BAB III

PECAHAN KONTINU dan PIANO

A. Pecahan Kontinu Tak Hingga dan Bilangan Irrasional

Sekarang akan dibahas tentang pecahan kontinu tak hingga yang diawali dengan barisan tak hingga bilangan bulat $a_0, a_1, \ldots$, dan dilanjutkan dengan mendefinisikan dua barisan bilangan bulat, h, k sebagai berikut:

$$h_{-2} = 0 \qquad h_{-1} = 1 \qquad h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}, \quad i \geq 0$$

$$k_{-2} = 1 \qquad k_{-1} = 0 \qquad k_i = a_i k_{i-1} + k_{i-2}, \quad i \geq 0.$$

Menggunakan barisan di atas, tiga teorema berikut akan membuat suatu pecahan kontinu tak hingga.

Teorema 3.1

Untuk sebarang bilangan real positif x,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, x] = \frac{xh_{j-1} + h_{j-2}}{xk_{j-1} + k_{j-2}}, j \geq 0$$

Bukti

Gunakan induksi matematika.

Pertama, jika $j = 0$, maka

$[x] = x$

$$\frac{xh_{-1}+h_{-2}}{xk_{-1}+k_{-2}}=\frac{x+0}{0+1}=x$$

Selanjutnya, jika $j=1$, maka

$$\frac{xh_0+h_{-1}}{xk_0+k_{-1}}=\frac{x(a_0h_{-1}+h_{-2})+h_{-1}}{x(a_0k_{-1}+k_{-2})+k_{-1}}=\frac{xa_0+1}{x}=a_0+\frac{1}{x}=[a_0,x].$$

Diasumsikan untuk $[a_0,a_1,\dots,a_n,x]$ adalah benar dan dengan memanipulasi ruas kiri diperoleh:

$$[a_0,a_1,\dots,a_n,x]=\left[a_0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{x}\right].$$

Persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{(a_n+1/n)h_{n-1}+h_{n-2}}{(a_n+1/n)k_{n-1}+k_{n-2}}=\frac{x(a_nh_{n-1}+h_{n-2})+h_{n-1}}{x(a_nk_{n-1}+k_{n-2})+k_{n-1}}=\frac{xh_n+h_{n-1}}{xk_n+k_{n-1}}$$

Akibatnya teorema ini benar untuk $j\geq 0$. ∎

Teorema 3.1 dapat digunakan untuk membuktikan dua teorema berikutnya.

Teorema 3.2

Jika $r_n=[a_0,a_1,\dots,a_n]$ untuk semua bilangan bulat $n\geq 0$, maka $r_n={}^{h_n}/_{k_n}$.

Bukti

Gunakan teorema 3.1 dengan menggantikan x dengan a_n dan didapatkan

$$r_n = [a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{h_n}{k_n}. \blacksquare$$

Teorema 3.2 di atas dapat digunakan untuk mencari nilai untuk suatu r_n yang akan dianalisis pada bahasan berikutnya. Sebelum membahas materi tersebut, terlebih dahulu akan disajikan teorema-teorema berikut:

Teorema 3.3

Persamaan berikut benar untuk $i \geq -1$:

(1) $h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (-1)^{i-1}$.

(2) $r_i - r_{i-1} = \frac{-1^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$.

(3) $h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (-1)^i a_i$.

(4) $r_i - r_{i-2} = \frac{-1^i a_i}{k_i k_{i-2}}$.

Bukti

Dengan menggunakan induksi matematik untuk pembuktian teorema ini, diawali untuk persamaan 1, jika $i = -1$:

$$h_{-1} k_{-2} - h_{-2} k_{-1} = (1)(1) - (0)(0) = 1$$

Untuk langkah selanjutnya, asumsikan $h_{i-1} k_{i-2} - h_{i-2} k_{i-1} = (-1)^{i-2}$. Dengan menggunakan definisi dari h, k di atas:

$$h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (a_i h_{i-1} + h_{i-2}) k_{i-1} - h_{i-1}(a_i k_{i-1} + k_{i-2})$$

$= a_i h_{i-1} k_{i-1} + h_{i-2} k_{i-1} - a_i k_{i-1} h_{i-1} - h_{i-1} k_{i-2}$

$= h_{i-2} k_{i-1} - h_{i-1} k_{i-2}$

$$-(h_{i-1} k_{i-2} - h_{i-2} k_{i-1}) = -1(-1)^{i-2} = (-1)^{i-1}.$$

Dengan demikian sudah dibuktikan bagian pertama dari teorema 3.3 dengan induksi matematik.

