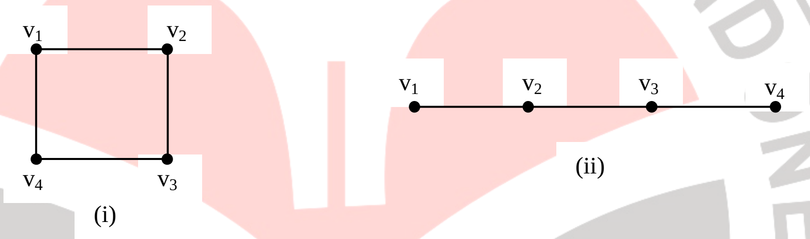
BAB III

PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER

3.1 Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada Graf Lintasan

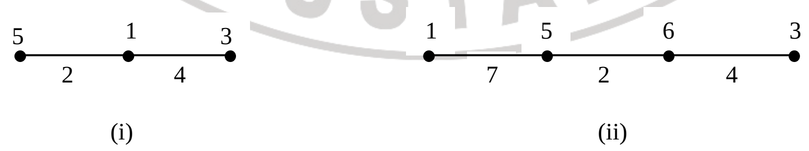
Sebuah graf lintasan P_n dapat diperoleh dari sebuah graf lingkaran C_n dengan cara menghilangkan satu buah sisinya. Sebagai contoh, gambar berikut ini merupakan graf lingkaran yang kemudian dihilangkan salah satu sisinya sehingga menjadi graf lintasan



Gambar 3.1 Graf Lingkaran C_4 dan Graf Lintasan P_4

Pada gambar 3.1, dengan menghilangkan salah satu sisi dari graf lingkaran C_4, misalnya sisi v_1v_4, maka akan diperoleh graf lintasan P_4.

Berikut ini contoh pelabelan total sisi-ajaib pada graf lintasan P_3 dan P_4.



Gambar 3.2 Dua Pelabelan Total Sisi-Ajaib pada Graf Lintasan

Pelabelan total sisi-ajaib pada graf lintasan P_3 dari gambar 3.2 mempunyai konstanta ajaib k = 8, sedangkan pada graf lintasan P_4 mempunyai k = 13.

Teorema 3.1 (Kotzig dan Rosa, 1970)

Setiap graf lintasan P_n adalah ajaib dengan $k = \frac{5n+2}{2}$ untuk n genap dan $k = \frac{5n+3}{2}$ untuk n ganjil.

Bukti :

Definisikan sebuah graf lintasan P_n dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. Kemudian labeli simpul dan sisi P_n dengan aturan sebagai berikut :

- Untuk n genap

  Labeli simpul :

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i = 1, 3, 5, \ldots, n-1 \\ \frac{i+n}{2}, & \text{jika } i = 2, 4, 6, \ldots, n \end{cases}$$

  Labeli sisi : $\lambda(v_iv_{i+1}) = 2n - i$

  perhatikan suatu sisi v_jv_{j+1}, dengan menggunakan aturan di atas, maka

$$\lambda(v_j) + \lambda(v_jv_{j+1}) + \lambda(v_{j+1}) = \frac{j+n}{2} + (2n - j) + \frac{j+2}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5n+2}{2}$$

  Dengan demikian graf lintasan P_n ajaib dengan $k = \frac{5n+2}{2}$. ■

- Untuk n ganjil

  Labeli simpul :

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i = 1, 3, 5, \dots, n \\ \frac{i+1+n}{2}, & \text{jika } i = 2, 4, 6, \dots, n-1 \end{cases}$$

  Labeli sisi : $\lambda(v_i v_{i+1}) = 2n - i$

  perhatikan suatu sisi $v_j v_{j+1}$, sehingga

$$\lambda(v_j) + \lambda(v_j v_{j+1}) + \lambda(v_{j+1}) = \frac{j+1}{n} + (2n - j) + \frac{j+2+n}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5n+3}{2}$$

  Dengan demikian graf lintasan P_n ajaib dengan $k = \frac{5n+3}{2}$. ■

Definisi 3.1 (Enomoto, dkk. 1998)

Pelabelan total sisi-ajaib pada graf G disebut super jika $\lambda(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$ dan $\lambda(E(G)) = \{|V| + 1, |V| + 2, |V| + 3, \dots, |V| + |E|\}$. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan total sisi-ajaib super dinamakan graf total sisi-ajaib super.

Teorema 3.2 (Kotzig dan Rosa, 1970), (Baskoro, dkk. 2005)

Setiap graf lintasan P_n adalah ajaib super dengan bilangan ajaib $k = \frac{5n+2}{2}$ untuk n genap dan $k_1 = \frac{5n+3}{2}$ dan $k_1' = k_2 = \frac{5n+1}{2}$ untuk n ganjil.

Bukti :

Definisikan sebuah graf lintasan P_n dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. Kemudian labeli simpul dan sisi P_n dengan aturan sebagai berikut :

- Untuk n genap

  Labeli simpul:

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, \text{jika } i = 1, 3, 5, \ldots, n-1 \\ \frac{i+n}{2}, \text{jika } i = 2, 4, 6, \ldots, n \end{cases}$$

  labeli sisi: $\lambda(v_iv_{i+1}) = 2n - i$

  kemudian perhatikan sebuah sisi v_jv_{j+1}, sehingga

$$\lambda(v_j) + \lambda(v_jv_{j+1}) + \lambda(v_{j+1}) = \frac{j+n}{2} + (2n - j) + \frac{j+2}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5n+2}{2}$$

  Graf lintasan P_n ajaib super dengan konstanta $k = \frac{5n+2}{2}$. ■

- Untuk n ganjil dengan k_1

  Labeli simpul:

$$\lambda_1(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, \text{jika } i = 1, 3, 5, \ldots, n \\ \frac{i+1+n}{2}, \text{jika } i = 2, 4, 6, \ldots, n-1 \end{cases}$$

  labeli sisi: $\lambda_1(v_iv_{i+1}) = 2n - i$

  kemudian perhatikan sebuah sisi v_jv_{j+1}

$$\lambda(v_j) + \lambda(v_jv_{j+1}) + \lambda(v_{j+1}) = \frac{j+1}{2} + (2n - j) + \frac{j+2+n}{2} = k_1$$

$$\Leftrightarrow k_1 = \frac{5n+3}{2}$$

Graf lintasan P_n ajaib super dengan konstanta $k = \frac{5n+3}{2}$. ■

- Untuk n ganjil dengan k_2

Labeli simpul:

$$\lambda_2(v_i) = \begin{cases} \frac{i+n}{2}, \text{jika } i = 1, 3, 5, \ldots, n \\ \frac{i}{2}, \text{jika } i = 2, 4, 6, \ldots, n-1 \end{cases}$$

labeli sisi: $\lambda_2(v_i v_{i+1}) = 2n - i$

perhatikan sebuah sisi $v_j v_{j+1}$

$$\lambda(v_j) + \lambda(v_j v_{j+1}) + \lambda(v_{j+1}) = \frac{j+n}{2} + (2n - j) + \frac{j+1}{2} = k_2$$

