BAB III

REGRESI LOGISTIK MULTINOMIAL

3.1 Pendahuluan

Regresi logistik multinomial adalah perluasan dari regresi logistik biner dan digunakan untuk menganalisis data respon yang memiliki lebih dari dua kategori. Karena variabel respon dalam regresi logistik multinomial memiliki lebih dari dua kategori, maka variabel respon tersebut mengikuti distribusi multinomial. Dengan demikian, berdasarkan definisi komponen acak pada subbab 2.3, komponen acak dari regresi logistik multinomial adalah distribusi multinomial.

Misal Y adalah sebuah variabel acak yang berdistribusi multinomial yang bisa mengambil salah satu dari J kategori. Diberikan himpunan data dengan ukuran sampel keseluruhan adalah N. Himpunan data yang ada dibagi ke dalam grup yang berbeda. Misal I menyatakan jumlah grup keseluruhan dan n_i menyatakan jumlah observasi dalam grup i untuk $i=1$ sampai I, dimana $\sum_{i=1}^{I} n_i = N$.

Perhatikan variabel acak $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{iJ})$, $j = 1, 2, ..., J$ yang menyatakan jumlah grup i yang jatuh dalam kategori $\text{ke} - j$. Peluang distribusi banyaknya Y_i dengan jumlah observasi n_i adalah

$$P\{Y_{i1} = y_{i1}, Y_{i2} = y_{i2}, ..., Y_{iJ} = y_{iJ}\} = \binom{n_i}{y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{iJ}} \pi_{i1}^{y_{i1}} \pi_{i2}^{y_{i2}} ... \pi_{iJ}^{y_{iJ}} \tag{3.1}$$

Dengan y_i menyatakan nilai pengamatan dari Y_i dan $\sum_{j=1}^{J} y_i = y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{iJ} = n_i$,

dan $\pi_{ij} = P\{Y_i = j\}$ dimana $0 < \pi_{ij} < 1$, $j = 1, 2, \ldots, J$ dan $\sum_{j=1}^{J} \pi_{ij} = 1$.

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari persamaan (3.1) adalah

$$f(y_{ij};\pi_{ij}) = \prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}} \cdot \prod_{j=1}^{J} \pi_{ij}^{\ y_{ij}}\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\left(\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} \pi_{ij}^{\ y_{ij}}\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\left(\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\ y_{ij}} \cdot \pi_{iJ}^{\ n_i - \sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}}\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\left(\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\ y_{ij}} \cdot \pi_{iJ}^{\ n_i - \sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}}\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\left(\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\ y_{ij}} \cdot \frac{\pi_{iJ}^{\ n_i}}{\pi_{iJ}^{\ \sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}}}\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\left(\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\ y_{ij}} \cdot \frac{\pi_{iJ}^{\ n_i}}{\prod_{j=1}^{J-1} \pi_{iJ}^{\ y_{ij}}}\right)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\left(\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1} \left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}\right)^{y_{ij}} \cdot \pi_{iJ}^{\ n_i}\right)$$

$$f(y_{ij};\pi_{ij}) = \pi_{iJ}^{\,n_i}\left[\prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i\,!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right)\right]\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J-1}\left[\exp\left(y_{ij}\ \mathrm{In}\left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}\right)\right)\right]$$

Persamaan terakhir ini memiliki bentuk persamaan eksponensial asli (2.4) dengan

$$y_i = y_{ij}\ \text{, dan}\ \theta_i = \pi_{ij},\ a(\pi_{ij}) = \pi_{iJ}^{\,n_i},\ b(y_{ij}) = \prod_{i=1}^{I}\left(\frac{n_i\,!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}}\right),\ \text{dan}\ Q(\pi_{ij}) = \mathrm{In}\left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}\right),$$

dimana $Q(\pi_{ij})$ merupakan parameter asli dari distribusi multinomial (lihat subbab (2.3).

Seperti model regresi logistik biasa, model regresi logistik multinomial memperlakukan satu variabel sebagai variabel respon dan satu atau lebih variabel yang lain sebagai variabel bebas. Variabel bebas dalam regresi logistik multinomial bisa berupa variabel bebas kontinu, kategori, atau keduanya. Dengan kata lain, variabel bebas dari regresi logistik multinomial adalah campuran. Berdasarkan definisi komponen sistematik pada subbab 2.3, maka komponen sistematik dari regresi logistik multinomial adalah variabel bebas campuran.

