BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam mempelajari Aplikasi Pecahan Kontinu pada Nada-Nada Piano, diperlukan beberapa materi pendukung sebagai berikut.

A. Teori-teori Matematika

Definisi 2.1 Sifat Terurut Baik dari N (David M. Burton 1980:2)

Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari N mempunyai elemen terkecil.

Sifat ini mengatakan bahwa jika S adalah himpunan bagian dari N dan $S \neq \emptyset$, maka ada elemen $m \in S$ sehingga $m \leq k$ untuk setiap $k \in S$. Dari hal ini, akan diturunkan salah satu versi dari prinsip induksi matematik yang dinyatakan dalam suku-suku himpunan bagian dari N.

1. Induksi Matematik

Induksi matematik adalah suatu metode yang digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan yang melibatkan (variable) bilangan-bilangan asli. Induksi matematik akan dipakai untuk pembuktian beberapa teorema pada bahasan-bahasan selanjutnya.

Teorema 2.2 Prinsip Induksi (David M. Burton 1980:3)

Jika $S \subseteq N$ (S subhimpunan bilangan asli) sehingga berlaku:

(i) $1 \in S$

(ii) $\{1,2,\ldots,k\} \subseteq S$ mengakibatkan $k+1 \in S$

Maka $S = N$

Bukti

Gunakan kontradiksi. Andaikan $S \neq N$ artinya $T = N \setminus S \neq \emptyset$. Menurut sifat keterurutan baik di N, terdapat elemen paling kecil $a \in T$. Karena $1 \in S$ maka haruslah $a > 1$ dan karena a elemen paling kecil di T, maka $a - 1 \notin T$ dan haruslah $a - 1 \in S$. Menurut asumsi (ii), $a - 1 \in S$ berakibat $a \in S$. Hal ini kontradiksi dengan fakta bahwa $a \in S$ $(T \cap S = \emptyset)$. Jadi haruslah $S = N$. ∎

Sebagai contoh: Perhatikan barisan yang didefinisikan sebagai berikut.

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, untuk semua bilangan asli n. (*)

Bukti: Misalkan S adalah himpunan semua bilangan asli yang memenuhi (*)

(i) Perhatikan bahwa $2^{1-1} = 2^1 - 1 = 1$. Artinya $n = 1$ memenuhi (*) atau $1 \in S$

(ii) Asumsikan $1 \leq k \in S$, artinya berlaku

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Selanjutnya untuk $n = k + 1$ diperoleh:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = 2^k - 1 + 2^k$

$2.2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$

Jadi $k + 1$ memenuhi (*) atau $k + 1 \in S$.

Berdasarkan prinsip induksi di atas, maka pernyataan (*) adalah benar.

Rumusan induksi di atas berlaku untuk langkah awal $n = 1$. Hal ini dapat diperumum dengan asumsi nilai awal n_0.

2. Perluasan Pecahan Kontinu

Pembahasan selanjutnya adalah tentang konsep pecahan kontinu. Sebelum ke pecahan kontinu, ada beberapa konsep yang harus dipahami terlebih dahulu, yaitu algoritma pembagian, dan algoritma Euclid.

Alat yang digunakan untuk mencari FPB dari dua bilangan yaitu algoritma Euclid. Disamping itu Algoritma Euclid digunakan juga untuk mengkonstruksi suatu pecahan kontinu yang hingga. Sebelum ke algoritma Eulid, harus diketahui dulu tentang algoritma pembagian.

Definisi 2.3 Algoritma Pembagian (Matthew Bartha 1993:2)

Misal a, b bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka terdapat bilangan bulat unik s dan t sedemikian sehingga $a = sb + t$ dimana $t < |b|$ dan $t \geq 0$.

Teorema 2.4 Algoritma Euclid (Matthew Bartha 1993:2)

Diberikan bilangan bulatu_0, u_1dengan$u_0, u_1 > 0$. Aplikasikan algoritma pembagian berkali-kali dengan menggunakan sisa pembaginya untuk tiap-tiap u_i.

Dengan menerapkan algoritma pembagian, didapat

$$u_0 = u_1 a_0 + u_2 \qquad 0 \leq u_2 < u_1$$

$$u_1 = u_2 a_1 + u_3 \qquad 0 \leq u_3 < u_2$$

$$\vdots$$

$$u_{j-1} = u_j a_{j-1} + u_{j+1} \qquad 0 \le u_{j+1} < u_j$$

$$u_j = u_{j+1} a_j$$

Maka didapatlah FPB dari u_0 dan u_1 yaitu u_{j+1}.

Untuk menyusun pecahan kontinu, pertama sajikan dulu bentuk pecahan kontinu sebagai sebarang bilangan rasional. Tentukan sebarang bilangan rasional dengan bentuk ${}^{u_i}/_{u_{i+1}}$, dengan menggunakan algoritma pembagian didapatkan

$$u_i = u_{i+1} a_i + u_{i+2}$$

Selanjutnya bagi kedua sisi dengan u_{i+1}.

