

BAB III

PENGENDALIAN KUALITAS MULTIVARIAT

Seperti yang telah dibahas pada bab sebelumnya bahwa untuk menghasilkan produk dengan kualitas yang baik, haruslah dilakukan pengendalian pada proses produksinya. Hal ini diharapkan proses produksinya akan stabil dan bisa menghasilkan produk yang benar-benar berkualitas serta sesuai spesifikasi. Berbagai industri berupaya untuk menjaga kualitas produksinya salah satunya melalui metode *Statistical Process Control* (SPC). Oleh karena itu, pada bab ini akan dijelaskan mengenai SPC. Selain SPC, pada bab ini juga akan diuraikan peta kendali untuk mengontrol kasus multivariat berdasarkan pengamatan individual yaitu peta kendali Hotelling T^2 individual.

3.1 *Statistical Process Control*

Statistical Process Control (SPC) merupakan sebuah alat statistika yang mampu mengontrol dan memonitor suatu proses produksi. SPC merupakan kumpulan metode untuk mengenali sebab khusus (*special causes*) dan membawa proses ke dalam keadaan terkendali, serta mengurangi variasi. Menurut Iriawan dan Astuti (2006:314) ada dua tipe variasi proses, yaitu:

1. Variasi random (*common cause variation*)

Variasi random (*common cause variation*) yaitu variasi yang tidak bisa dihindari. Variasi random ini terjadi karena faktor-faktor yang tidak dapat atau sulit untuk dikendalikan. Variasi random terjadi secara normal, maka bila variasi

suatu proses termasuk ke dalam tipe ini, akan dikategorikan dalam batas kendali statistik. Contohnya kelembaban udara, suhu ruangan, dll.

2. Variasi assignable (*assignable causes variation*)

Variasi assignable (*assignable causes variation*) yaitu variasi yang bisa dihindari, variasi ini disebabkan oleh faktor-faktor yang dapat dikendalikan. Apabila suatu proses tergolong variasi ini, maka proses dikatakan di luar kendali statistik (*out of statistical control*). Menurut Smith (1998), jika suatu proses mengalami ketidakstabilan (*out of statistical control*) yang disebabkan oleh variasi yang bisa dihindari (*assignable causes variation*), maka proses yang di luar kendali statistik dapat dieliminasi dari suatu proses produksi tersebut. Contohnya keadaan mesin yang digunakan, bahan baku, kurang cermatnya operator, dll.

SPC banyak menggunakan alat-alat statistik untuk membantu mencapai tujuannya, salah satunya adalah peta kendali (*control chart*). Peta kendali merupakan representatif grafis dari sebuah karakteristik kualitas yang dihasilkan melalui proses pengukuran dari proses manufaktur.

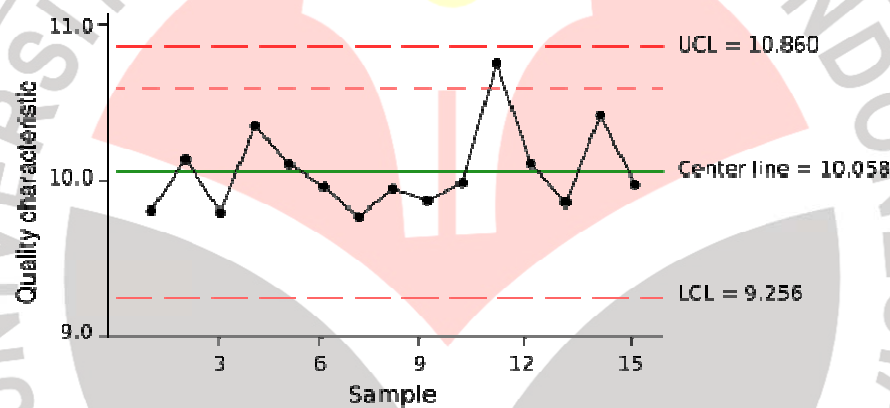
Secara umum terdapat tiga garis pada grafik pengendali, yaitu:

1. Garis tengah atau *CenterLine* (CL), yaitu sebuah garis yang menunjukkan rata-rata dari suatu karakteristik kualitas tertentu yang diplot pada grafik pengendali tersebut.
2. Batas atas kendali atau *Upper Control Limit* (UCL), yaitu sebuah garis yang merupakan batas atas pengendalian yang digunakan untuk membuat keputusan suatu proses.

3. Batas bawah kendali atau *Lower Control Limit* (LCL), yaitu sebuah garis yang merupakan batas bawah pengendalian yang digunakan untuk membuat keputusan suatu proses.

Suatu proses dikatakan berada dalam kendali statistik (*in statistical control*) jika nilai pengamatannya jatuh diantara garis UCL dan LCL. Namun, ketika ada nilai pengamatan yang jatuh di luar aris UCL dan LCL maka ada proses yang tidak terkendali (*out of statistical control*).