Variabel respon regresi logistik multinomial dibedakan menjadi variabel respon nominal dan variabel respon ordinal. Pada tugas akhir ini yang akan dibahas hanyalah regresi logistik multinomial dengan variabel respon nominal, yaitu variabel respon dimana kategorinya tidak terurut. Model regresi logistik multinomial yang digunakan untuk variabel respon nominal adalah model logit multinomial, dengan fungsi hubungan logit yang digeneralisasi.

3.2 Model Logit Multinomial

Model logit multinomial disebut juga model logit yang digeneralisasi. Model logit multinomial adalah model multi persamaan, karena variabel respon dengan J kategori akan menghasilkan $(J-1)$ persamaan logit.

Rodriguez (2007: 3) menyatakan bahwa untuk mengkonstruksi logit-logit dalam regresi logistik multinomial adalah memilih salah satu dari kategori variabel respon yang ada sebagai kategori dasar (*baseline-category*), dimana dalam perangkat lunak SPSS disebut sebagai *reference category*. Jika kategori dasar sudah dipilih, maka dapat dihitung log odds untuk semua kategori lain yang relatif terhadap kategori dasar tersebut dan kemudian memisalkan log oddsnya sebagai fungsi linear dari variabel bebasnya. Agresti (1996: 206) menyatakan bahwa pemilihan kategori dasar adalah sebarang, artinya dapat dipilih dari kategori pertama, terakhir, atau kategori lain selain kategori pertama dan terakhir. Walaupun pemilihan kategori dasarnya berbeda, bentuk modelnya akan sama, menghasilkan penaksiran parameter dan nilai duga (*fitted value*) yang sama. Hanya nilai dan interpretasi dari parameter-parameternya yang akan berubah.

Jika kategori terakhir yaitu J diambil sebagai kategori dasar dan odds yang akan dihitung adalah anggota grup $\text{ke}-i$ dan berada dalam kategori $\text{ke}-j$ yang relatif terhadap kategori dasarnya dan dinotasikan dengan $\left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}\right)$, maka logit-logit kategori dasarnya adalah

$$\text{In}\left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}\right), \quad j=1,2,\dots,J-1 \tag{3.2}$$

Misalnya, untuk $J=3$, logit-logitnya adalah $\text{In}\left(\frac{\pi_{i1}}{\pi_{i3}}\right)$ dan $\text{In}\left(\frac{\pi_{i2}}{\pi_{i3}}\right)$.

Misalkan $\pi_j(\mathbf{x}_i)$ menyatakan peluang variabel respon kategori j, pada grup ke$-i$ dari k variabel bebas $\mathbf{x}_i=(x_{i0},x_{i1},...,x_{ik})'$, $i=1,2,...,I$, dimana $x_{i0}=1$. Untuk penyederhanaan notasi, misalkan $\pi_{ij}=\pi_j(\mathbf{x}_i)$. Maka bentuk model logit multinomialnya adalah

$$\text{In}\left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}\right)=\text{In}\left(\frac{\pi_{ij}}{1-\sum_{j=1}^{J-1}\pi_{ij}}\right)=\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi},\qquad \begin{matrix} i=1,2,...,I \\ j=1,2,...,J-1 \end{matrix} \tag{3.3}$$

Dimana $\beta_{0j}=\alpha_j$ ketika $x_{0i}=1$, dan $p=0,1,...,k$. Persamaan (3.3) merupakan parameter asli dari distribusi multinomial (lihat subbab 3.1).

Jika persamaan (3.3) dieksponensialkan, maka akan diperoleh

$$\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}}=\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right) \tag{3.4}$$

Model pada persamaan (3.3) di atas terdiri dari $(J-1)$ persamaan logit, dengan nilai parameter tersendiri untuk setiap persamaan logit, yang merupakan pengaruh yang berbeda menurut kategori respon yang dibandingkan terhadap kategori dasarnya. Jika $J=2$, maka hanya ada satu persamaan logit yaitu $\text{In}\left(\frac{\pi_{i1}}{\pi_{i2}}\right)=\text{logit}(\pi_{i1})$, yang merupakan model regresi logistik untuk variabel respon biner.