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{5n+1}{2}$$

Graf lintasan P_n adalah ajaib dengan $k_2 = \frac{5n+1}{2}$. ■

Lemma 3.1 (Figueroa-Centeno, 2001)

Graf G = (V(G), E(G)) dengan |V(G)| = p dan |E(G)| = q adalah total sisi-ajaib super jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif $\lambda : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., p\}$, sedemikian sehingga himpunan $S = \{ \lambda(x) + \lambda(y) \mid xy \in E(G)\}$ terdiri dari bilangan bulat positif berurutan. Dalam hal ini λ dapat diperluas menjadi suatu pelabelan total sisi-ajaib super dari G dengan konstanta ajaib k = p + q + s, dengan s = min(S) dan S = {k – (p +1), k – (p + 2), ..., k – (p + q)}.

Bukti :

($\Rightarrow$) jika G merupakan graf total sisi-ajaib super dan λ adalah suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada G dengan konstanta ajaib k, maka $S = \{k - \lambda(xy) \mid xy \in E(G)\} = \{k - (p + 1), k - (p + 2), ..., k - (p + q)\}$.

($\Leftarrow$) asumsikan bahwa fungsi λ ada dan misalkan $s = \min(S) = \min\{ \lambda(x) + \lambda(y) \mid xy \in E(G)\}$. Perluas λ sehingga domainnya menjadi $V(G) \cup E(G)$ dengan cara mendefinisikan $\lambda(xy) = p + q + s - \lambda(x) - \lambda(y)$ untuk setiap sisi xy di G. Diperoleh $\lambda(E(G)) = \{p + 1, p + 2, ..., p + q\}$ dan $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = p + q + s$. ■

Berikut ini dua lemma yang bisa digunakan untuk menemukan pola pelabelan total sisi-ajaib super dari sebuah graf dan menentukan pelabelan dual dari suatu pelabelan total sisi-ajaib super.

Lemma 3.2 (Baskoro, dkk. 2005)

Jika $G = (V(G), E(G))$ adalah sebuah graf total sisi-ajaib super dengan banyak simpul p dan banyak sisi q, maka konstanta ajaib k dari graf G akan memenuhi $p + q + 3 \leq k \leq 3p$.

Bukti :

Jika G adalah graf total sisi-ajaib super, maka simpul-simpul dari G akan menerima label 1, 2, 3, ..., p dan sisi-sisinya akan menerima label p + 1, p + 2, ..., p + q. Sehingga berdasarkan lemma 3.1, $S = \{ \lambda(x) + \lambda(y) \mid xy \in E(G)\}$ terdiri dari bilangan bulat terurut a, a + 1, a + 2, ..., a + (q – 1) untuk suatu bilangan bulat positif a. Konstanta ajaib terkecil dari G akan tercapai jika a = 3. Jika a = 3, maka simpul-simpul dari G akan dilabeli 1 dan 2, dimana simpul-simpul ini ajasen, sedangkan konstanta ajaibnya adalah k = (a + q – 1) + (p + 1) = p + q + 3. Jika label p – 1 dan p saling ajasen di G, maka akan didapat kemungkinan konstanta ajaib yang terbesar dari G yaitu k = (p – 1) + (p + 1) + p = 3p, sehingga didapat $p + q + 3 \leq k \leq 3p$. ■

Lemma 3.3 (Baskoro, dkk. 2005)

Jika λ adalah suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf G dengan konstanta ajaib k, maka fungsi $\lambda' : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., p + q\}$ yang didefinisikan :

$$\lambda'(x) = \begin{cases} p + 1 - \lambda(x) & ,\text{jika } x \in V(G) \\ 2p + q + 1 - \lambda(x), & \text{jika } x \in E(G) \end{cases}$$

juga merupakan suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf G dengan konstanta ajaib k’ = 4p + q + 3 – k.

Pelabelan λ’ ini kemudian dinamakan pelabelan dual super dari pelabelan total sisi-ajaib super pada graf G.

Bukti :

Misalkan xy ∈ E(G), maka λ’(x) + λ’(xy) + λ’(y) = (p + 1 – λ(x)) + (2p + q + 1 – λ(xy)) + (p + 1 – λ(y)) = 4p + q + 3 – (λ(x) + λ(xy) + λ(y)) = 4p + q + 3 – k. ■

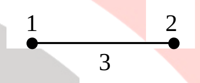
Berdasarkan definisi, teorema, dan lemma yang mendukung pelabelan total sisi-ajaib super yang telah diungkapkan pada paragraf-paragraf sebelumnya, disertai dengan bukti-bukti, maka pengonstruksian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan bisa dilakukan.

Pada bagian ini akan dilakukan pengonstruksian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan tertentu.

Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada P_2 dengan Dualitas Pelabelannya

Untuk pembahasan selanjutnya graf lintasan didefinisikan memiliki jumlah simpul p dan jumlah sisi q, sehingga untuk graf lintasan P_2 memiliki p = 2 dan q = 1.

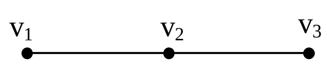
Berdasarkan teorema 3.2 nilai k untuk pelabelan total sisi-ajaib super (PTSAS) pada P_2 adalah 6, k = 6. Jika mengacu pada lemma 3.2, maka didapat k = 6, sehingga PTSAS untuk P_2 hanya satu, yaitu dengan memberi label pada kedua simpulnya dengan label 1 dan 2, sedangkan sisinya diberi label 3.



PTSAS pada P_2 memiliki pelabelan dual super yaitu PTSAS dengan k' = 6. Ini berarti pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_2 adalah dirinya sendiri, yang selanjutnya dinamakan pelabelan *self-dual*. Pelabelan *self-dual* tidak berbeda dengan pelabelan asalnya, sehingga tidak memunculkan pelabelan yang baru.

Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada P_3 dengan Dualitas Pelabelannya

Untuk P_3, p = 3 dan q = 2. Adapun gambar P_3 sebelum dilabeli secara total sisi-ajaib super adalah sebagai berikut :



Berdasarkan lemma 3.2 diperoleh nilai konstanta ajaib $8 \leq k \leq 9$. Jika mengacu pada teorema 3.2, maka didapat $k_1 = 9$ dan $k_2 = 8$. Berarti terdapat dua nilai konstanta ajaib yang masing-masing membentuk PTSAS pada P_3.

