

### BAB III

#### METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL TRIPEL DARI WINTER

Metode pemulusan eksponensial telah digunakan selama beberapa tahun sebagai suatu metode yang sangat berguna pada begitu banyak situasi peramalan. Pada tahun 1957 C. C. Holt mengusulkan metode pemulusan eksponensial yang berlaku untuk data runtun waktu yang tidak memiliki unsur trend dan musiman. Kemudian pada tahun 1958 diusulkan suatu prosedur pemulusan eksponensial untuk data runtun waktu yang mengandung unsur trend yang kemudian biasa disebut metode dua-parameter dari Holt. Pada tahun 1965 Winters mengembangkan metode dua parameter dari Holt tersebut untuk kasus yang memiliki unsur musiman. Winters menambahkan operasi pemulusan ketiga (dan parameter ketiga) untuk unsur musiman. Metode pemulusan eksponensial triplel dari Winter lebih dikenal sebagai metode Holt-Winters.

Metode Holt-Winters dapat digunakan untuk data runtun waktu yang mengandung trend dan musiman. Metode ini terdiri atas dua model yaitu model aditif dan multiplikatif. Model multiplikatif digunakan apabila terdapat kecenderungan atau tanda bahwa pola musiman bergantung pada ukuran data. Dengan kata lain, pola musiman membesar seiring meningkatnya ukuran data. Sedangkan model aditif digunakan jika kecenderungan tersebut tidak terjadi. Pada kenyataan di lapangan, model multiplikatif lebih banyak dan lebih efektif dipakai.

Metode Holt-Winters didasarkan atas tiga unsur yaitu untuk unsur stasioner, trend dan musiman untuk setiap periode. Metode Holt-Winters

menggunakan tiga pembobotan atau parameter pemulusan yaitu  $\alpha, \beta$ , dan  $\gamma$  dimana parameter-parameter tersebut berada pada interval  $(0,1)$ .

Suatu bentuk persamaan dasar dari metode Holt-Winters dinyatakan oleh bentuk berikut:

$$X_{t+1} = (S_t + b_t) I_{t-L+1} + e_{t+1} \quad (3.1)$$

dimana  $S_t$  = nilai pemulusan keseluruhan data tidak musiman pada periode terakhir  $t$

$b_t$  = nilai pemulusan trend pada periode  $t$

$I_{t-L+1}$  = indeks pemulusan musiman untuk periode  $t-L+1$

$e_{t+1}$  = *error* pada periode  $t+1$

$X_{t+1}$  merupakan nilai aktual pada deret data, adalah nilai pemulusan keseluruhan  $S_t$  ditambahkan dengan taksiran untuk trend  $b_t$ , dikalikan dengan indeks musiman  $I_{t-L+1}$ . Ketiga komponen tersebut merupakan nilai taksiran dari data yang telah dimuluskan secara eksponensial hingga akhir periode  $t$ . Persamaan yang digunakan untuk mengestimasi komponen  $S_t, b_t, I_{t-L+1}$ , dan  $X_{t+1}$  adalah sebagai berikut:

$$S_t = \alpha \frac{X_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}), \quad (3.2)$$

$$b_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}, \quad (3.3)$$

$$I_t = \gamma \frac{X_t}{S_t} + (1-\gamma)I_{t-L}, \quad (3.4)$$

$$F_{t+m} = (S_t + b_t m) I_{t-L+m} \quad (3.5)$$

dimana

$X_t$  = nilai aktual pada akhir periode  $t$

$\alpha$  = konstanta pemulusan untuk  $S_t$

$S_t$  = nilai pemulusan keseluruhan

$\beta$  = konstanta pemulusan untuk menghitung trend ( $b_t$ )

$b_t$  = nilai pemulusan trend sampai periode  $t$

$I_{t-L}$  = indeks pemulusan musiman  $L$  periode yang lalu

$L$  = panjang siklus musiman

$\gamma$  = konstanta pemulusan untuk menghitung indeks musiman pada periode  $t$