Parameter untuk kategori dasar adalah nol atau $\beta_{pJ}=0$, karena

$$\text{In}\left(\frac{\pi_{iJ}}{\pi_{iJ}}\right) = \text{In}1 = 0 \tag{3.5}$$

Untuk menentukan nilai parameter dari kategori yang dibandingkan bukan dengan kategori dasarnya melainkan dengan kategori respon lain, maka nilai parameter tersebut dapat diperoleh dari nilai parameter kategori yang dibandingkan dengan kategori dasar dikurangi nilai parameter dari kategori yang dijadikan kategori dasar kategori tersebut. Sebagai contoh, untuk sebuah pasangan kategori sembarang a dan b,

$$\begin{aligned}
\text{In}\left(\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}\right) &= \text{In}\left(\frac{\pi_{ia}/\pi_{iJ}}{\pi_{ib}/\pi_{iJ}}\right) \\
&= \text{In}\left(\frac{\pi_{ia}}{\pi_{iJ}}\right) - \text{In}\left(\frac{\pi_{ib}}{\pi_{iJ}}\right) \\
&= \left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pa}x_{pi}\right) - \left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pb}x_{pi}\right) \\
&= \left(\alpha_a + \sum_{p=1}^{k}\beta_{pa}x_{pi}\right) - \left(\alpha_b + \sum_{p=1}^{k}\beta_{pb}x_{pi}\right) \\
&= (\alpha_a - \alpha_b) + \sum_{p=1}^{k}(\beta_{pa} - \beta_{pb})x_{pi}
\end{aligned}$$

Menaksir Peluang Respon Kategori

Model logit multinomial pada persamaan (3.3) dapat diekspresikan dalam bentuk peluang respon,

$$\pi_{ij} = \frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)} \tag{3.6}$$

dan peluang untuk kategori dasar adalah

$$\pi_{iJ} = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)} \tag{3.7}$$

Karena berdasarkan (3.5), parameter $\beta_{pJ} = 0$ dan $\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pJ}x_{pi}\right) = \exp 0 = 1$.

Penyebut persamaan (3.6) sama untuk setiap peluang j kategori, dan jika peluang-peluang untuk j kategori yang berbeda dijumlahkan dengan peluang kategori dasarnya, maka $\pi_{iJ} + \sum_{j=1}^{J-1}\pi_{ij} = 1$.

Persamaan (3.6) di atas diperoleh dari persamaan (3.4), dengan cara mengalikan kedua ruas persamaan (3.4) dengan π_{iJ}, sehingga diperoleh

$$\pi_{ij} = \pi_{iJ}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)$$

Dari persamaan (3.7), diketahui bahwa $\pi_{iJ} = \dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}$, sehingga

$$\pi_{ij} = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}\cdot\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)$$

$$= \frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}$$

Jadi, terbukti bahwa bentuk peluang respon kategori ke $-j$ untuk persamaan (3.3) adalah $\pi_{ij} = \dfrac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)}{1+\sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)}$

3.3 Rasio Odds pada Regresi Logistik Multinomial

Rasio odds kategori ke $-j$ terhadap kategori dasar J untuk nilai variabel bebas $x = a$ dan $x = b$ didefinisikan sebagai

$$\mathrm{OR}_j(a,b) = \frac{\pi_{ij}(a) / \pi_{iJ}(a)}{\pi_{ij}(b) / \pi_{iJ}(b)}$$

Dimana J kategori dasar dengan peluang π_{iJ} dan kategori ke $-j$ dengan peluang π_{ij}.

3.4 Penaksiran Kemungkinan Maksimum (*Maximum-Likelihood Estimation*)

Metode yang digunakan untuk menaksir parameter yang tidak diketahui pada regresi logistik adalah metode penaksir kemungkinan maksimum. Penggunaan metode ini disebabkan oleh variabel respon regresi logistik yang tidak berdistribusi normal. Taksiran parameter-parameter model regresi logistik diperoleh dengan memaksimumkan fungsi kemungkinan persamaan (3.1) dengan peluang π_{ij} yang dipandang sebagai fungsi parameter β_{pj} dalam persamaan (3.3). Fungsi kepadatan peluang gabungan dari persamaan (3.1) adalah:

$$f(Y_i \mid \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{J} y_{ij}} \cdot \prod_{j=1}^{J} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} \right) \tag{3.8}$$

Karena persamaan (3.8) akan dimaksimumkan terhadap $\boldsymbol{\beta}$, bentuk faktorial yang tidak memuat setiap π_{ij} dapat diperlakukan sebagai konstanta. Dengan demikian, kernel dari fungsi log kemungkinan untuk regresi logistik multinomial adalah:

