2)}\right].$$