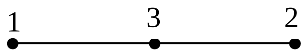
- Untuk $k_1 = 9$

Tidak seperti PTSAS pada P_2, yang susunan label pada simpulnya tidak perlu dikonstruksi, PTSAS pada P_3, dan P_n selanjutnya, harus ditentukan susunan label pada simpul-simpulnya berdasarkan ajasensi antar simpul-simpul pada graf tersebut. Untuk menentukan ajasensi antar simpul sekaligus ajasensi antar label simpulnya bisa dibantu dengan menggunakan lemma 3.1.

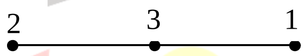
Berdasarkan lemma 3.1 diketahui bahwa S adalah himpunan jumlah label simpul yang saling ajasen. Karena label untuk sisinya adalah 4 dan 5, maka diperoleh S untuk P_3 adalah $S(P_3) = \{9 - 4, 9 - 5\}$, $S(P_3) = \{5, 4\}$. Untuk selanjutnya didefinisikan $S = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_q\}$, maka $S(P_3) = \{5, 4\} = \{s_1, s_2\}$.

- $s_1 = 5 = (2, 3)$, artinya pasangan label simpul yang ajasen yang mungkin untuk s_1 adalah label 2 dan label 3. Disini urutan penulisan tidak berpengaruh, artinya pasangan label (2, 3) akan tepat sama dengan pasangan label (3, 2). Pengertian seperti ini akan berlaku dan digunakan untuk seterusnya pada bahasan ini. Karena kemungkinan untuk $s_1 = 5$ hanya satu pada P_3 ini, maka label 2 haruslah ajasen dengan label 3.
- $s_2 = 4 = (1, 3)$, karena kemungkinan pasangan label simpul yang ajasen pada s_2 hanya satu, maka label 1 harus ajasen dengan label 3. Ini artinya label 3 harus berderajat dua, sedangkan simpul yang berderajat dua pada P_3 adalah v_2, oleh karena itu v_2 akan dilabeli dengan 3, sedangkan label untuk v_1 dan v_3

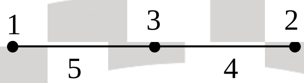
adalah 1 atau 2. Misalkan label untuk v_1 adalah 1 dan label untuk v_3 adalah 2 maka gambar pelabelan akan menjadi seperti berikut :



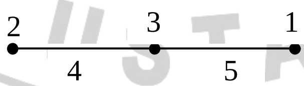
jika label untuk v_1 adalah 2 dan label untuk v_3 adalah 1 maka gambar pelabelan akan menjadi seperti berikut :



Terakhir, tinggal melengkapi dengan label-label sisinya supaya terbentuk gambar utuh PTSAS pada P_3. Cara melabeli sisi-sisinya mudah, berdasarkan definisi PTSAS, maka $k - \lambda(v_i) - \lambda(v_{i+1})$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, p$, adalah label untuk sisi-sisinya. Dengan menggunakan cara tersebut, maka didapat gambaran utuh dua PTSAS pada P_3 sebagai berikut



dan

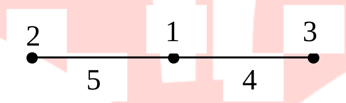


Kedua pelabelan tersebut adalah pelabelan yang sama, sehingga bisa diambil salah satunya saja. Pada pembahasan selanjutnya pun, jika ada dua pelabelan yang sama, maka akan diambil salah satunya saja.

Pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_3 dengan k_1 = 9 adalah PTSAS dengan k_1' = 8. Dengan demikian PTSAS pada P_3 dengan k_2 = 8 adalah pelabelan dual super dari PTSAS pada P_3 dengan k_1 = 9.

➢ Untuk k_2 = 8

Himpunan label simpul $\lambda(V(P)) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p\}$, $\lambda(v_i) = a_i$, dengan i = 1, 2, 3,...p. Maka himpunan label simpul untuk PTSAS pada P_3 dengan k_1 = 9 adalah $\lambda(V(P_3)) = \{2, 3, 1\}$. Berdasarkan lemma 3.3, maka himpunan label simpul untuk pelabelan dual supernya adalah $\lambda'(V(P_3)) = \{2, 1, 3\}$. Yang ditulis merupakan pelabelan simpulnya saja, karena pelabelan sisi mengikuti pelabelan simpulnya. Secara lengkap gambar pelabelannya sebagai berikut



Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada P_4 dengan Dualitas Pelabelannya

Pada P_4, p = 4 dan q = 3. Gambar P_4 sebelum dilabeli adalah sebagai berikut :

Berdasarkan teorema 3.2 graf lintasan P_4 adalah graf total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib k = 11. Label-label untuk sisi-sisinya adalah 5, 6, dan 7, sehingga $S(P_4) = \{11 - 5, 11 - 6, 11 - 7\} = \{6, 5, 4\} = \{s_1, s_2, s_3\}$

$s_1 = 6 = (2, 4)$

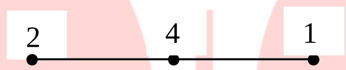
$s_2 = 5 = (1, 4); (2, 3)$

$s_3 = 4 = (1, 3)$

Dari keterangan tersebut, dapat dikonstruksi sebuah PTSAS pada P_4 dengan langkah-langkah sebagai berikut :

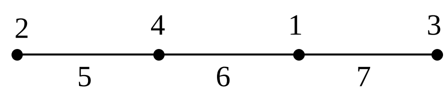
❖ Pada s_1 jelas, label 2 harus ajasen dengan label 4.

❖ Pada s_2 ada dua kemungkinan. Kemungkinan pertama, jika diambil pasangan label (1, 4), maka label 4 juga ajasen dengan label 1, akibatnya label 4 harus ditempatkan pada simpul yang berderajat dua.

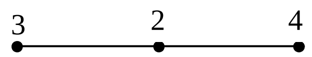


❖ Pada s_3, label 1 harus ajasen dengan label 3, ini artinya label 1 juga harus ditempatkan pada simpul berderajat dua. Ada dua simpul yang berderajat dua, sehingga tepat akan ditempati oleh label 1 dan label 4, sedangkan dua simpul lainnya akan labeli oleh 2 dan 3 dengan ketentuan label 2 ajasen dengan label 4 sedangkan label 3 ajasen dengan label 1, sehingga didapat pelabelan pada P_4.

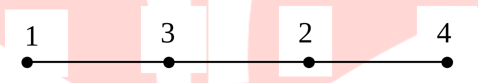
Secara lengkap, gambaran utuh PTSAS pada P_4 adalah sebagai berikut :



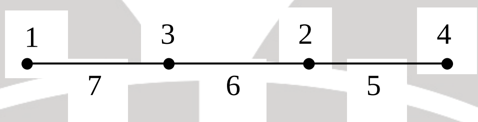
- Kemungkinan kedua pada s_2 , jika diambil pasangan label (2, 3), maka label 2, selain ajasen dengan label 4 juga ajasen dengan label 3, akibatnya label 2 yang harus ditempatkan pada simpul yang berderajat dua.