Bagian kedua dari teorema 3.3, diperoleh dengan membagi persamaan pertama dengan $k_{i-1} k_i$. Didapat:

$$\frac{h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i}{k_{i-1} k_i} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_{i-1} k_i}$$

$$\frac{h_i k_{i-1}}{k_{i-1} k_i} - \frac{h_{i-1} k_i}{k_{i-1} k_i} = \frac{h_i}{k_i} - \frac{h_{i-1}}{k_{i-1}} = r_i - r_{i-1}$$

Selanjutnya bahwa

$h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (a_i h_{i-1} + h_{i-2}) k_{i-2} - h_{i-2}(a_i k_{i-1} + k_{i-2})$

$$a_i (h_{i-1} k_{i-2} - h_{i-2} k_{i-1}) = a_i (-1)^i.$$

Akhirnya sesuai yang dikerjakan pada pembuktian pertama, bagi persamaan pertama itu dengan $k_{i-2} k_i$. Dihasilkan:

$$\frac{h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i}{k_{i-2} k_i} = \frac{h_i k_{i-2}}{k_{i-2} k_i} - \frac{h_{i-2} k_i}{k_{i-2} k_i}$$

$$\frac{h_i}{k_i} - \frac{h_{i-2}}{k_{i-2}} = r_i - r_{i-2} = \frac{-1^i a_i}{k_i k_{i-2}} \blacksquare$$

Teorema 3.4

Nilai r_j yang didefinisikan pada teorema 3.1 memenuhi rantai tak hingga dari ketidaksamaan

$$r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < [setiap\ r\ genap] \dots [setiap\ r\ ganjil] < r_7 < r_5 < r_3 < r_1.$$

Catat $j \geq 0$, r_n dengan r yang genap membentuk suatu barisan yang naik, sedangkan r yang ganjil membentuk suatu barisan yang turun, dan setiap r_{2j} lebih kecil dari setiap r_{2j-1}. Selanjutnya, $lim_{n\to\infty} r_n$ ada, dan setiap $j \geq 0, r_{2j} < lim_{n\to\infty} r_n < r_{2j+1}$.

Bukti

Diketahui bahwa $k_i \geq 0$ untuk $i \geq 0$ dan $a_i > 1$ untuk $i \geq 1$ (Sebarang suku tengah di pecahan kontinu haruslah bilangan bulat positif, jika itu nol, maka tidak memiliki suku-suku a_i selanjutnya). Lebih lanjut, pakai persamaan untuk $r_i - r_{i-1}$ dan $r_i - r_{i-2}$ menurut teorema 3.3.

Dengan menggunakan teorema 3.3 pada persamaan yang tadi diberikan, $r_{2j} - r_{2j-2} = \frac{-1^{2j} a_{2j}}{k_{2j} k_{2j-2}}$. Karena $-1^{2j} = 1$ untuk i bilangan asli, maka $\frac{-1^{2j} a_{2j}}{k_{2j} k_{2j-2}}$ selalu positif, akibatnya $r_{2j} > r_{2j-2}$ atau $r_{2j} < r_{2j+2}$.

Bisa juga dengan mengganti $i = 2j + 1$, menjadi $r_{2j+1} - r_{2j-1} = \frac{-1^{2j+1} a_{2j+1}}{k_{2j+1} k_{2j-1}}$.

Karena $-1^{2j+1} = -1$, maka $\frac{-1^{2j+1} a_{2j+1}}{k_{2j+1} k_{2j-1}}$ selalu negatif, akibatnya $r_{2j-1} > r_{2j+1}$.

Terakhir, gunakan teorema 3.3 (2) dengan mengganti $i = 2j$. Didapatkanlah $r_{2j} - r_{2j-1} = \frac{-1^{2j-1}}{k_{2j}k_{2j-1}}$. Karena $-1^{2j-1} = -1$, maka $\frac{-1^{2j-1}}{k_{2j}k_{2j-1}}$ selalu negatif, akibatnya $r_{2j} < r_{2j-1}$.

Dari hal di atas, disimpulkan

(3) $$r_0 < r_2 < r_4 < \cdots$$

(4) $$r_1 > r_3 > r_5 < \cdots$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $r_{2n} < r_{2j-1}$ untuk sebarang bilangan asli n, j. Menggunakan ketidaksamaan pada bentuk (3) dan (4), didapat ketidaksamaan

$$r_{2n} < r_{2n+2j} < r_{2n+2j-1} < r_{2j-1}$$

Diketahui bahwa r_0 adalah nilai terkecil sementara r_1 adalah nilai terbesarnya. Oleh karena itu, suku r yang ganjil membentuk suatu barisan monoton turun ke bawah oleh r_0, sementara suku r yang genap membentuk suatu barisan monoton naik ke atas oleh r_1. Akibatnya, kedua bentuk barisan r memiliki limit. Diketahui bahwa kedua limit adalah sama karena menurut teorema 3.3, $r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$ cenderung nol untuk i sampai tak hingga (karena, i naik, k_i ikut naik). Oleh karena itu limit untuk r_n ada selama n cenderung tak hingga. Akhirnya karena untuk semua suku-suku r yang genap pasti lebih kecil dari semua suku-suku r yang ganjil dan kedua barisan dari suku-sukunya memiliki limit yang sama (katakan $lim_{n\to\infty} r_n$), diketahui juga limit terdapat diantara setiap suku genap dan setiap suku ganjil yang dinyatakan:

$$r_{2j} < lim_{n\to\infty} r_n < r_{2j+1} \text{ untuk semua } j \geq 0. \blacksquare$$