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid Y_i) \simeq \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} \tag{3.9}$$

Karena $\prod_{j=1}^{J} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} = \prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} \cdot \pi_{iJ}^{\,n_i - \sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}}$, persamaan (3.9) menjadi:

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid Y_i) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} \cdot \pi_{iJ}^{\,n_i - \sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}} \tag{3.10}$$

$$= \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} \cdot \frac{\pi_{iJ}^{\,n_i}}{\pi_{iJ}^{\,\sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}}}$$

Karena $\pi_{iJ}^{\,\sum_{j=1}^{J-1} y_{ij}} = \pi_{iJ}^{\,y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{i(J-1)}} = \pi_{iJ}^{\,y_{i1}} \cdot \pi_{iJ}^{\,y_{i2}} \cdot \ldots \cdot \pi_{iJ}^{\,y_{i(J-1)}} = \prod_{j=1}^{J-1} \pi_{iJ}^{\,y_{ij}}$, maka

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid Y_i) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J-1} \pi_{ij}^{\,y_{ij}} \cdot \frac{\pi_{iJ}^{\,n_i}}{\prod_{j=1}^{J-1} \pi_{iJ}^{\,y_{ij}}}$$

$$= \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J-1} \left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{iJ}} \right)^{y_{ij}} \cdot \pi_{iJ}^{\,n_i} \tag{3.11}$$

Kemudian, substitusikan persamaan (3.4) dan (3.7), sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid y) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1}\left(\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right)^{y_{ij}} \cdot \left(\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}\right)^{n_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J-1}\left(\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right)^{y_{ij}} \cdot \left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right)^{-n_i} \qquad (3.12)$$

Dengan memberi In pada persamaan (3.12), diperoleh fungsi log kemungkinan untuk model regresi logistik multinomial,

$$\text{In } L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J-1}\left(y_{ij}\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right) - n_i \text{ In}\left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right) \qquad (3.13)$$

Dari sini, akan ditentukan nilai β_{pj} yang memaksimumkan fungsi log kemungkinan persamaan (3.13). Untuk memperoleh nilai β_{pj} yang memaksimumkan persamaan (3.13) akan digunakan metode Newton-Raphson, dengan terlebih dahulu menghitung turunan parsial pertama dan kedua persamaan (3.13) terhadap β_{pj} .

Turunana parsial pertamanya terhadap β_{pj} adalah

$$\frac{\partial \text{In } L(\beta)}{\partial \beta_{pj}} = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}x_{pi} - n_i \cdot \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_{pj}}\left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{I} y_{ij}x_{pi} - n_i \cdot \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)} \cdot \exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_{pj}}\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} y_{ij} x_{pi} - n_i \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi} \right)} \cdot \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi} \right) \cdot x_{pi}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} y_{ij} x_{pi} - n_i \cdot \frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi} \right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi} \right)} \cdot x_{pi}$$

Karena $\pi_{ij} = \dfrac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi} \right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi} \right)}$, maka

$$\frac{\partial \text{In } L(\beta)}{\partial \beta_{pj}} = \sum_{i=1}^{I} y_{ij} x_{pi} - n_i \pi_{ij} x_{pi} \tag{3.14}$$

Karena akan dicari nilai β_{pj} yang memaksimumkan fungsi log kemungkinan persamaan (3.13), maka persamaan (3.14) dijadikan sama dengan nol,

$$\frac{\partial \text{In } L(\beta)}{\partial \beta_{pj}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} x_{pi} - n_i \pi_{ij} x_{pi} = 0 \tag{3.15}$$

Persamaan kemungkinannya adalah

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} x_{pi} - n_i \hat{\pi}_{ij} x_{pi} = 0, \quad j = 1, 2, ..., J-1 \text{ dan } p = 0, 1, ..., k \tag{3.16}$$

Dimana $\hat{\pi}_{ij} = \dfrac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \hat{\beta}_{pj} x_{pi} \right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \hat{\beta}_{pj} x_{pi} \right)}$ menyatakan penaksir kemungkinan maksimum dari π_{ij}.

Turunan parsial keduanya terhadap $\beta_{p'j'}$ adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{pj}\partial\beta_{p'j'}} = \frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \sum_{i=1}^{I} y_{ij}x_{pi} - n_i\pi_{ij}x_{pi}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \sum_{i=1}^{I} -n_i\pi_{ij}x_{pi}$$

$$= -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \left(\frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)}{1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)} \right) \tag{3.17}$$

Perhatikan bahwa turunan pembilang dan penyebutnya berbeda bergantung pada apakah $j' = j$ atau tidak.