- Pada s_3, label 3 ajasen dengan label 1. Sekarang label yang harus ditempatkan pada simpul berderajat dua adalah label 2 dan 3, sedangkan label 1 dan 4 menempati dua simpul lainnya, dengan ketentuan label 1 ajasen dengan label 3, sedangkan label 4 ajasen dengan label 2, sehingga didapat pelabelan yang kedua pada P_4.



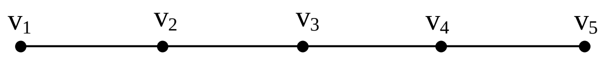
Secara lengkap, gambaran utuh PTSAS pada P_4 adalah sebagai berikut :



Pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_4 dengan k = 11 adalah PTSAS dengan k' = 11. Berarti (sama seperti pada P_2) pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_4 adalah pelabelan *self-dual*.

Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada P_5 dengan Dualitas Pelabelannya

Pada P_5, p = 5 dan q = 4. Gambaran P_5 sebelum dilabeli adalah sebagai berikut :



Berdasarkan teorema 3.2, P_5 adalah graf total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k_1 = 14$ dan $k_2 = 13$. Berarti terdapat dua konstanta ajaib yang masing-masing akan membentuk PTSAS pada P_5.

- Untuk $k_1 = 14$

Label-label sisinya adalah 6, 7, 8, dan 9. Sehingga diperoleh $S(P_5) = \{8, 7, 6, 5\}$.

$s_1 = 8 = (3, 5)$

$s_2 = 7 = (2, 5); (3, 4)$

$s_3 = 6 = (1, 5); (2, 4)$

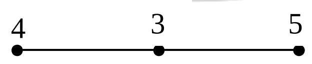
$s_4 = 5 = (1, 4); (2, 3)$

Dari keterangan di atas, terdapat beberapa kemungkinan pasangan label untuk label-label simpulnya, sehingga setelah dikonstruksi akan membentuk PTSAS pada P_5.

Berikut uraiannya :

- Pada s_1 jelas, label 3 harus ajasen dengan label 5.

- Pada s_2 ada dua kemungkinan, misal diambil pasangan label (3, 4), ini berarti label 3 ditempatkan pada simpul yang berderajat dua, akibatnya label 4 tidak akan ajasen dengan label 5.

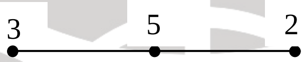


- Pada s_3 juga terdapat dua kemungkinan, misal diambil pasangan label (1, 5), berarti label 5 juga ditempatkan pada simpul berderajat dua.

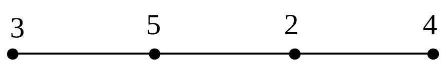
Tetapi jika ini terjadi, tidak akan terbentuk PTSAS, karena pada s_4 dua kemungkinan pasangan label, (1, 4) dan (2, 3), keduanya tidak mungkin terjadi karena label 1 dan label 4 sudah terpisah (seperti terlihat pada gambar), sedangkan label 3 sudah ditempatkan pada simpul berderajat dua, sehingga tidak mungkin ajasen dengan label 2. Jadi pada s_3 ambil pasangan label (2, 4). Berarti sekarang label 4 yang ditempatkan pada simpul berderajat dua.

Tetapi, pelabelan ini juga tidak akan membentuk PTSAS, karena pada s_4 tidak mungkin mengambil pasangan label (1, 4) karena label 4 sudah ditempatkan pada simpul berderajat dua, sedangkan jika mengambil pasangan label (2, 3) pun tidak mungkin, karena label 2 dan 3 sudah dipisahkan oleh label 4. Dengan demikian letak kesalahannya adalah pada pengambilan pasangan label pada s_2.

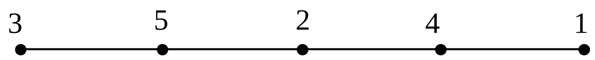
❖ Pada s_2 diambil pasangan label (2, 5). Berarti label 5 ditempatkan pada simpul berderajat dua.



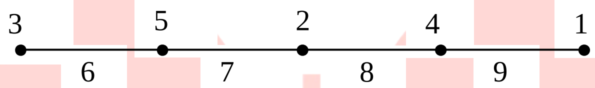
❖ Kemudian pada s_3, karena tidak mungkin mengambil pasangan label (1, 5), maka diambil pasangan label (2, 4), artinya label 2 pun ditempatkan pada simpul berderajat dua.



- Selanjutnya pada s_4 tidak mungkin mengambil pasangan label (2, 3), karena label 3 dengan label 2 sudah dipisahkan oleh label 5, sehingga diambil pasangan label (1, 4).



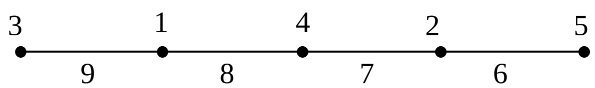
- Sekarang tinggal dilengkapi dengan label-label sisinya supaya terbentuk gambar utuh PTSAS pada P_5. Akhirnya terbentuklah PTSAS pada P_5, dengan gambaran utuh sebagai berikut :



Pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_5 dengan $k_1 = 14$ adalah PTSAS dengan $k_1' = 13$. Dengan demikian PTSAS pada P_5 dengan $k_2 = 13$ adalah pelabelan dual super dari PTSAS pada P_5 dengan $k_1 = 14$.

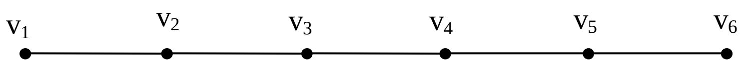
- Untuk $k_2 = 13$

Himpunan label simpul untuk PTSAS pada P_5 dengan $k_1 = 14$ adalah $\lambda(V(P_5)) = \{3, 5, 2, 4, 1\}$. Berdasarkan lemma 3.3, himpunan label simpul untuk pelabelan dual supernya adalah $\lambda'(V(P_5)) = \{3, 1, 4, 2, 5\}$. Secara lengkap gambar pelabelannya adalah sebagai berikut :



Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada P_6 dengan Dualitas Pelabelannya

Pada P_6, p = 6 dan q = 5. Adapun gambaran P_6 sebelum dilabeli adalah sebagai berikut :



Berdasarkan teorema 3.2, P_6 adalah graf total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib k = 16. Label-label sisi untuk P_6 adalah 7, 8, 9, 10, dan 11. Sehingga untuk $S(P_6) = \{9, 8, 7, 6, 5\}$.

$s_1 = 9 = (3, 6); (4, 5)$

$s_2 = 8 = (2, 6); (3, 5)$

$s_3 = 7 = (1, 6); (2, 5); (3, 4)$

$s_4 = 6 = (1, 5); (2, 4)$

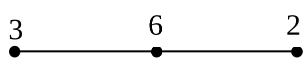
$s_5 = 5 = (1, 4); (2, 3)$

Dari keterangan tersebut di atas, terdapat beberapa kemungkinan pasangan label simpul untuk membentuk PTSAS pada P_6.