Teorema 3.1-3.4 menyatakan bahwa suatu barisan tak hingga dari bilangan bulat menentukan suatu pecahan kontinu tak hingga (untuk $a_1, a_2, \ldots$). Lebih lanjutnya, teorema-teorema ini menyarankan bahwa nilai dari $lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ adalah $lim_{n\to\infty} r_n$.

Sekarang akan dijabarkan mengenai konsep pecahan kontinu tak hingga.

Teorema 3.5

Nilai dari sebarang pecahan kontinu yang sederhana tak hingga $[a_0, a_1, \ldots]$ adalah irrasional.

Bukti

Nyatakan pecahan kontinu tak hingga $[a_0, a_1, \ldots]$ sebagai θ (notasi Φ sebagai pecahan kontinu hingga dan θ sebagai pecahan kontinu tak hingga). Berdasarkan teorema 3.4 bahwa θ berada di antara r_n dan r_{n+1} untuk setiap $n \geq 0$. Jadi diketahui bahwa $0 < |\theta - r_n| < |r_{n+1} - r_n|$. Kalikan dengan k_n:

$$0 < |k_n\theta - h_n| < k_n|r_{n+1} - r_n|$$

Dengan menggunakan teorema 3.3 $|r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{k_n k_{n+1}}$, dapat dituliskan kembali menjadi

$$0 < |k_n\theta - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}}$$

Akan dibuktikan teorema 3.5 ini dengan menggunakan kontradiksi. Misalkan dianggap bahwa θ adalah kedua pecahan kontinu tak hingga dan merepresentasikan suatu bilangan rasional. Misal $\theta = {}^{a}/_{b}$ dengan a, b bilangan bulat positif. Kalikan ketidaksamaan dengan b dan didapatkan:

$$0 < \left|k_n\left(\frac{a}{b}\right)b - h_n b\right| < \frac{b}{k_{n+1}}$$

$$0 < |k_n a - h_n b| < \frac{b}{k_{n+1}}$$

Menurut definisi k_n bahwa barisan $\{r_n\}$ meloncat-meloncat dan tepat naik. Jadi pilih sebuah n yang cukup besar sedemikian sehingga $b < k_{n+1}$. Jadi bilangan bulat $|k_n a - k_n b|$ haruslah berada di antara 0 dan 1, di mana hal itu tidak mungkin karena $|k_n a - k_n b|$ harus bilangan bulat. Jadi pengandaian di atas salah, akibatnya teorema ini benar. ■

Sudah dijelaskan bahwa pecahan kontinu tak hingga merepresentasikan bilangan irrasional. Dua teorema berikutnya akan membuktikan bahwa jika dua pecahan kontinu tak hingga itu berbeda, maka nilainya tidak akan sama.

Teorema 3.6

Misalkan $\theta = [a_0, a_1, \ldots]$ suatu pecahan kontinu sederhana maka $a_0 = [\theta]$. Selanjutnya jika θ_1 menyatakan $[a_1, a_2, \ldots]$ maka $\theta = a_0 + {}^{1}/_{\theta_1}$.

Bukti

Dari teorema 3.4 diketahui bahwa $r_0 < \theta < r_1$; gunakan ketidaksamaan ini untuk θ menghasilkan $a_0 < \theta < a_0 + {}^1/_{a_1}$.

Diketahui bahwa $a_1 \geq 0$, jadi $a_0 < \theta < a_0 + {}^1/_{a_1} \leq a_0 + 1$. Dapat dituliskan kembali sebagai $a_0 < \theta < a_0 + 1$. Diketahui pula a_0 adalah bilangan bulat bagian dari θ. Oleh karena itu $a_0 = [\theta]$.

Selanjutnya dari teorema 3.4 bahwa nilai θ berada di limit n mendekati tak hingga. Jadi didapat:

$$lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \dots, a_n] = lim_{n\to\infty}\left[a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}\right] = a_0 + \frac{1}{lim_{n\to\infty}[a_1, \dots, a_n]}$$

$$= a_0 + \frac{1}{\theta_1} \blacksquare$$

Teorema 3.7

Dua pecahan kontinu tak hingga sederhana yang berbeda memiliki nilai yang berbeda.

Bukti

Misalkan $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ dan $[b_0, b_1, b_2, \dots]$ keduanya memiliki nilai θ. Menurut teorema 3.6, $[\theta] = a_0 = b_0$. Selanjutnya

$$\theta = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1, b_2, \dots]}$$

Oleh karena itu, $[a_1, a_2, ...]$ haruslah sama dengan $[b_1, b_2, ...]$. Karenanya, didapat bahwa $a_1 = b_1$.