Berikut ini adalah gambar contoh peta kendali.



Gambar 3.1 Contoh Peta Kendali

Untuk mendeteksi adanya proses yang tidak terkendali tidak hanya ditandai dengan adanya nilai pengamatan yang diluar batas kendali. Kriteria lain untuk mendeteksi hal tersebut diantaranya ada sembilan titik yang secara berurutan jatuh di sisi yang sama dari garis tengah, ada enam titik yang secara berurutan terus naik atau terus turun, ada empat belas titik yang secara bergantian naik-turun (Iriawan dan Astuti, 2006:316).

Berdasarkan banyaknya karakteristik kualitas yang akan diukur, peta kendali dibagi menjadi dua jenis. Yang pertama adalah peta kendali univariat

yang diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart, peta kendali ini digunakan jika hanya ada satu karakteristik kualitas yang akan diukur, peta kendali ini dikenal sebagai *peta kendali Shewhart*. Sedangkan untuk mengukur dua atau lebih karakteristik kualitas secara bersamaan digunakan peta kendali multivariat yang diperkenalkan oleh Harold Hotelling, peta kendali ini dikenal sebagai *peta kendali Hotelling T^2* .

Peta kendali Hotelling T^2 mempunyai dua versi yaitu peta kendali Hotelling T^2 untuk data subgroup dan peta kendali Hotelling T^2 untuk individual observasi. Fokus pada tugas akhir ini menggunakan peta kendali Hotelling T^2 untuk individual observasi untuk mengukur karakteristik kualitasnya.

3.2 Peta Kendali Hotelling T^2 Individual

Seperti yang telah dijelaskan dalam pembahasan sebelumnya, alat yang dapat digunakan untuk mengontrol dan memonitor suatu proses produksi adalah peta kendali. Peta kendali Hotelling T^2 merupakan peta kendali yang digunakan untuk mengendalikan vektor rata-rata dari proses multivariat. Peta kendali Hotelling T^2 individual digunakan apabila ukuran subgroup sampel (n) yang digunakan adalah satu ($n = 1$).

Misalkan $\mathbf{X} = \{x_i\}$ adalah matriks acak berukuran m dan berdistribusi normal p -variat, dengan fungsi kepadatan normal multivariat dari X dinotasikan oleh $X_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$. Dengan matriks data sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mp} \end{bmatrix}$$

dimana m menyatakan banyaknya sampel dan p menyatakan banyaknya karakteristik kualitas.

Pada peta kendali Hotelling T^2 , data yang dipakai akan dihitung vektor rata-rata dan matriks kovariannya dengan menggunakan perhitungan kovarians sebagai berikut:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \quad (3.1)$$

Namun, ternyata hasil perhitungan dengan menggunakan perhitungan kovarians diatas dianggap kurang efektif dalam mendeteksi pergeseran vektor rata-ratanya. Hal ini dikarenakan nilai matriks kovariansinya ternyata tidak cukup dekat dengan nilai matriks kovarians yang sesungguhnya.

Pada tahun 1995 Sullivan dan Woodall melakukan penelitian untuk mencari metode yang lebih efisien untuk menghitung nilai matriks kovariansinya. Mereka membandingkan beberapa metode yang ada dengan standar perbandingan nilai kovarians sebenarnya yaitu Σ . Metode-metode tersebut diantaranya:

1. Perhitungan matriks kovarians dengan menggunakan persamaan (3.1).
2. Metode yang kedua diawali dengan membagi data pengamatan menjadi $p + 1$ kelompok, kemudian menghitung matriks kovarians tiap kelompoknya dengan persamaan (3.1). Setelah itu dirata-ratakan sehingga didapat matriks kovarians dari metode yang kedua ini.
3. Metode ketiga ini dilakukan oleh Holmes dan Mergen tahun 1993. Metode yang ketiga ini menggunakan selisih dua vektor pengamatan secara berurutan (*successive difference*), yaitu:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1$$

Dalam bentuk matriks *successive difference* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)' \\ (x_3 - x_2)' \\ \vdots \\ (x_m - x_{m-1})' \end{bmatrix}$$

Dimana v_i merupakan vektor selisih antara vektor data ke- i dan vektor data ke- $i+1$. Kemudian menghitung matriks kovariansnya dengan persamaan berikut:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}'\mathbf{V}}{(m-1)}$$

Dari hasil penelitiannya diperoleh bahwa metode yang efisien untuk menghitung matriks kovarian dari data pengamatan adalah metode (*successive difference*) yang diperkenalkan oleh Holmes dan Mergen tahun 1993.