Berikut uraiannya: (untuk uraian berikut ini tidak menuliskan langkah yang mengalami kesalahan, karena pembahasannya akan bertele-tele)

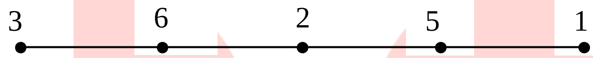
❖ Pada s_1 diambil pasangan label (3, 6), sehingga

❖ Pada s_2 terdapat dua kemungkinan, untuk kali ini diambil pasangan label (2, 6), sehingga label 6 ditempatkan pada simpul berderajat dua



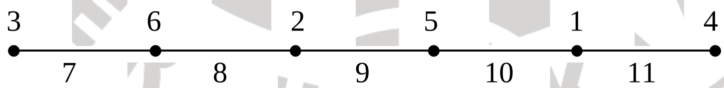
- Kemudian pada s_3, karena tidak memungkinkan mengambil pasangan label (1, 6), maka kemungkinannya adalah pasangan label (2, 5) dan (3, 4), untuk kali ini diambil pasangan label (2, 5)

- Selanjutnya pada s_4 tidak mungkin mengambil pasangan label (2, 4), karena label 2 sudah ditempatkan pada simpul berderajat dua, maka diambil pasangan label (1, 5)



- Terakhir pada s_5, karena tidak mungkin mengambil pasangan label (2, 3), maka diambil pasangan label (1, 4)

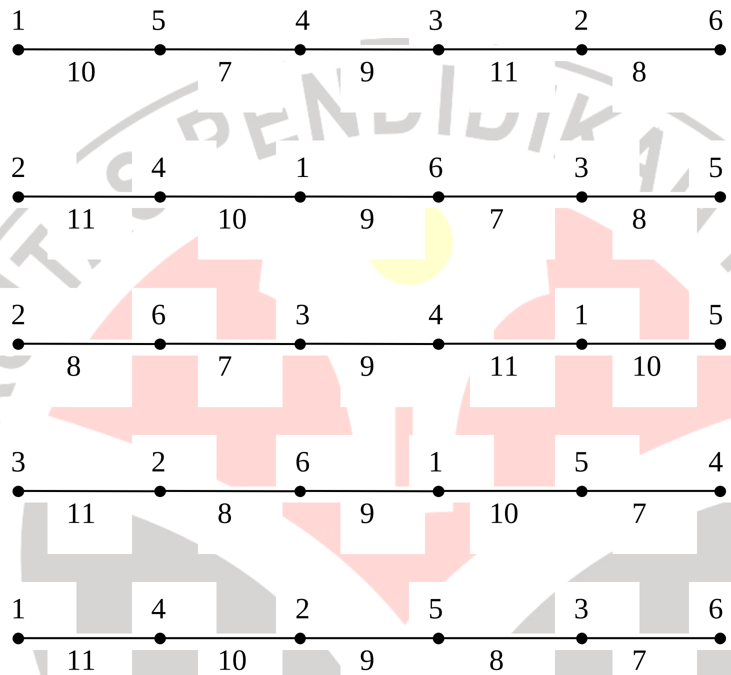
Sekarang tinggal melengkapi dengan label-label sisinya, sehingga terbentuk PTSAS pada P_6



Pada P_6 terdapat beberapa PTSAS yang berbeda. Untuk pelabelan lainnya didapat dengan menggunakan metode dan cara yang sama seperti telah dijelaskan pada pembahasan-pembahasan sebelumnya. Untuk pengontruksian dari himpunan S tidak harus berurutan. Artinya pengambilan label tidak harus dari s_1, kemudian

s_2, s_3 dan seterusnya, tetapi bisa acak, misal dari s_3 baru kemudian ke s_1, s_5 dan seterusnya.

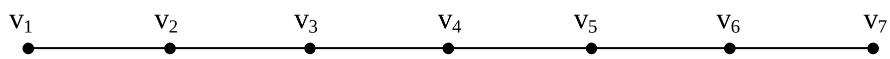
Setelah dilakukan pengonstruksian maka didapat beberapa PTSAS pada P_6 lainnya sebagai berikut :



Dengan demikian pada P_6 terdapat enam buah PTSAS yang berbeda, pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_6 dengan k = 16 adalah PTSAS dengan k' = 16. Berarti pelabelan dual untuk PTSAS pada P_6 adalah pelabelan *self-dual*.

Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super Pada P_7 dengan Dualitas Pelabelannya

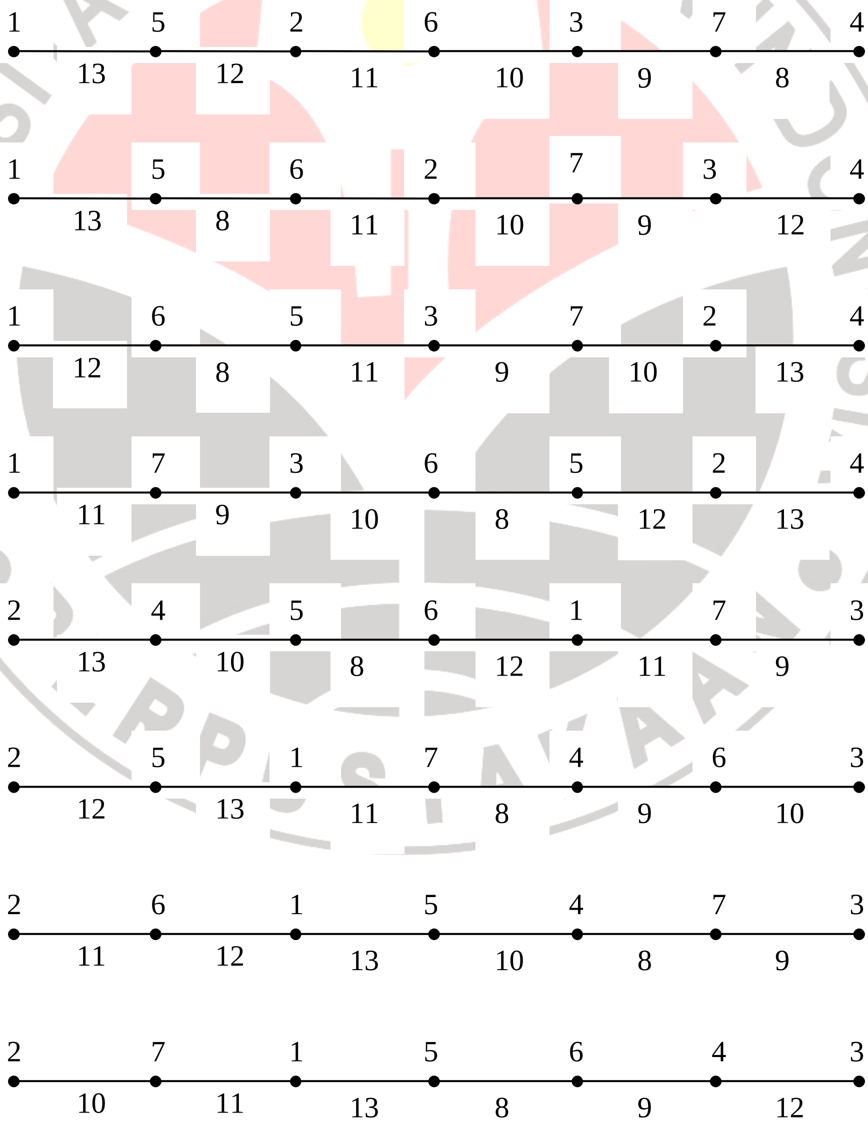
Pada P_7, p = 7 dan q = 6. Gambaran P_7 sebelum dilabeli adalah sebagai berikut :