$I_t$  = indeks pemulusan musiman pada akhir periode  $t$

$m$  = panjang waktu peramalan

$F_{t+m}$  = hasil peramalan pada periode  $t + m$

Persamaan (3.4) adalah pemulusan untuk indeks musiman yang merupakan rasio antara nilai aktual dari deret data  $X_t$ , dibagi dengan nilai pemulusan keseluruhan terbaru untuk deret data tersebut  $S_t$ . Jika  $X_t$  lebih besar dari  $S_t$ , maka rasio tersebut akan lebih besar dari 1, sedangkan jika  $X_t$  lebih kecil dari  $S_t$ , maka rasio itu akan lebih kecil dari 1. Untuk memahami metode ini perlu diperhatikan bahwa  $S_t$  merupakan nilai pemulusan (rata-rata) dari deret data yang

tidak termasuk unsur musiman. Dengan membagi  $X_t$  oleh  $S_t$ , dapat diperoleh taksiran untuk indeks musiman yang tidak dimuluskan untuk periode  $t$  yaitu sebagai berikut:

$$\frac{X_t}{S_t} = \frac{S_t I_t}{S_t} = I_t. \quad (3.6)$$

Perlu diperhatikan bahwa  $X_t$  mencakup adanya kerandoman dalam deret data. Untuk menghaluskan kerandoman ini, persamaan (3.4) memboboti faktor musiman yang dihitung paling akhir dengan  $\gamma$  dan angka musiman paling akhir pada musim yang sama dengan  $(1-\gamma)$ . Faktor musiman sebelum ini dihitung pada periode  $t-L$ , karena  $L$  adalah panjang musiman. Dengan demikian persamaan (3.4) ini dimuluskan sebagai berikut:

$$I_t = \gamma \frac{X_t}{S_t} + (1-\gamma) I_{t-L}.$$

Persamaan (3.3) tepat sama dengan persamaan (2.48) dari Holt untuk pemulusan trend. Sama seperti pada metode Holt dan metode Brown, persamaan (3.3) mengestimasi trend dengan memuluskan perbedaan antara nilai pemulusan  $S_t$  dan  $S_{t-1}$ . Hal ini untuk menaksir perubahan trend dari periode ke periode pada level  $X_t$ .

Persamaan (3.2) berbeda sedikit dengan persamaan (2.47) dari Holt di mana unsur pertamanya yaitu nilai aktual  $X_t$  dibagi dengan indeks musiman  $I_{t-L}$ . Hal ini dilakukan untuk menghilangkan musiman (mengeliminasi fluktuasi musiman) dari  $X_t$ . Penyesuaian ini dapat digambarkan dengan memperhatikan

kasus di mana  $I_{t-L}$  lebih besar dari 1, yang terjadi pada saat nilai periode  $t-L$  lebih besar daripada rata-rata dalam musimannya. Pembagian  $X_t$  dengan bilangan yang lebih besar dari 1 ini menghasilkan suatu nilai yang lebih kecil dari nilai semula. Persentase penurunan ini sama dengan banyaknya unsur musiman pada periode  $t-L$  yang lebih besar dari nilai rata-rata. Penyesuaian yang sebaliknya terjadi bilamana angka musiman lebih kecil dari 1. Nilai  $I_{t-L}$  digunakan dalam perhitungan ini karena  $I_t$  tidak dapat dihitung sebelum  $S_t$  diketahui dari persamaan (3.2). Oleh karena itu, pada metode ini diperlukan suatu proses penentuan nilai awal atau biasa disebut proses inisialisasi.

Alasan perlunya nilai awal untuk metode pemulusan eksponensial dapat dilihat dengan memeriksa persamaan pemulusan eksponensial tunggal sebagai berikut:

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha) F_t \quad (3.7)$$

dimana  $X_t$  adalah nilai aktual yang terbaru,  $F_t$  adalah ramalan yang terakhir,  $F_{t+1}$  adalah ramalan untuk satu periode mendatang, dan  $\alpha$  adalah konstanta pemulusan.

Bila  $t = 1$ , maka persamaan (3.7) menjadi

$$F_2 = \alpha X_1 + (1 - \alpha) F_1 \quad (3.8)$$

Untuk memperoleh nilai  $F_2$ ,  $F_1$  harus diketahui.

Nilai  $F_1$  adalah sebagai berikut:

$$F_1 = \alpha X_0 + (1 - \alpha) F_0 \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9) dapat dilihat bahwa  $X_0$  tidak tersedia sehingga  $F_0$  tidak dapat diperoleh. Masalah inilah sebenarnya yang dihadapi, nilai  $F_1$  dalam persamaan (3.8) harus diketahui untuk menghitung  $F_2$ , namun nilai tersebut tidak dapat diperoleh dari data yang ada. Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan lain untuk menaksir nilai awal  $F_1$  pada persamaan (3.8).

Dengan cara yang sama, nilai awal diperlukan untuk semua jenis pemulusan eksponensial termasuk pada metode pemulusan eksponensial triple dari Winter (metode Holt-Winters).

Proses penentuan nilai awal atau inisialisasi pada peramalan dengan metode Holt-Winters ini diperlukan paling sedikit satu kelompok data musiman lengkap yaitu  $L$  periode untuk menentukan estimasi awal dari indeks musiman  $I_{t-L}$ , dan perlu juga untuk menaksir faktor trend dari satu periode ke periode selanjutnya.