Sekarang, asumsikan $a_i = b_i$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Dari persamaan sebelumnya

$$\theta_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots] = [b_n, b_{n+1}, \ldots]$$

$$\theta_n = a_n + \frac{1}{[a_n, a_{n+1}, \ldots]} = b_n + \frac{1}{[b_n, b_{n+1}, \ldots]}$$

Dari hal itu, diketahui bahwa $a_{n+1} = b_{n+1}$. Akibatnya jika dua pecahan kontinu sederhana yang tak hingga memiliki nilai yang sama, maka kedua pecahan itu sama. Di mana hal itu merupakan kontrapositif dari teorema. ■

Nivan dan Zuckerman menyusun suatu teorema dengan mengkombinasikan dari teorema-teorema di atas. Isi teorema tersebut adalah:

"Sebarang bilangan irrasional θ memiliki bentuk yang unik sebagai pecahan kontinu sederhana yang tak hingga $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Sebaliknya sebarang pecahan kontinu yang dibagi oleh bilangan bulat a_i yang bernilai positif untuk semua $i > 0$ merepresentasikan suatu bilangan irrasional θ. Pecahan kontinu sederhana yang hingga $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ memiliki nilai rasional yaitu $h_n/k_n = r_n$, dan kita sebut suku ke-n konvergen ke θ. Persamaan-persamaan yang menentukan h, k menghubungkan h_i dan k_i ke a_i. Untuk $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$, membentuk suatu barisan yang monoton naik mendekati θ. Sedangkan untuk $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, membentuk suatu barisan yang monoton turun mendekati θ. Kekonvergenan persamaan k_n adalah suatu barisan yang naik dari sebarang bilangan bulat positif untuk $n > 0$."

Untuk bahasan berikutnya, akan terus dipakai θ sebagai pecahan kontinu yang sederhana dan tak hingga. Selanjutnya tiga teorema berikutnya membolehkan untuk membuat pernyataan yang kuat mengenai suatu pendekatan pecahan kontinu tak hingga.

Teorema 3.8

Untuk sebarang $n \geq 0$ dan suatu θ sebagai pecahan kontinu yang tak hingga, sebarang h_n/k_n dijamin oleh $1/k_n k_{n+1}$ dari nilai fraksi. Secara numerik,

$$\left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right| < \left|\frac{1}{k_n k_{n+1}}\right|$$

$$|\theta k_n - h_n| < \left|\frac{1}{k_{n+1}}\right|$$

Bukti

Menurut teorema 3.3, untuk suatu bilangan irrasional θ, bisa ditentukan

(5) $$\theta - r_{n-1} = \theta - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}$$

(6) $$= \frac{\theta_n h_{n-1} + h_{n-2}}{\theta_n k_{n-1} + k_{n-2}} - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}$$

(7) $$= \frac{-(h_{n-1}k_{n-2} - h_{n-2}k_{n-1})}{k_{n-1}(\theta_n k_{n-1} + k_{n-2})} = \frac{-1(-1)^{n-2}}{k_{n-1}(\theta_n k_{n-1} + k_{n-2})}$$

(8) $$= \frac{-(1)^{n-1}}{k_{n-1}(\theta_{n-1} k_{n-1} + k_{n-2})}$$

Lebih lanjut,

$$a_i = [\theta_i]$$

$$\theta_{i+1} = \frac{1}{\theta_i - a_i}$$

Dari dua hal di atas, dinyatakan persamaan (8) sebagai

(9) $$\frac{1}{k_{n-1}(\theta_{n+1} k_n + k_{n+1})} = \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right|$$

Dengan menggunakan definisi dari h dan k, ganti $a_{n+1}k_n + k_{n-1}$ dengan k_{n+1} untuk mendapatkan ketidaksamaan yang pertama. Ketidaksamaan yang kedua pada teorema ini hanyalah bentuk yang pertama dikalikan dengan k_n.■

Teorema 3.9

Suatu kekonvergenan h_n/k_n mendekati θ, artinya

$$\left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right| < \left|\theta - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}\right|$$

Dan ketidaksamaan yang lebih kuat untuk $|\theta k_n - h_n| < |\theta k_{n-1} - h_{n-1}|$ juga terpenuhi.