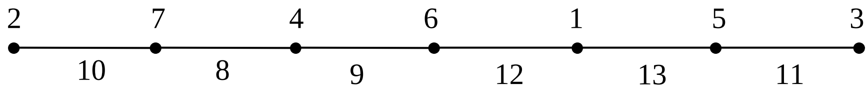


P_7 adalah graf total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k_1 = 19$ dan $k_2 = 18$. Berarti terdapat dua konstanta ajaib yang masing-masing akan membentuk PTSAS pada P_7.

Setelah dilakukan pengonstruksian pada P_7 seperti yang telah lakukan pada pengontruksian-pengonstruksian PTSAS pada P_n sebelumnya, maka didapat beberapa PTSAS untuk P_7 sebagai berikut :

- Untuk $k_1 = 19$

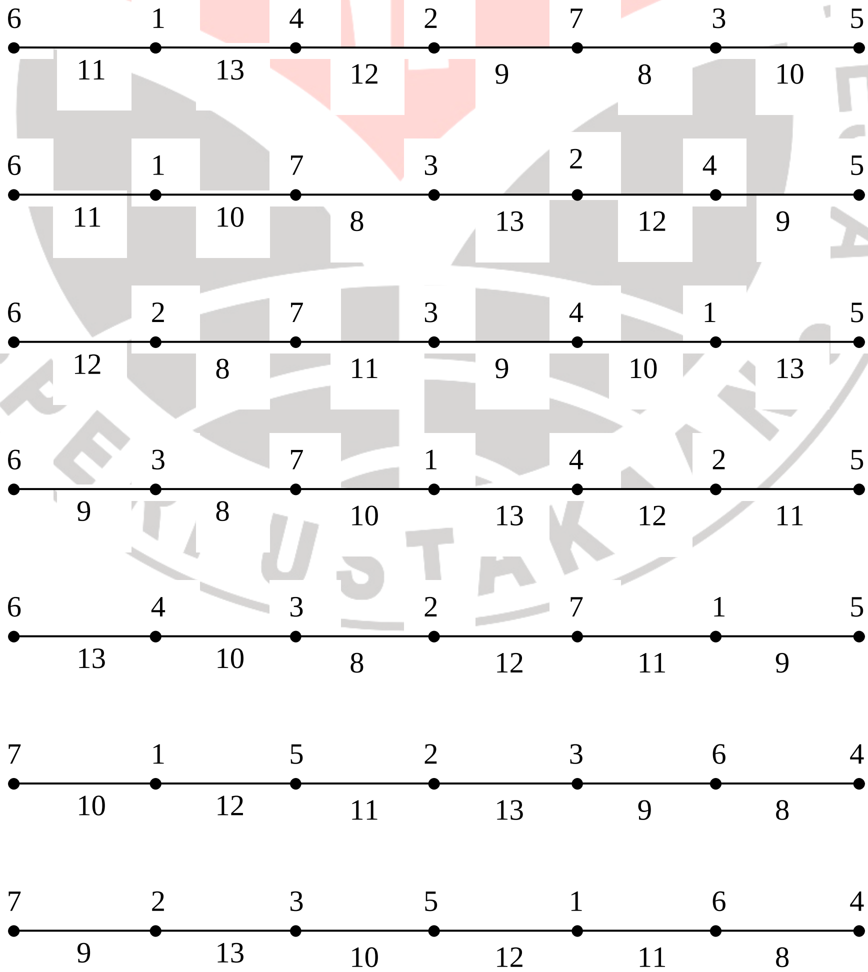


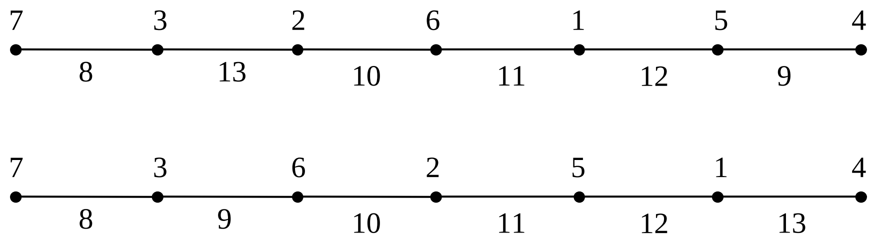


Jadi pada P_7 terdapat sembilan PTSAS yang berbeda. Pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_7 dengan $k_1 = 19$ adalah PTSAS dengan $k_1' = 18$. Berarti PTSAS pada P_7 dengan $k_2 = 18$ adalah pelabelan dual super dari PTSAS pada P_7 dengan $k_1 = 19$.

➢ Untuk $k_2 = 18$

Dengan menggunakan metode yang sama, seperti telah dilakukan pada pembahasan sebelumnya untuk mencari pelabelan dual super, didapat PTSAS pada P_7 dengan $k_2 = k_1' = 18$ sebagai berikut :





Hasil Lengkap PTSAS pada P_n dengan $2 \leq n \leq 7$

Pada bagian ini tidak disertai dengan gambaran utuh PTSAS-nya, tapi hanya menampilkan himpunan label simpulnya saja.