- Jika $j' = j$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right) = \exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\cdot x_{p'i}$$

- Jika $j' \neq j$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right) = 0 \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_{p'j'}} \left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right) = \exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj'}x_{pi}\right)\cdot x_{p'i}$$

Jika $j' = j$, maka turunan parsial kedua dalam persamaan (3.17) menjadi:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{pj}\partial\beta_{p'j'}} = -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \left(\frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\cdot x_{ip'}\left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right) - \exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\cdot x_{p'i}}{\left(1+\sum_{j=1}^{J-1}\exp\left(\sum_{p=0}^{k}\beta_{pj}x_{pi}\right)\right)^2} \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \left(\frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) \cdot x_{p'i} \left[1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) - \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) \right]}{\left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)\right)^2} \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \left(\frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)} \right) \left(\frac{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) - \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)} \right) x_{p'i}$$

$$= -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \left(\frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)} \right) \left(1 - \frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)} \right) x_{p'i}$$

$$= -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \pi_{ij} \left(1 - \pi_{ij}\right) x_{p'i} \tag{3.18}$$

Dan jika $j' \neq j$, maka turunan parsial kedua dalam persamaan (3.17) menjadi:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_{pj} \partial \beta_{p'j'}} = -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \left(\frac{0 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)\right) - \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) \cdot x_{p'i}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)\right)^2} \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \left(\frac{-\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right) \cdot x_{p'i}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj} x_{pi}\right)\right)^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \pi_{ij} \pi_{ij'} x_{p'i} \tag{3.19}$$

Jadi, turunan parsial kedua persamaan (3.13) terhadap $\beta_{p'j'}$ adalah:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_{pj} \partial \beta_{p'j'}} = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \pi_{ij} \left(1-\pi_{ij}\right) x_{p'i}, & \text{jika } j' = j \\ \sum_{i=1}^{I} n_i x_{pi} \pi_{ij} \pi_{ij'} x_{p'i}, & \text{jika } j' \neq j \end{cases} \tag{3.20}$$

Untuk j dan $j' = 1, 2, ..., J-1$ dan p dan $p' = 0, 1, 2, ..., k$.

Turunan parsial kedua ini diperlukan untuk memperoleh matriks informasi dan penaksir matriks kovarians dari penaksir kemungkinan maksimum.

Matriks informasi, $\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$, adalah matriks $2(k+1) \times 2(k+1)$ yang elemen-elemennya merupakan negatif dari persamaan (3.20). Secara umum, matriks $\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$ dapat ditulis sebagai,

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = -\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}_j\mathbf{X}\right) \tag{3.21}$$

Dimana $\mathbf{X}$ menyatakan matriks $I \times (k+1)$ yang memuat elemen $\left\{x_{ip}\right\}$, dan persamaan kemungkinan (3.16) memiliki bentuk,

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{m}}\right) \tag{3.22}$$

Dengan $\hat{m} = n_i \hat{\pi}_{ij}$. Sementara $\mathbf{V}_j$ adalah matriks diagonal $I \times I$ dengan elemen $n_i \hat{\pi}_{ij}\left(1-\hat{\pi}_{ij}\right)$ untuk $j' = j$ dan elemen $n_i \pi_{ij} \pi_{ij'}$ untuk $j' \neq j$, dan dinotasikan dengan

- Untuk $j' = j$

$$\mathbf{V}_j = -\mathbf{Diag}\left[n_i \hat{\pi}_{ij}\left(1-\hat{\pi}_{ij}\right)\right]$$

- Untuk $j' \neq j$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{Diag}\left[n_i \hat{\pi}_{ij} \hat{\pi}_{ij'} \right]$$

Penaksir matriks kovarians dari penaksir kemungkinan maksimum adalah invers dari matriks informasi,

$$\widehat{\text{Cov}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \widehat{\text{Var}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)^{-1} = \left[-\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}_j \mathbf{X} \right) \right]^{-1}$$

dimana

- Untuk $j' = j$

$$\widehat{\text{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \left\{ \mathbf{X}'\,\mathbf{Diag}\left[n_i \hat{\pi}_{ij} \left(1 - \hat{\pi}_{ij} \right) \right] \mathbf{X} \right\}^{-1} \tag{3.23}$$