Beberapa metode yang dapat diterapkan untuk menentukan nilai awal (proses inisialisasi) pada metode Holt-Winters dapat diciptakan dan pengaruhnya terhadap ramalan berikutnya akan bergantung pada panjang deret waktu dan nilai dari ketiga parameternya. Metode tersebut antara lain sebagai berikut:

### **Model Inisialisasi 1**

Inisialisasi untuk pemulusan keseluruhan dapat ditentukan sebagai berikut:

$$S_L = \frac{1}{L}(X_1 + X_2 + \dots + X_L)$$

Sedangkan untuk menginisialisasi faktor trend digunakan waktu  $L+k$  periode.

$$b_L = \frac{1}{k} \left( \frac{X_{L+1} - X_1}{L} + \frac{X_{L+2} - X_2}{L} + \dots + \frac{X_{L+k} - X_k}{L} \right),$$

Jika runtun data cukup panjang maka baik jika mengambil  $k = L$  demikian sehingga data dari dua musim dapat digunakan. Akan tetapi, jika hal tersebut menimbulkan kesulitan, kita dapat menggunakan  $k = 1$ .

Inisialisasi untuk faktor musiman dapat ditentukan sebagai berikut:

$$I_k = \frac{X_k}{S_L}, \quad k = 1, 2, \dots, L$$

### Model Inisialisasi 2

Inisialisasi untuk pemulusan keseluruhan dapat ditentukan sebagai berikut:

$$S_{L+1} = X_{L+1}$$

dimana  $L$  adalah panjang musiman,

$$I_1 = X_1 / \bar{X}$$

$$I_2 = X_2 / \bar{X}$$

$$I_3 = X_3 / \bar{X}$$

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

$$I_L = X_L / \bar{X}$$

dimana

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^L \frac{X_i}{L}.$$

Inisialisasi faktor trend adalah sebagai berikut:

$$b_{L+1} = \frac{(X_{L+1} - X_1) + (X_{L+2} - X_2) + (X_{L+3} - X_3)}{L}.$$

Walaupun pada intinya hampir sama, tetapi akan dicari model terbaik yang diharapkan dapat diterapkan pada data yang diperoleh. Masalah lain dalam menggunakan metode Holt-Winters adalah menentukan nilai-nilai untuk ketiga parameter pemulusan yaitu  $\alpha$ ,  $\beta$ , dan  $\gamma$  yang meminimumkan ukuran *error*-nya dimana  $\alpha$ ,  $\beta$ , dan  $\gamma$  harus berada pada interval (0,1). Salah satu pendekatan yang digunakan penulis untuk menentukan kombinasi dari ketiga parameter ini adalah secara *trial and error*. Adapun untuk ukuran akurasinya digunakan *Mean Absolute Deviation* (MAD) dan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).

Sebagaimana telah diungkapkan sebelumnya bahwa metode Holt-Winters dibagi menjadi dua yaitu model multiplikatif dan model aditif. Berikut ini akan diuraikan model aditif dari metode pemulusan eksponensial triple dari Winter dengan bentuk dasar sebagai berikut:

$$S_t = \alpha(X_t - I_{t-L}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \quad (3.10)$$

$$b_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \quad (3.11)$$

$$I_t = \gamma(X_t - S_t) + (1-\gamma)I_{t-L} \quad (3.12)$$

$$F_{t+m} = S_t + b_t m + I_{t-L+m} \quad (3.13)$$

dimana  $L$  adalah panjang musiman.

Nilai awal untuk  $S_L$  dan  $b_L$  sama seperti pada kasus multiplikatif. Namun nilai awal awal untuk komponen musiman ditentukan sebagai berikut:

$$I_k = X_k - S_L, \quad k = 1, 2, \dots, L. \quad (3.14)$$



Karena metode Holt-Winters memodelkan data yang memiliki pola musiman, maka data yang diperlukan akan lebih banyak daripada jumlah data untuk metode pemulusan eksponensial tunggal dan ganda. Agar ukuran musiman memadai, data yang digunakan paling sedikit memiliki tiga musim dari data bulanan (36 bulan), empat atau lima dari data per empatan (16 sampai 20 data per empatan), atau tiga musim dari data mingguan (156 minggu) pada pola FAK dan FAKP-nya, sehingga metode ini dapat diterapkan dan mendapat hasil optimum.

Metode Holt-Winters memiliki kelebihan dibanding metode pemulusan eksponensial lainnya karena telah memodelkan trend, musiman dan kerandoman data melalui proses pemulusan eksponensial yang lebih efisien.

