

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Makalah pertama mengenai teori graf ditulis oleh ahli matematika dari Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736. Euler mencoba memecahkan persoalan jembatan Königsberg. Königsberg sendiri adalah sebuah kota yang terletak di Prusia timur, sekarang bernama Kaliningrad, sebuah kota yang termasuk dalam wilayah Rusia. Dalam makalahnya, Euler mencoba solusi atas permasalahan bagaimana menyeberangi semua jembatan itu tepat satu kali dari tempat berangkat sampai kembali ke tempat semula. Pada permasalahan yang diungkapkan oleh Euler, simpul digunakan untuk merepresentasikan lokasi daratan yang dihubungkan oleh jembatan-jembatan. Sedangkan tiap jembatan direpresentasikan dengan sisi.

Salah satu topik dalam teori graf yang banyak mendapat perhatian adalah pelabelan graf. Pelabelan graf muncul pertama kali pada pertengahan tahun 1960-an setelah sebuah konjektur dari Ringel dan tulisan dari Rosa membahas mengenai pelabelan graf. (Metahelgia, 2000: 2).

Pelabelan pada sebuah graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan bulat positif. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu pelabelan simpul, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Definisi 1.1

- i. Pelabelan simpul adalah pemberian label pada simpul-simpul dari sebuah graf.
- ii. Pelabelan sisi adalah pemberian label pada setiap sisi dari sebuah graf.
- iii. Pelabelan total adalah pemberian label, baik pada simpul-simpulnya maupun pada setiap sisi dari sebuah graf.

Ngurah (2007: 1) mengemukakan bahwa pelabelan graf disamping mempunyai properti matematika yang menarik juga mempunyai aplikasi yang cukup luas pada berbagai bidang/permasalahan, seperti *x-ray crystallography*, teori koding, kriptografi, radar, astronomi, disain sirkuit, dekomposisi graf, dan disain jaringan komunikasi.

Berbagai macam jenis pelabelan telah dikaji dan didiskusikan. Adapun beberapa pelabelan graf yang telah dikaji diantaranya : (Ngurah, 2007: 14)

- i. Pelabelan *graceful*
fungsi λ dikatakan pelabelan *graceful* pada graf G dengan q sisi jika λ merupakan fungsi injektif dari himpunan simpul G ke $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$, sedemikian sehingga jika setiap sisi xy diberi label $|\lambda(x) - \lambda(y)|$, maka himpunan semua label sisinya adalah $\{1, 2, 3, \dots, q\}$.

- ii. Pelabelan harmonius

Pelabelan harmonius pada graf G dengan q sisi didefinisikan sebagai suatu fungsi injektif λ dari himpunan simpul G ke $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, sedemikian

sehingga jika setiap sisi xy diberi label $\lambda(x) + \lambda(y) \pmod{q}$, maka himpunan semua label sisinya adalah $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$.

iii. pelabelan anti-ajaib.

Jika pemberian label pada sebuah graf memberikan nilai yang merupakan deret aritmatika dengan nilai awal a dan beda b , maka pelabelan tersebut disebut (a, b) anti-ajaib.

iv. pelabelan ajaib

Pada tahun 1963, dalam tulisannya, Sedlacek mendefinisikan pelabelan ajaib pada sebuah graf.

Definisi 1.2

Sebuah graf dikatakan ajaib apabila graf tersebut mempunyai label sisi dalam selang bilangan riil, sehingga jumlah label sisi-sisi yang menempel pada simpul sama dengan konstan, tidak bergantung pada bagaimana seseorang memilih simpul tersebut.

Dengan memandang kondisi pelabelan ajaib, Kotzig dan Rosa (1970: 451) mendefinisikan pelabelan ajaib yang lain yaitu pelabelan total sisi-ajaib (*edge-magic total labeling*) sedangkan Mac Douglass *et.al.* (Metahelgia, 2000: 3) mendefinisikan pelabelan total simpul-ajaib (*vertex-magic total labeling*).