Bukti

Gunakan $k_{n-1} \le k_n$ untuk menunjukkan ketidaksamaan pertama.

$$\left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right| = \frac{1}{k_n}|\theta k_n - h_n| < \frac{1}{k_n}|\theta k_{n-1} - h_{n-1}| \le \frac{1}{k_{n-1}}|\theta k_{n-1} - h_{n-1}|$$

$$= \left|\theta - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}\right|$$

Selanjutnya untuk membuktikan kesamaannya, perhatikan bahwa $a_n + 1 > \theta_n$ menurut algoritma pada penyusunan pecahan kontinu. Dengan menggunakan definisi dari h dan k,

$$\theta_n k_{n-1} + k_{n-2} < (a_n + 1)k_{n-1} + k_{n-2} = k_n + k_{n-1} \le a_{n+1}k_n + k_{n-1} = k_{n+1}$$

Persamaan di atas mendekati dengan bentuk $\theta - r_{n-1}$ yang telah dibuktikan di teorema sebelumnya. Kemudian

$$\left|\theta - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}\right| = \frac{1}{k_{n-1}(\theta_n k_{n-1} + k_{n-2})} > \frac{1}{k_{n-1} + k_{n+1}}$$

Jika dikalikan dengan k_{n-1} dan dengan menggunakan teorema 3.9, didapat

$$\theta k_{n-1} - h_{n-1} > \frac{1}{k_n} > |\theta k_n - h_n| \blacksquare$$

Teorema 3.10

Jika $a/_b$ suatu bilangan rasional dengan penyebut positif sedemikian sehingga $\left|\theta - a/_b\right| < \left|\theta - h_n/_{k_n}\right|$ untuk sebarang $n \geq 1$, maka $b > k_n$. Selanjutnya jika $|\theta b - a| < |\theta k_n - h_n|$ untuk sebarang $n \geq 0$, maka $b \geq k_{n+1}$.

Bukti

Pertama, buktikan bagian kedua dari teorema di atas terlebih dahulu dengan menggunakan kontradiksi. Dimulai dengan asumsi $|\theta b - a| < |\theta k_n - h_n|$ dan $b < k_{n+1}$.

$$xk_n + yk_{n+1} = b, \qquad xh_n + yh_{n+1} = a$$

Dengan definisi dari h dan k suku-suku sebagai koefisien dan dengan menggunakan teorema 3.3 bagian pertama, diketahui bahwa hasil dari koefisien-koefisien itu adalah ± 1. Jadi persamaan-persamaan itu memiliki solusi-solusi bilangan bulat. Anggap $x = 0$, maka $b = yk_{n+1}$, dan pastilah y bilangan positif. Karena y bilangan bulat positif, $b \geq k_{n+1}$, dimana kontradiksi dengan asumsi sebelumnya bahwa $b < k_{n+1}$. Jika $y = 0$, maka $a = xh_n$, $b = xk_n$. Jadi persamaan benar untuk x suatu bilangan bulat positif:

(10) $$|\theta b - a| = |\theta x k_n - x h_n|$$

(11) $$= |x||xk_n - xh_n|$$

(12) $$\geq |k_n \theta - h_n|$$

Asumsi yang lainnya bahwa $|\theta b - a| < |\theta k_n - h_n|$ kontradiksi dengan persamaan (9). Bahwa $\frac{1}{k_n(\theta_{n+1}k_n + k_{n+1})} = \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right|$. Kalikan dengan k_n, didapat $\frac{1}{(\theta_{n+1}k_n + k_{n+1})} = |k_n\theta - h_n|$. Dapat dilihat bahwa hal ini kontradiksi dengan asumsi $|\theta b - a| < |\theta k_n - h_n|$.

Selanjutnya buktikan bahwa x dan y memiliki tanda yang berlawanan. Jika $y < 0$, maka $xk_n = b - yk_{n+1}$. Karena $y < 0$, dan b, k_{n+1} positif, maka nilai x pastilah positif. Selanjutnya jika $y > 0$, maka $b < k_{n+1}$ berakibat $b < yk_{n+1}$ dan membuat nilai xk_n negatif. Akibatnya nilai x negatif. Dari teorema 3.9, diketahui $\theta k_n - h_n$ dan $\theta k_{n+1} - h_{n+1}$ memiliki tanda yang berlawanan. Jadi $x(\theta k_n - h_n)$ dan $y(\theta k_{n+1} - h_{n+1})$ memiliki tanda yang sama. Dari definisi x dan y, didapatlah $\theta b - a = x(\theta k_n - h_n) + y(\theta k_{n+1} - h_{n+1})$. Dua suku di ruas kanan memiliki tanda yang sama, jadi tidak apa-apa untuk dibuat nilai mutlaknya.

$$|\theta b - a| = |x(\theta k_n - h_n) + y(\theta k_{n+1} - h_{n+1})|$$

$$= |x(\theta k_n - h_n)| + |y(\theta k_{n+1} - h_{n+1})|$$

$$> |x(\theta k_n - h_n)|$$

$$= |x||(\theta k_n - h_n)| \geq |x(\theta k_n - h_n)|$$

Dari hal itu, persamaan tersebut kontradiksi dengan asumsi bahwa $|\theta b - a| < |\theta k_n - h_n|$. Jadi, diketahui bahwa x dan y memiliki tanda yang berlawanan.