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = a_i + \frac{u_{i+2}}{u_{i+1}}$$

Misalkan ${}^{u_i}/_{u_{i+1}} = \Phi_i$. Sehingga didapatkan

$$\Phi_i = a_i + \frac{u_{i+2}}{u_{i+1}}, 0 \le i \le j-1.$$

Jika dipakai algoritma Euclid ke pernyataan ${}^{u_i}/_{u_{i+1}}$dan misalkan $u_j = u_{j+1} a_j$ dimana $u_{j+2} = 0$, maka Φ_i di atas terpenuhi untuk sebarang suku u pada algoritma. Akhirnya, diketahui bahwa $u_j = u_{j+1} a_j$, lalu bagi kedua sisi dengan u_{j+1} untuk mendapatkan $\Phi_j = a_j$.

$$\Phi_0 = \frac{u_0}{u_1} = a_0 + \frac{1}{\Phi_1}$$

$$\Phi_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\Phi_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\Phi_3}}}$$

Jika dilanjutkan sampai ke Φ_j, dapat dinyatakan ${}^{u_0}/_{u_1}$ sebagai

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_{j-1} + \cfrac{1}{a_j}}}}$$

Bentuk di atas disebut perluasan pecahan kontinu dari bilangan rasional ${}^{u_0}/_{u_1}$ atau Φ_0. Bilangan bulat a_0 sampai a_j disebut *partial quotient*. Perluasan pecahan kontinu di atas dinotasikan dengan $[a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j]$.

Teorema 2.5 (Matthew Bartha 1993:3)

Sebarang bilangan rasional $\frac{u_0}{u_1}$ dengan FPB $(u_0, u_1) = 1$ dapat dibentuk sebagai pecahan kontinu yang dinyatakan $[a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j]$ di mana untuk setiap a_i adalah *partial quotient* dari langkah Algoritma Euclid ke-$(i-1)$ untuk $\frac{u_0}{u_1}$.

Untuk pembuktian teorema ini sama halnya dengan penyusunan suatu pecahan kontinu sebelumnya dari bilangan rasional. Teorema ini hanya mempertegas untuk pecahan yang paling sederhana yaitu untuk FPB $(u_0, u_1) = 1$.

Teorema 2.6 (Matthew Bartha 1993:4)

Misalkan $[a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j] = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$ yang keduanya merupakan pecahan kontinu berhingga dan sederhana, jika $a_j > 1$ dan $b_n > 1$, maka $j = n$ dan $a_i = b_i$ untuk $i = 0, 1, \dots, n$. Pecahan kontinu sederhana adalah pecahan kontinu yang suku-suku $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j$ adalah bilangan asli.

Bukti

Misalkan $[a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j] = \Phi$ dan $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n] = \beta$. Jika $\Phi_0 = [a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j]$, $\Phi_1 = [a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j]$, $\Phi_2 = [a_2, a_3, \dots, a_{j-1}, a_j]$ dan seterusnya. Untuk sebarang bilangan bulat i di mana $0 \le i \le j$, maka $\Phi_i = [a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j]$. Dengan cara yang sama, didapat juga $\beta_i = [b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, b_n]$.

Ingat bahwa $\beta_i = b_i + \frac{1}{[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]}$ dan diketahui bahwa $\beta_i > b_i$. Selanjutnya karena asumsi sebelumnya bahwa b bilangan bulat dan $b > 1$, diketahui $\beta_i > 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$. Dengan cara yang sama, b_n adalah suku terakhir di barisan b, $\beta_n = b_n > 1$. Catat $b_i = [\beta_i]$ yang digunakan notasi $[x]$ untuk bilangan bulat bagian x.

Ingat, sebelumnya diasumsikan $\Phi_0 = \beta_0$, dan ingin dibuktikan bahwa β dan Φ memiliki panjang yang sama dan untuk tiap-tiap bilangan bulat ke-i, fraksinya adalah sama. Gunakan induksi matematika untuk menyempurnakan bukti ini.

Perhatikan bahwa $\Phi_{i+1} > 1, i > 0$ (kecuali kalau $\Phi_{i+1} = 0$, di mana pecahan kontinunya tidak dilanjutkan), dan $a_i = [\Phi_i]$ untuk $0 \leq i \leq j$. Diketahui bahwa $b_0 = [\beta_0] = [\Phi_0] = a_0$. Selanjutnya :

$$\frac{1}{\Phi_1} = \Phi_0 - a_0 = \beta_0 - b_0 = \frac{1}{\beta_1}$$

$$\Phi_1 = \beta_1$$

$$a_0 = [\Phi_0] = [\beta_0] = b_0.$$

Sekarang asumsikan $\Phi_i = \beta_i$ dan sebelumnya $a_1 = b_1$.