Tabel 3.1

Hasil Lengkap PTSAS pada P_n, dengan $2 \leq n \leq 7$

P_n	k	$\lambda(V(P_n))$		
P_2	6	{1, 2}		
P_3	9	{1, 3, 2}		
	8	{2, 1, 3}		
P_4	11	{1, 3, 2, 4}		
		{3, 1, 4, 2}		
P_5	14	{1, 4, 2, 5, 3}		
	13	{3, 1, 4, 2, 5}		
P_6	16	{1, 4, 2, 5, 3, 6}	{2, 6, 3, 4, 1, 5}	
		{1, 5, 4, 3, 2, 6}	{3, 2, 6, 1, 5, 4}	
		{2, 4, 1, 6, 3, 5}	{3, 6, 2, 5, 1, 4}	
P_7	19	{1, 5, 2, 6, 3, 7, 4}	{1, 7, 3, 6, 5, 2, 4}	{2, 6, 1, 5, 4, 7, 3}
		{1, 5, 6, 2, 7, 3, 4}	{2, 4, 5, 6, 1, 7, 3}	{2, 7, 1, 5, 6, 4, 3}
		{1, 6, 5, 3, 7, 2, 4}	{2, 5, 1, 7, 4, 6, 3}	{2, 7, 4, 6, 1, 5, 3}
	18	{7, 3, 6, 2, 5, 1, 4}	{7, 1, 5, 2, 3, 6, 4}	{6, 2, 7, 3, 4, 1, 5}
		{7, 3, 2, 6, 1, 5, 4}	{6, 4, 3, 2, 7, 1, 5}	{6, 1, 7, 3, 2, 4, 5}
		{7, 2, 3, 5, 1, 6, 4}	{6, 3, 7, 1, 4, 2, 5}	{6, 1, 4, 2, 7, 3, 5}

Setelah dilakukan proses pengonstruksian PTSAS pada P_n dengan $2 \leq n \leq 7$, serta dari tabel 3.1 yang merupakan hasil lengkap dari proses pengonstruksian tersebut, terdapat beberapa hal menarik yang terlihat beraturan (pola). Sehingga selain menggunakan definisi, teorema, dan lemma seperti yang telah dilakukan pada pengonstruksian-pengonstruksian PTSAS sebelumnya, pola ini bisa tambahkan untuk dijadikan panduan mencari/mengonstruksi PTSAS pada P_n secara umum.

Jika dilihat dari segi konstanta ajaibnya, terlihat bahwa untuk PTSAS pada P_n dengan n ganjil, maka konstanta ajaib $k_1 = k_1' = k_2$. Artinya PTSAS pada P_n dengan konstanta ajaib k_2 merupakan pelabelan dual super dari PTSAS pada P_n dengan konstanta ajaib k_1. Begitu juga berlaku untuk sebaliknya. Sehingga bisa dikatakan PTSAS pada P_n dengan n ganjil, dimana terdapat dua konstanta ajaib, maka keduanya saling dual. Dengan demikian, untuk mengonstruksi PTSAS pada P_n dengan n ganjil cukup mencari salah satunya saja dari kedua konstanta ajaib tersebut. Sedangkan untuk PTSAS pada P_n dengan n genap, konstanta ajaib $k = k'$. Artinya pelabelan dual super untuk PTSAS pada P_n dengan n genap adalah dirinya sendiri (*self-dual*), sehingga tidak perlu lagi mencari pelabelan dual supernya.

Adapun pola lainnya yang berhasil ditemukan adalah sebagai berikut :

Konjektur 3.1 : Misalkan λ adalah PTSAS pada P_n dengan himpunan simpul $V(P) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$, maka $\lambda(V(P)) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\}$ dengan $\lambda(v_i) = a_i$, i = 1, 2, 3, …, n dan n jumlah simpul. Dan misalkan $U = a_1 + a_n$, maka

- Untuk n genap

  $U = a_1 + a_n = n + 1$

- Untuk n ganjil

  jika $k = \frac{5n+3}{2}$, maka $U = \frac{k+6}{5}$,

  jika $k = \frac{5n+1}{2}$, maka $U = \frac{3k+1}{5}$.

3.2 Algoritma Pengonstruksian Pelabelan Total Sisi-Ajaib Super pada Graf Lintasan

Berdasarkan proses pengonstruksian PTSAS pada graf lintasan P_n dengan $2 \leq n \leq 7$ di sub bab sebelumnya membuat penulis berpikir bagaimana merancang suatu algoritma yang cukup baik untuk mengonstruksi suatu PTSAS pada graf lintasan P_n secara umum. Berikut adalah algoritma untuk mencari/mengonstruksi suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan :

Masukan : sejumlah simpul n, $n \in \mathbb{N}$

Keluaran : himpunan label $\lambda(V(P_n))$ yang membentuk graf total sisi-ajaib super dengan nilai konstanta ajaib tertentu, jumlah total PTSAS yang berbeda dan gambar utuh graf lintasan yang sudah dilabeli secara total sisi ajaib super.

Proses :

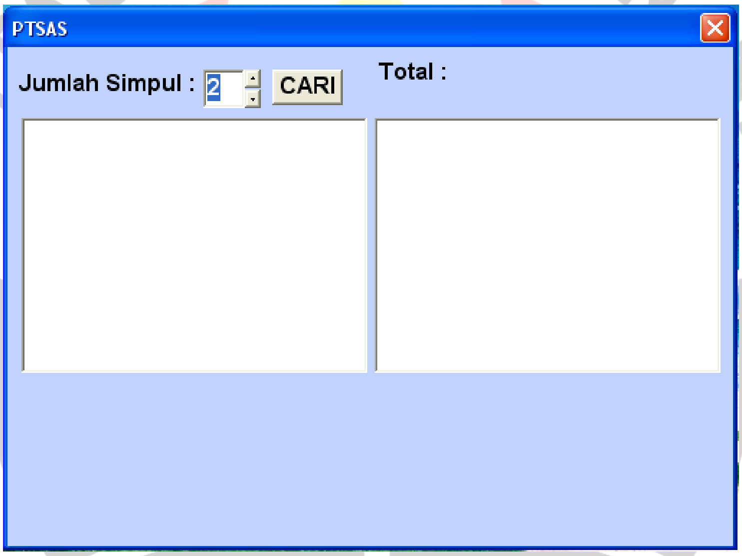
1. Cek, apakah n genap atau ganjil
2. Jika n genap, maka konstanta ajaib $k = \frac{5n+2}{2}$

3. Jika n ganjil, maka konstanta ajaib $k_1 = \frac{5n+3}{2}$ dan $k_2 = \frac{5n+1}{2} = k_1$'
4. Tentukan label-label simpul dan sisinya
5. Dari konstanta ajaib dan label-label sisinya, tentukan himpunan S
6. Tentukan ajasensi label-label simpulnya berdasarkan himpunan S yang telah diketahui
7. Gunakan konjektur 3.1 untuk mempermudah penempatan label-label (melakukan pelabelan) pada simpul-simpul graf lintasan yang akan dikonstruksi
8. Tentukan label-label sisinya dengan menggunakan rumus $k - \lambda(v_i) - \lambda(v_{i+1})$ dengan i = 1, 2, 3, …, n
9. Selesai

3.2.1 Implementasi dan Simulasi

Berikut adalah implementasi dari algoritma pengonstruksian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan yang diimplementasikan dalam bentuk program aplikasi komputer menggunakan bahasa pemrograman Delphi, disertai dengan simulasi penggunaan program tersebut.