- Untuk $j' \neq j$

$$\widehat{\text{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -\left\{ \mathbf{X}'\,\mathbf{Diag}\left[n_i \hat{\pi}_{ij} \hat{\pi}_{ij'} \right] \mathbf{X} \right\}^{-1} \tag{3.24}$$

Metode Newton-Raphson

Persamaan fungsi (3.15), (3.18), dan (3.19) merupakan fungsi-fungsi nonlinear dari penaksir kemungkinan maksimum $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, dan ketiga persamaan tersebut memerlukan suatu solusi iteratif. Metode iterasi yang digunakan untuk persamaan nonlinear adalah metode Newton-Raphson, yang mana metode ini menentukan nilai dimana suatu fungsi dimaksimumkan.

Metode ini dimulai dengan perkiraan awal untuk nilai yang memaksimumkan fungsi. Fungsi diaproksimasi oleh perkiraan awal tersebut dengan menggunakan polinom Taylor orde dua untuk memperoleh perkiraan kedua yang lebih dekat ke solusi. Kemudian fungsi diaproksimasi oleh perkiraan kedua dengan menggunakan polinom Taylor orde dua yang lain untuk memperoleh perkiraan ketiga yang lebih dekat lagi ke solusi. Demikian seterusnya hingga diperoleh perkiraan lain yang lebih mendekati solusi. Proses iterasi ini berlanjut sampai perkiraan lain tersebut konvergen ke solusi yang diharapkan.

Polinom Taylor orde n pada x_0, yaitu polinom orde ke-n P_n, yang bersama-sama dengan n turunannya yang pertama, bersesuaian dengan f dan turunan-turunannya pada $x = x_0$, yaitu

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (3.25)$$

Aproksimasi yang berpadanan adalah

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinom Taylor orde dua berdasarkan (3.25) di atas adalah

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad (3.26)$$

Misal fungsi yang akan dimaksimumkan adalah fungsi $g(\boldsymbol{\beta})$, dimana $g(\boldsymbol{\beta}) = \text{In}\, L(\boldsymbol{\beta})$, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dari $\boldsymbol{\beta}$ adalah nilai yang memaksimumkan fungsi tersebut. Jika persamaan dalam (3.22) dituliskan sebagai $g'(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{m})$ dan $g''(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta})$. Maka persamaan berikut analog dengan persamaan (3.26),

$$Q^{(t)}(\boldsymbol{\beta}) = g\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right) + g'\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right)\left(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}\right)' g''\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right)\left(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}\right)$$

Kemudian dengan menyelesaikan $\dfrac{\partial Q^{(t)}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$,

$g'\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right) + g''\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right)\left(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}\right) = 0$ yang menghasilkan perkiraan awal,

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - \left[g''\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right) \right]^{-1} g'\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right) \tag{3.27}$$

Karena $g'(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{m})$ dan $g''(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta})$ dan dari persamaan (3.21) diketahui bahwa $\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = -\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}_j\mathbf{X}\right)$, maka persamaan (3.27) dapat ditulis kembali sebagai

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - \left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}_j^{(t)}\mathbf{X}\right) \right]^{-1} \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(t)}\right) \tag{3.28}$$

dimana

- Untuk $j' = j$

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} + \left\{ \mathbf{X}'\,\mathbf{Diag}\left[n_i \pi_{ij}^{(t)} \left(1 - \pi_{ij}^{(t)}\right) \right] \mathbf{X} \right\}^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(t)}) \tag{3.29}$$

- Untuk $j' \neq j$

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - \left\{ \mathbf{X}'\,\mathbf{Diag}\left[n_i \pi_{ij}^{(t)} \pi_{ij'}^{(t)} \right] \mathbf{X} \right\}^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(t)}) \tag{3.30}$$

Dimana $m^{(t)} = n_i \pi_{ij}^{(t)}$, dan $\pi_{ij}^{(t)}$ merupakan aproksimasi ke$-t$ untuk π_{ij}, yang diperoleh dari $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ melalui

$$\pi_{ij}^{(t)} = \frac{\exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj}^{(t)} x_{ip} \right)}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\left(\sum_{p=0}^{k} \beta_{pj}^{(t)} x_{ip} \right)} \tag{3.31}$$

Misalkan $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ menyatakan vektor aproksimasi awal untuk setiap β_{pj}, maka langkah pertama dari metode Newton-Raphson berdasarkan persamaan (3.28) adalah