$$\frac{1}{\Phi_{i+1}} = \Phi_i - a_i = \beta_i - b_i = \frac{1}{\beta_{i+1}}$$

Maka didapatkan

$$\Phi_{i+1} = \beta_{i+1}, a_{i+1} = [\Phi_{i+1}] = [\beta_{i+1}] = b_{i+1}.$$

Dari paparan di atas, telah dibuktikan jika $\Phi_0 = \beta_0$, maka $a_i = b_i$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n$. Dengan menggunakan induksi matematika, bagian pertama telah terbukti. Diketahui bahwa untuk tiap-tiap $a_i = b_i$, akibatnya $a_j = b_n$ di mana masing-masing adalah suku terakhirnya. Maka $j = n$. ∎

Teorema 2.7 (Matthew Bartha 1993:5)

Sebarang pecahan kontinu yang sederhana merepresentasikan suatu bilangan rasional. Sebaliknya sebarang bilangan rasional dapat dinyatakan sebagai pecahan kontinu hingga yang sederhana.

Bukti

Bagian pertama dari teorema ini dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika dengan bilangan bulat pada suatu perluasan pecahan kontinu. Misalkan suatu pecahan kontinu hanya mempunyai satu suku. Maka $[a_0] = a_0$

adalah sebuah bilangan bulat dan sebuah bilangan rasional. Sekarang misalkan jika i bilangan bulat pada suatu perluasan pecahan kontinu, maka dapat dinyatakan pecahannya sebagai bilangan rasional.

Akan diperiksa untuk kasus dimana untuk suatu bilangan bulat mempunyai $i+1$ bilangan bulat di perluasannya

$$[a_0, a_1, \dots, a_i] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_i]}$$

Telah diketahui bahwa $[a_0, a_1, \dots, a_i]$ mempunyai i suku pada perluasannya. Oleh karenanya diketahui bahwa itu bilangan rasional, dan $[a_0, a_1, \dots, a_i] = a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_i]$ adalah rasional.

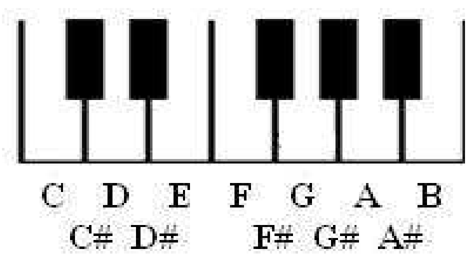
Untuk bagian kedua dari teorema 2.7 hanya digunakan algoritma Euclid.

■

B. Teori-Teori Musik

Nada-nada yang akan dibahas adalah 12 nada pada piano atau disebut dengan *dodekatonik*. Sebelum membahas lebih lanjut mengenai teori-teori selanjutnnya, samakan dulu interval antar tiap-tiap nada.

Susunan nada-nada itu adalah C-C#-D-D#-E-F-F#-G-G#-A-A#-B-C. Di mana setiap interval dari nada yang terdekat berjarak $\frac{1}{2}$ (*half- step*).



Gambar 2.1 Susunan 12 nada

Definisi 2.8 Tangga Nada Diatonik (Jamalus Hamzah 1993:65)

Tangga nada diatonik adalah susunan rangkaian nada berurutan dengan dua macam perbandingan jarak nada (interval). Dalam tangga nada diatonik terdapat 7 buah nada dengan intervalnya.

Skala diatonik dibagi menjadi 2 macam yaitu:

1. Mayor

Formula mayor adalah $1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2}$.

Jika diberikan suatu komposisi kunci C, maka susunan nada untuk C adalah C-D-E-F-G-A-B-C, di mana intervalnya menggunakan diatonik mayor. Nada mayor dari C adalah nada yang ketiganya yaitu E, dengan interval sebesar 2 nada.

2. Minor

Untuk diatonik minor, dibagi menjadi 3:

a. Natural Minor

Formula natural minor adalah $1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1$

Jika diberikan suatu komposisi kunci C minor, maka susunan nada untuk C minor (natural minor) adalah C-D-D#-F-G-G#-A#-C, dimana intervalnya menggunakan diatonik natural minor.

b. Harmonic Minor

Formula harmonik minor adalah $1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

Jika diberikan suatu komposisi kunci C minor, maka susunan nada untuk C minor (harmonic minor) adalah C-D-D#-F-G-G#-B-C, dimana intervalnya menggunakan diatonik harmonic minor.

c. Melodic Minor

Formula melodic minor adalah $1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2}$

Jika diberikan suatu komposisi kunci C minor, maka susunan nada untuk C minor (melodic minor) adalah C-D-D#-F-G-A-B-C, dimana intervalnya menggunakan diatonik melodic minor.

Nada minor dari C adalah nada yang ketiga yaitu D# dengan interval sebesar $1\,{}^{1}/_{2}$ nada.

Definisi 2.9 Tangga Nada Pentatonik (Jamalus Hamzah 1993:65)

Tangga nada pentatonik adalah sistem nada yang menggunakan lima nada dalam jarak nada-nada yang berfrekuensi dua kali lipat.

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan contoh berikut. Misalkan diberikan kunci A minor, maka susunan nada pentatoniknya adalah A-C-D-E-G.