Tahap akhirnya akan dibuktikan jika pernyataan kedua dari teorema itu benar, maka pernyataan yang pertama juga benar. Misalkan terdapat suatu bilangan rasional $^{a}/_{b}$ sedemikian sehingga

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right|, b \leq k_n.$$

(13) $$|\theta b - a| < |\theta k_n - h_n|, n \geq 0, b > 0 \blacksquare$$

Dari teorema-teorema di atas, memberikan suatu gambaran bahwa $^{h_n}/_{k_n}$ adalah pendekatan yang paling baik untuk suatu bilangan irrasional di mana penyebutnya yang paling besar adalah k_n.

B. Skala Pythagoras dan Skala Helmholtz

Pada masa hidupnya, seorang matematikawan dan juga seorang pecinta seni yaitu Pythagoras menyelidiki tentang suatu interval nada. Pythagoras membuat suatu aturan tentang frekuensi-frekuensi nada. Adapun aturan Pythagoras itu adalah:

1. Menggandakan suatu frekuensi menjadi satu *octave* lebih tinggi. Artinya, jika frekuensi nada C sebesar 1 Hz, maka frekuensi nada C' adalah 2 Hz, dimana C' lebih tinggi satu *octave.*

2. Mengalikan frekuensi dengan $^3/_2$ menjadikan *perfect fifth*. Artinya, jika frekuensi nada C sebesar 1 Hz, maka frekuensi nada $^3/_2$ Hz adalah *perfect fifth* dari C. Dalam hal ini, *perfect fifth* C adalah G.

Aturan di atas, berlaku juga untuk kebalikannya (inversnya). Jika frekuensi nada C' sebesar 2 Hz, maka frekuensi nada C adalah $2 * \frac{1}{2} = 1$ Hz, dimana nada C lebih rendah satu *octave* dengan nada C'. Demikian juga untuk aturan 2 Pythagoras. Jika frekuensi nada G sebesar $^3/_2$, maka frekuensi nada C adalah $^3/_2 * {}^2/_3 = 1$ dimana nada G adalah *perfect fifth* dari nada C.

Harus diketahui bahwa *perfect fourth* didapat dari kombinasi aturan 1 dengan kebalikan aturan 2. Misalkan frekuensi nada C 1 Hz, maka *perfect fourth* dari nada C adalah F dengan frekuensi $1 * 2 * {}^2/_3 = {}^4/_3$ Hz. Selain dua aturan di atas, Pythagoras juga membuat aturan baru untuk menentukan nada-nada dengan interval 1 nada yang disebut dengan *whole step*. Di mana frekuensi *whole step* adalah $^9/_8$ dari frekuensi dasar. W*hole step* mempunyai interval sebesar 1 nada.

Dari aturan-aturan tersebut, Pythagoras mendapatkan perbandingan frekuensi:

a. *octave* $\rightarrow 2:1$

b. *perfect fifth* $\rightarrow 3:2$

c. *perfect fourth* $\rightarrow 4:3$

d. *Whole step* $\rightarrow 9:8$

Aturan Pythagoras tersebut menjadi dasar penemuan 12 nada yang biasa digunakan dalam piano. Di mana aturan tersebut digunakan untuk mengkonstruksi ke-12 nada pada piano.

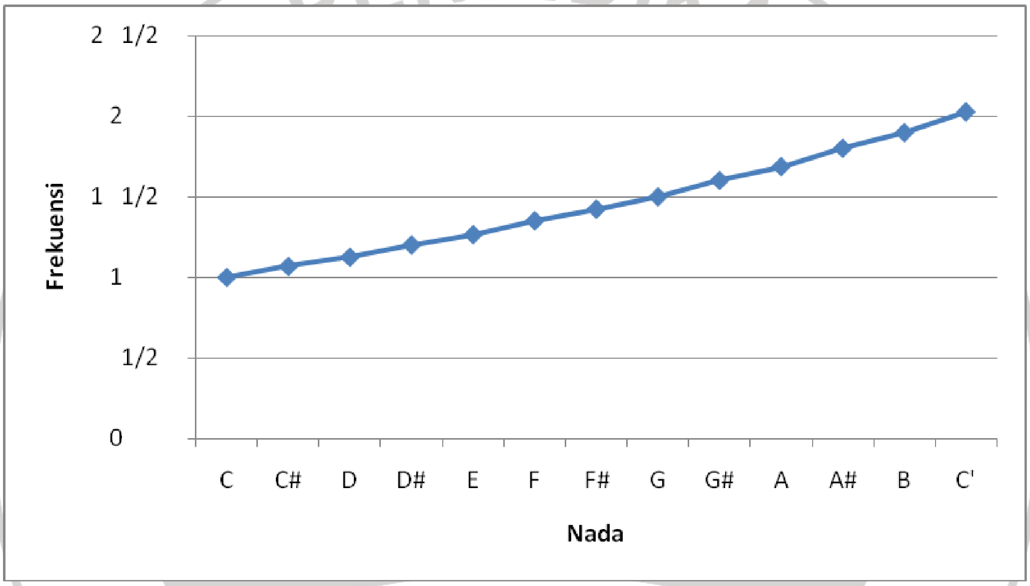
Kosntruksi dimulai dari nada C, misalkan frekuensi C adalah 1, dengan menggunakan aturan 2 dari Pythagoras didapat *perfect fifth* dari C yaitu G dengan frekuensi ${}^{3}/_{2}$. Selanjutnya dari G tersebut *perfect fifth* G yaitu D' dengan frekuensi ${}^{3}/_{2} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{9}/_{4}$. Untuk mendapatkan frekuensi D, gunakan invers dari aturan pertama. Jadi frekuensi D adalah ${}^{9}/_{4} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{9}/_{8}$. Untuk nada-nada berikutnya, disajikan dalam bentuk tabel frekuensi:

Tabel 3.1 Frekuensi menurut Pythagoras

Nada	Frekuensi
C	1
G	${}^{3}/_{2} \cdot 1 = {}^{3}/_{2}$
D	${}^{3}/_{2} \cdot {}^{3}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{9}/_{8}$
A	${}^{9}/_{8} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{27}/_{16}$
E	${}^{27}/_{16} \cdot {}^{3}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{81}/_{64}$
B	${}^{81}/_{64} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{243}/_{128}$
F#	${}^{243}/_{128} \cdot {}^{3}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{729}/_{512}$
C#	${}^{729}/_{512} \cdot {}^{3}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{2187}/_{2048}$
G#	${}^{2187}/_{2048} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{6561}/_{4096}$

D#	$^{6561}/_{4096} \cdot {}^{3}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{19683}/_{16384}$
A#	$^{19683}/_{16384} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{59049}/_{32768}$
F	$^{59049}/_{32768} \cdot {}^{3}/_{2} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{177147}/_{131072}$
C’	$^{177147}/_{131072} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{531441}/_{262144}$

Untuk grafiknya sendiri adalah sebagai berikut:



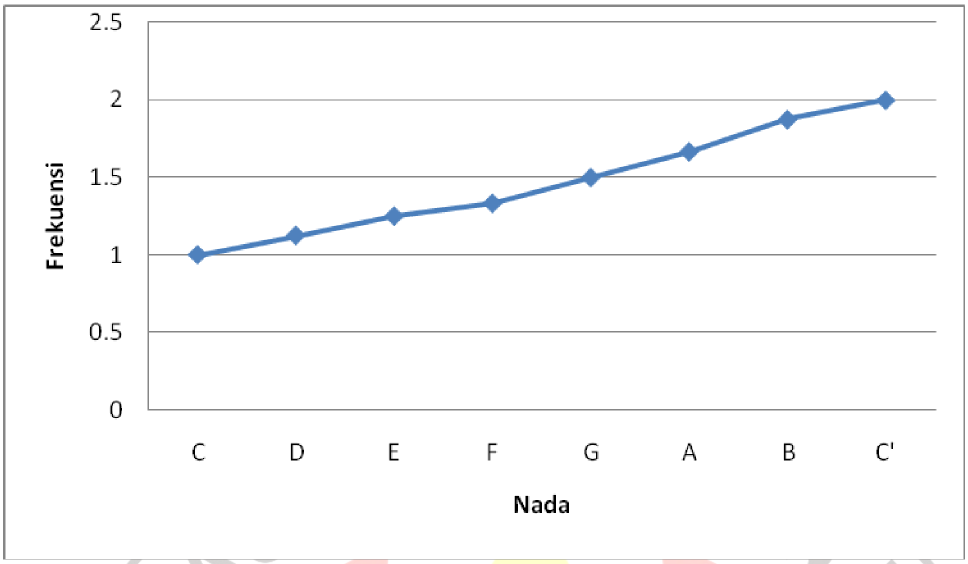
Grafik 3.2 Frekuensi menurut Pythagoras

Dari tabel dan grafik di atas, diketahui frekuensi C’ adalah $^{531441}/_{262144}$. Sehingga jika dicari frekuensi C dari C’ adalah $^{531441}/_{262144} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{531441}/_{524288}$. Di mana $^{531441}/_{524288} = 1{,}0136432647705078125 \ldots$. Seharusnya nilainya itu adalah 1. Ketidaksesuaian ini lebih dikenal dengan *Pythagorean comma.* Namun ketidaksesuaian itu sungguh menghasilkan suatu nilai seni yang tinggi dan menghasilkan nada-nada yang indah. Pada bahasan selanjutnya akan dijelaskan ukuran-ukuran interval nadanya.