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}^{(0)} - \left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}_j^{(0)}\mathbf{X}\right) \right]^{-1} \mathbf{X}'\left(\mathbf{y} - \mathbf{m}^{(0)}\right)$$

Setelah menentukan perkiraan awal $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$, persamaan (3.31) dapat digunakan untuk memperoleh π_{ij}^{0}. Untuk $t > 0$, iterasi-iterasi berjalan dengan menggunakan persamaan (3.29) untuk $j' = j$ dan (3.30) untuk $j' \neq j$. Proses iterasi ini berjalan sampai tidak ada perubahan secara esensial di antara elemen-elemen $\boldsymbol{\beta}$ dari satu iterasi ke iterasi yang lain. Pada tahap ini, penaksir kemungkinan maksimum sudah dapat dikatakan konvergen. Menurut Walker dan Duncan (Agresti, 1990: 116), $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ dan $\pi_{ij}^{(t)}$ akan konvergen ke taksiran kemungkinan maksimum $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\hat{\pi}_{ij}$, matriks $\mathbf{I}\left(\boldsymbol{\beta}^{(t)}\right)$ akan konvergen ke matriks $\hat{\mathbf{I}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathbf{X}'\mathbf{Diag}\left[n_i\hat{\pi}_{ij}\left(1-\hat{\pi}_{ij}\right)\right]\mathbf{X}$ dan $\hat{\mathbf{I}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = -\mathbf{X}'\mathbf{Diag}\left[n_i\hat{\pi}_{ij}\hat{\pi}_{ij'}\right]\mathbf{X}$.

Kekonvergenan $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ mendekati $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dalam metode Newton-Raphson biasanya cepat. Untuk t yang besar, kekonvergenannya berlaku untuk setiap j.

$$\left|\beta_j^{(t+1)} - \hat{\beta}_j\right| \leq c\left|\beta_j^{(t)} - \hat{\beta}_j\right|^2 \quad \text{untuk beberapa } c > 0$$

dan ditunjukkan sebagai polinom orde dua. Metode Newton-Raphson hanya mengambil beberapa iterasi untuk mendapatkan kekonvergenan yang cukup untuk model regresi logistik.

3.5 Statistika Inferensial pada Model Regresi Logistik

Statistika inferensial adalah statistika yang dengan segala informasi dari sampel digunakan untuk menarik kesimpulan mengenai karakteristik populasi dari mana sampel itu diambil (Herrhyanto, 2003: 80). Statistika inferensial dalam regresi logistik berdasarkan pada uji perbandingan kemungkinan (*likelihood ratio* *test*) dan sifat-sifat tertentu penaksir kemungkinan maksimum. Penaksir kemungkinan maksimum dan uji perbandingan kemungkinan menggunakan sampel berukuran besar.

3.5.1 Uji Perbandingan Kemungkinan

Uji perbandingan kemungkinan dapat digunakan untuk membandingkan model lengkap (*full model*) dengan model yang direduksi (*reduced model*). Prosedur uji perbandingan kemungkinan membandingkan dua kali logaritma nilai fungsi kemungkinan untuk model lengkap $\left(2\ \text{In}\ L_2\right)$ terhadap dua kali logaritma nilai fungsi kemungkinan untuk model yang direduksi $\left(2\ \text{In}\ L_1\right)$ untuk memperoleh suatu statistik uji, yaitu

$$LR = 2\ \text{In}\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = -2\ \text{In}\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = -2\ \text{In}\ L_1 - \left(-2\ \text{In}\ L_2\right) \tag{3.32}$$

Untuk sampel yang berukuran besar, jika model yang direduksinya cocok, maka statistik uji LR mengikuti distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan, v. Adapun langkah-langkah pengujian untuk uji perbandingan kemungkinan adalah sebagai berikut:

1) Rumusan Hipotesis

   H_0 : parameter dalam model yang direduksi tidak berarti

   H_1 : parameter dalam model yang direduksi berarti

2) Besaran yang Diperlukan

   Hitung L_1 dan L_2

3) Statistik Uji, $LR = -2\ \text{In}\ L_1 - \left(-2\ \text{In}\ L_2\right)$

4) Kriteria Pengujian

Dengan mengambil taraf nyata α, maka H_0 ditolak jika $LR > \chi^2_{(1-\alpha,v)}$.

5) Kesimpulan

Penafsiran H_0 ditolak atau diterima.