Tampilan awal dari program aplikasi komputer yang dibuat, tampak pada gambar berikut :

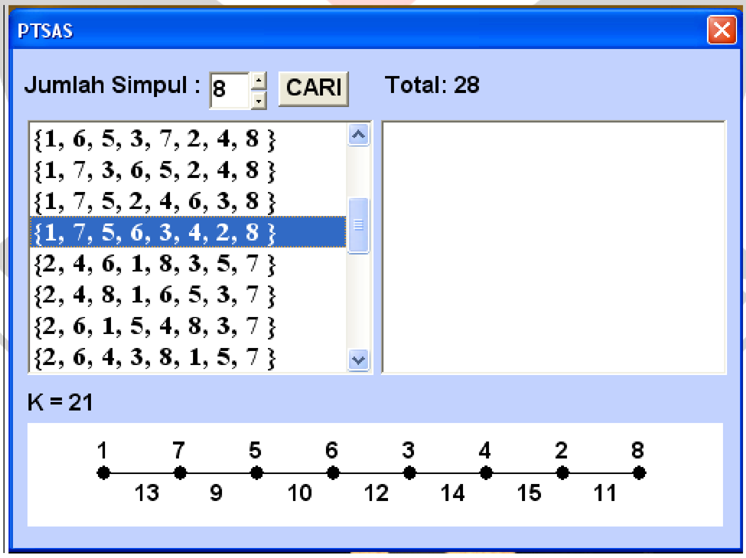


Gambar 3.3 *Interface* (antarmuka) awal program aplikasi komputer

Pengoperasian program aplikasi tersebut sangat sederhana, dengan meng-klik tanda panah atas atau tanda panah bawah pada kolom ‘Jumlah Simpul :’ maka akan tampak angka-angka yang menunjukkan jumlah simpul sebagai masukan, pada program aplikasi ini jumlah simpul dibatasi dari 2 sampai 9. Setelah memilih angka yang akan menjadi masukan, pengguna meng-klik tombol ‘CARI’, maka program aplikasi akan menampilkan beberapa himpunan label simpul yang membentuk pelabelan total sisi-ajaib super (PTSAS) pada kolom di bawahnya, jumlah himpunan label simpul yang berbeda pada kolom ‘Total :’, dan nilai konstanta ajaib K pada kolom di bawah kolom himpunan label simpul.

Pada simulasi ini, angka masukannya adalah 8 dan 9. Hal ini dikarenakan pada proses pengonstruksian secara manual tidak dilakukan untuk graf lintasan dengan jumlah simpul delapan dan sembilan. Selain itu untuk menguji kehandalan algoritma yang diperoleh dari proses pengonstruksian PTSAS pada P_n dengan $2 \leq n \leq 7$.

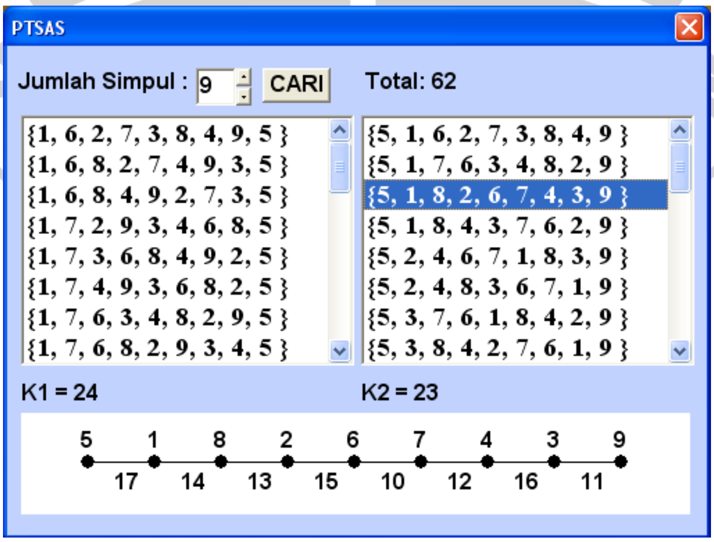
Pada simulasi pertama pengguna memilih angka 8 sebagai masukan pada kolom ‘Jumlah Simpul :’, setelah mengklik tombol ‘CARI’, maka tampilan program aplikasi akan tampak seperti pada gambar berikut :



Gambar 3.4 *Interface* (antarmuka) setelah pengguna memasukkan angka 8

Terlihat bahwa dengan memilih angka 8 sebagai masukan, diperoleh beberapa himpunan label simpul yang membentuk suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan P_8, jumlah himpunan label simpul ada 28 seperti terlihat pada kolom ‘Total: 28’. Artinya pada P_8 terdapat 28 PTSAS yang berbeda dan konstanta ajaibnya adalah 21 seperti terlihat pada kolom ‘K = 21’ di bawah kolom himpunan label simpul. Apabila pengguna meng-klik salah satu himpunan label simpul, pada simulasi di atas pengguna meng-klik himpunan label simpul {1. 7, 5, 6, 3, 4, 2, 8}, maka akan ditampilkan graf lintasan yang sudah dilabeli dengan himpunan label simpul yang dipilih tadi disertai dengan label sisinya sehingga membentuk graf total sisi-ajaib super, letaknya di kolom paling bawah pada *interface* program aplikasi.

Pada simulasi kedua pengguna memilih angka 9, yang merupakan angka ganjil sebagai masukannya. Maka tampilan program aplikasi akan tampak seperti pada gambar berikut :



Gambar 3.5 *Interface* (antarmuka) setelah pengguna memasukkan angka 9

Dengan memilih angka ganjil, maka kedua kolom di bawah kolom 'Jumlah Simpul : 9' terisi oleh himpunan label simpul yang membentuk PTSAS, ini disebabkan karena PTSAS pada P_n dengan n ganjil memiliki dua konstanta ajaib yang saling dual. Kedua konstanta ajaib itu, K1 dan K2, terlihat di bawah masing-masing kolom himpunan label simpul, sekaligus menunjukkan bahwa himpunan label simpul tersebut membentuk PTSAS dengan konstanta ajaib sesuai dengan nilai K yang berada di bawahnya. Ternyata P_9 memiliki 62 buah PTSAS yang berbeda dan terbagi dua, yaitu 31 PTSAS dengan konstanta ajaib K1 = 24 dan 31 PTSAS dengan konstanta ajaib K2 = 23.

Dari beberapa simulasi yang dilakukan penulis, waktu proses (*running*) simulasi oleh komputer terbilang cepat untuk angka-angka masukan (jumlah simpul) yang kecil. Tetapi untuk jumlah simpul yang banyak, membutuhkan waktu beberapa detik. Contohnya bila pengguna memilih angka 9 sebagai masukkan, maka proses simulasi membutuhkan waktu sekitar 24 detik. Apalagi jika angka masukannya lebih besar, maka proses simulasi yang dibutuhkan pun akan lebih lama. Hal ini dikarenakan semakin besar angka masukan, semakin besar pula ruang *random* permutasinya.