Definisi 1.3

- i. Pelabelan total simpul-ajaib adalah pelabelan sejumlah simpul dan sisi sedemikian sehingga jumlah label pada suatu simpul dan label sisi-sisi yang menempel pada simpul tersebut sama dengan suatu nilai konstan, tidak bergantung pada pilihan simpulnya.

- ii. Pelabelan total sisi-ajaib adalah pelabelan sejumlah sisi dan simpul sedemikian sehingga jumlah label pada suatu sisi dan label pada simpul-simpul yang menempel pada sisi tersebut sama dengan suatu nilai konstan, tidak bergantung pada pilihan sisinya.

Penelitian mengenai pelabelan ajaib graf terus berkembang, sehingga kemudian Enomoto, dkk (1998: 105) mengkaji dan memperkenalkan istilah pelabelan total sisi-ajaib super. Sedangkan Wallis (2001: 17) menyebutnya *strong edge-magic total labeling*. Sebuah graf memiliki pelabelan total sisi-ajaib super jika label-label simpulnya merupakan urutan bilangan asli $1, 2, 3, \dots, p$, dengan p adalah banyaknya simpul. Graf yang dapat dilabeli secara total sisi-ajaib super dinamakan graf total sisi-ajaib super.

Pada tahun 1970, Kotzig dan Rosa mengungkapkan sebuah konjektur yang mengatakan bahwa semua graf pohon dapat dilabeli secara total sisi-ajaib. Selanjutnya Enomoto dkk. (1998: 109) mengemukakan sebuah konjektur bahwa semua graf pohon dapat dilabeli secara total sisi-ajaib super. Konjektur ini belum dibuktikan untuk semua graf pohon.

Informasi-informasi yang telah dipaparkan di atas mendorong penulis untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan total sisi-ajaib super ini, khususnya pada graf lintasan. Hal ini karena, pertama metode yang digunakan untuk mengonstruksi pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan relatif mudah untuk diimplementasikan ke dalam program aplikasi komputer, kedua

untuk memperkuat konjektur dari Enomoto bersama dengan penelitian-penelitian lainnya mengenai pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka masalah dirumuskan sebagai berikut :

1. Bagaimana mengonstruksi sebuah pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan?
2. Bagaimana algoritma untuk menentukan pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan dan bagaimana implementasinya dalam sebuah program komputer?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah

1. Mengetahui cara mengonstruksi suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan.
2. Mengetahui algoritma untuk menentukan pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan dan membuat program aplikasi komputer sebagai implementasi dari algoritma tersebut.

1.4 Batasan Masalah

Kajian masalah dibatasi pada kelas graf lintasan P_n dengan $2 \leq n \leq 7$.

Bahasa pemrograman yang digunakan untuk pembuatan program aplikasi komputer adalah bahasa pemrograman Delphi.

1.5 Metode Penelitian

Kajian penelitian dilakukan dengan

1. Metode studi literatur

Penulis berusaha memahami uraian dari artikel, jurnal, dan dari buku yang menguraikan tentang masalah pelabelan graf.

2. Metode simulasi program komputer

Untuk menguji algoritma yang dikembangkan penulis, dibuat program aplikasi komputer disertai dengan simulasi.

1.6 Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mendeskripsikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORITIS

Untuk mendukung deskripsi pada bab pendahuluan, maka dijelaskan beberapa pengertian dan konsep dasar dalam teori graf dan pelabelan graf.

BAB III PEMBAHASAN

Memerhatikan landasan teoritis, disajikan definisi, teorema dan lemma yang mendukung konsep pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan. Dari definisi, teorema dan lemma tersebut dikonstruksi suatu pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan. Selanjutnya, dikembangkan sebuah algoritma pengonstruksian pelabelan total sisi-ajaib super pada graf lintasan disertai dengan contoh implementasinya berupa simulasi program komputer.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan mengenai pelabelan total sisi-ajaib super, dirumuskan kesimpulan dan beberapa saran untuk penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