3.5.2 Uji Kecocokan Model

Prosedur uji perbandingan kemungkinan juga dapat digunakan untuk menguji kecocokan model regresi logistik. Uji ini membandingkan model lengkap (model dengan variabel bebas) terhadap model yang hanya dengan konstanta (model tanpa variabel bebas), untuk melihat apakah model yang hanya dengan konstanta secara signifikan lebih baik dari model lengkap, dengan rumus

$$D = 2 \text{ In} \left(\frac{L_0}{L_2} \right) = -2 \text{ In} \left(\frac{L_2}{L_0} \right) = -2 \text{ In } L_2 - \left(-2 \text{ In } L_0 \right) \quad (3.33)$$

Dimana L_0 menyatakan fungsi kemungkinan untuk model yang hanya dengan konstanta. Statistik, D, dalam persamaan (3.33) disebut *deviance* oleh beberapa penulis dan memainkan suatu aturan penting dalam beberapa pendekatan untuk menaksir kecocokan model (Hosmer dan Lemeshow, 2000: 13). Adapun langkah-langkah pengujian untuk uji perbandingan kemungkinan adalah sebagai berikut:

1) Rumusan Hipotesis

H_0 : model yang hanya dengan konstanta cocok dengan data

H_1 : model yang hanya dengan konstanta tidak cocok dengan data

2) Besaran yang Diperlukan

Hitung L_0 dan L_2

3) Statistik Uji, $D = -2 \text{ In } L_2 - \left(-2 \text{ In } L_0\right)$

4) Kriteria Pengujian

Dengan mengambil taraf nyata α, maka H_0 ditolak jika $D > \chi^2_{(1-\alpha, v)}$.

5) Kesimpulan

Penafsiran H_0 ditolak atau diterima.

3.5.3 Uji Parameter pada Masing-Masing Model

Uji parameter pada masing-masing model, seperti

$$H_0 = \beta_{pj}, \quad H_1 \neq \beta_{pj} \tag{3.34}$$

dapat dikonduksi dengan menggunakan metode selisih dalam *deviance*. Selain itu, ada pendekatan lain yang juga berdasarkan pada teori penaksir kemungkinan maksimum. Untuk sampel berukuran besar, penaksir kemungkinan maksimum berdistribusi normal dengan penaksirnya sedikit bias atau tak bias. Varians dan kovarians dari penaksir kemungkinan maksimum dapat ditentukan dari turunan parsial kedua fungsi log kemungkinan parameter-parameter modelnya (lihat subbab 3.3). Maka suatu statistik seperti statistik uji$-t$ dapat dikonstruksi untuk menguji hipotesis (3.34). Uji ini kadang-kadang disebut sebagai uji Wald. Uji Wald digunakan ketika hanya ada satu parameter yang diuji. Statistik uji Wald dihitung dengan membagi parameter yang ditaksir oleh galat baku dari parameter yang ditaksir tersebut,

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{pj}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_{pj})}$$

dimana $\hat{\beta}_{pj}$ adalah penaksir β_{pj} dan $\widehat{SE}(\hat{\beta}_{pj})$ adalah penaksir galat baku β_{pj}. Statistik uji ini berdistribusi normal dalam ukuran sampel yang besar. Kuadrat dari statistik uji yang berdistribusi normal ini adalah statistik chi-kuadrat dengan derajat kebebasan, v sama dengan 1, yaitu

$$Z^2 = \left(\frac{\hat{\beta}_{pj}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_{pj})} \right)^2 \tag{3.35}$$

Langkah-langkah pengujian keberartian parameter regresi adalah:

1) Rumusan hipotesis

   $H_0 : \beta_{pj} = 0$ (parameter dalam model logit kategori ke $-\ j$ tidak berarti)

   $H_1 : \beta_{pj} \neq 0$ (parameter dalam model logit kategori ke $-\ j$ berarti)

2) Besaran yang diperlukan

   Hitung $\hat{\beta}_{pj}$ dan $\widehat{SE}(\hat{\beta}_{pj})$

3) Statistik uji, $Z^2 = \left(\frac{\hat{\beta}_{pj}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_{pj})} \right)^2$

4) Kriteria pengujian

   Dengan mengambil taraf nyata α, maka H_0 ditolak jika $Z^2 > \chi^2_{(1-\alpha,1)}$.

5) Kesimpulan

   Penafsiran H_0 ditolak atau diterima.