Pythagoras hanya menggunakan 4 perbandingan frekuensi (rasio). *Perfect fourth* hanyalah kombinasi dari aturan 1 dan invers aturan 2 Pythagoras. Bagaimana hasil yang diperoleh dengan ditambahkan beberapa rasio frekuensi lainnya? Helmholtz menambahkan beberapa aturan frekuensi nada dari aturan Pythagoras. Seperti untuk *major third* ($^5/_4$) dan *minor third* ($^6/_5$). Helmholtz menentukan sistem untuk 7 nada dasar yang disebut tangga nada diatonik yang mana skala ke-7 nada itu sering menjadi acuan untuk harmonisasi ataupun melodi nada-nada dalam beberapa aliran musik. Harmonisasi nada yang diperoleh terdengar lebih indah. Adapun skala Helmholtz itu adalah:

- C = 1
- D = $^9/_8$
- E = $^5/_4$ (*)
- F = $^4/_3$
- G = $^3/_2$
- A = $^5/_3$ (*)
- B = $^{15}/_8$ (*)
- C' = 2

Di mana Helmoltz hanya menambahkan beberapa frekuensi dari Pythagoras (*). Untuk grafiknya sendiri adalah sebagai berikut:



Grafik 3.3 frekuensi menurut Helmoltz

Tangga nada di atas menggunakan tanga nada diatonik mayor. Di mana intervalnya adalah $1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2}$. Ketujuh nada tersebut memiliki keunikan sendiri.

Akan dilihat keteraturan dan kelemahan dari skala Helmoltz itu. Dengan mengikuti diatonik C mayor, Semua nada-nada *mayor thirds* yang mengikuti skala Helmoltz di atas memiliki rasio yang sama. Yaitu:

- C-E mempunyai rasio ${}^{5}/_{4}$
- F-A mempunyai rasio ${}^{5}/_{3} : {}^{4}/_{3} = {}^{5}/_{4}$
- G-B mempunyai rasio ${}^{15}/_{8} : {}^{3}/_{2} = {}^{5}/_{4}$

Untuk *minor thirds*, skala yang seharusnya adalah ${}^{6}/_{5}$. Namun tidak semua nada *minor thirds* memiliki rasio ${}^{6}/_{5}$. Yaitu:

- E-G mempunyai rasio $^3/_2 : ^5/_4 = ^6/_5$
- A-C' mempunyai rasio $2 : ^5/_3 = ^6/_5$
- D-F mempunyai rasio $^4/_3 : ^9/_8 = ^{32}/_{27}$ (*)
- B-D' mempunyai rasio $^{18}/_8 : ^{15}/_8 = ^6/_5$

Untuk *perfect fifth* sendiri, skala yang seharusnya adalah $^3/_2$. Namun tidak semua nada *perfect fifth* memiliki rasio $^3/_2$. Yaitu:

- C-G mempunyai rasio $^3/_2$
- D-A mempunyai rasio $^5/_3 : ^9/_8 = ^{40}/_{27}$ (*)
- E-B mempunyai rasio $^{15}/_8 : ^5/_4 = ^3/_2$
- F-C' mempunyai rasio $2 : ^4/_3 = ^3/_2$
- G-D' mempunyai rasio $^{18}/_8 : ^3/_2 = ^3/_2$
- A-E' mempunyai rasio $^{10}/_4 : ^5/_3 = ^3/_2$

Untuk *perfect fourth* juga, tidak semua rasionya $^4/_3$. Yaitu:

- C-F mempunyai rasio $^4/_3$
- D-G mempunyai rasio $^3/_2 : ^9/_8 = ^4/_3$
- E-A mempunyai rasio $^5/_3 : ^5/_4 = ^4/_3$
- G-C' mempunyai rasio $2 : ^3/_2 = ^4/_3$
- A-D' mempunyai rasio $^{18}/_8 : ^5/_3 = ^{27}/_{20}$ (*)

Dari uraian di atas, untuk sistem Helmoltz ini dapat disimpulkan bahwa kunci-kunci *mayor thirds* yang ada lebih baik dibanding dengan yang lainnya. Karena semua rasionya sama. Berbeda dengan kunci-kunci lainnya yang memiliki ketidaksesuaian.

Untuk rasio-rasio (*) terdapat ketidaksesuaian. Jika dicari faktor yang membedakannya:

- Rasio D-F adalah $^{32}/_{27}$ yang seharusnya $^{6}/_{5}$. Maka $^{6}/_{5} : {}^{32}/_{27} = {}^{81}/_{80}$
- Rasio D-A adalah $^{40}/_{27}$ yang seharusnya $^{3}/_{2}$. Maka $^{3}/_{2} : {}^{40}/_{27} = {}^{81}/_{80}$
- Rasio A-D' adalah $^{27}/_{20}$ yang seharusnya $^{4}/_{3}$. Maka $^{4}/_{3} : {}^{27}/_{20} = {}^{81}/_{80}$

Ketidaksesuaian di atas disebut dengan *syntonic comma*.