Metode *successive difference* ini akan digunakan untuk menghitung nilai matriks kovarians yang nantinya akan digunakan untuk menghitung nilai statistik Hotelling T^2 individual. Dari matriks *successive difference*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)' \\ (x_3 - x_2)' \\ \vdots \\ (x_m - x_{m-1})' \end{bmatrix}$$

dimana \mathbf{V} berdistribusi $N_p \sim (0, 2\Sigma)$, akan dicari penaksir matriks kovarians $(n-1)\mathbf{S}_v$ yaitu $\mathbf{S}_v = \frac{1}{2} \mathbf{V}'\mathbf{V}$. Sehingga penaksir matriks kovarians untuk Σ adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{(m-1)} \mathbf{S}_v$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}'\mathbf{V}}{(m-1)} \quad (3.2)$$

Setelah menghitung nilai matriks kovarians pada persamaan (3.2), selanjutnya menghitung nilai statistik Hotelling T^2 individual dengan persamaan:

$$T_i^2 = (x_i - \bar{x})' \mathbf{S}^{-1} (x_i - \bar{x}) \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

dimana \bar{x} adalah vektor rata-rata dari sampel pengamatan.

Sama halnya seperti kasus pengendalian kualitas yang lain, pengendalian kualitas multivariat dengan menggunakan peta kendali Hotelling T^2 individual juga memiliki batasan kontrolnya. Batasan-batasan kontrol yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Untuk μ dan Σ yang diketahui

Statistik Hotelling T^2 proporsional untuk distribusi χ^2 dengan derajat bebas p . Sehingga sinyal *out of control* terdeteksi jika nilai statistik Hotelling $T_i^2 > \chi_p^2$. Jika terdeteksi *out of control* maka proses dinyatakan tidak terkontrol atau tidak stabil.

2. Untuk μ dan Σ yang tidak diketahui

Statistik Hotelling T^2 proporsional untuk distribusi Beta dengan parameter $\alpha = \frac{p}{2}$ dan $\beta = \frac{(f-p-1)}{2}$,

$$T_i^2 \frac{m}{(m-1)^2} \sim B\left(\frac{p}{2}, \frac{f-p-1}{2}\right)$$

Dimana $f = \frac{2(m-1)^2}{3m-4}$ yang diperkenalkan oleh Schoholz dan Tosch tahun 1994

yang diperoleh dari pendekatan distribusi Wishart $W_p(f, \Sigma)$. Ide ini didasari oleh metode *Satterthwaite* yaitu pendekatan distribusi kuadrat. Karena

statistik Hotelling T^2 proporsional untuk distribusi Beta, maka sinyal *out of control* terdeteksi jika nilai statistik Hotelling $T_i^2 > \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha; p/2, (f-p-1)/2}$. Jika terdeteksi *out of control* maka proses dinyatakan tidak terkontrol atau tidak stabil.

Adapun pendekatan distribusi Wishart untuk memperoleh nilai f adalah sebagai berikut:

Diketahui matriks $\mathbf{X}' = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ dimana $x_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Sehingga jika $\mathbf{v} = \mathbf{X}\ell$, dimana ℓ merupakan vektor konstanta berukuran $(p \times 1)$, maka $\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i' \ell$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \sigma_\ell^2)$. Perhitungan *successive difference* (Y) jika ditulis dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 - x'_1 \\ x'_3 - x'_2 \\ x'_4 - x'_3 \\ \vdots \\ x'_m - x'_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ \vdots \\ y'_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DX} = \mathbf{Y}$$

Diketahui bahwa matriks $\mathbf{A} = \mathbf{D}'\mathbf{D}/2$ dimana matriks \mathbf{A} merupakan matriks simetri berukuran $m \times m$ dengan *rank*nya adalah r . Berdasarkan matriks \mathbf{A} dan berdasarkan pendekatan distribusi Wishart yaitu,

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$$

dengan elemen diagonal ke- j dari $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ berdistribusi $\sigma_{jj} \chi_m^2$ dan $\mathbf{X}'\mathbf{X} \sim W_m(\mathbf{m}, \Sigma)$, maka jika $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} \sim \sigma_{jj}^2 \chi_m^2$ yang dimana $\sigma_\ell^2 = \ell' \Sigma \ell$ dapat

disimpulkan bahwa $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$. Kemudian melalui pendekatan *Satterthwaite* yaitu

$$\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v} \approx \sigma_\ell^2 \chi_f^2$$

diperoleh perhitungan *mean* dan varians sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}\right) &= E\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \frac{\mathbf{D}' \mathbf{D}}{2} \mathbf{v}\right) \\ &= E\left(\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^2\right) \\ &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} E((\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^2) \\ &= \frac{1}{2\alpha} ((m-1)2\sigma_\ell^2) \\ E\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}\right) &= \frac{m-1}{\alpha} \sigma_\ell^2 \\ \text{Var}\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}\right) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \frac{\mathbf{D}' \mathbf{D}}{2} \mathbf{v}\right) \\ &= \text{Var}\left(\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^2\right) \\ \text{Var}\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}\right) &= \frac{\sigma_\ell^4}{\alpha^2} (3m-4) \end{aligned}$$

Berdasarkan distribusi *Chi-Square* dimana χ_f^2 yang mempunyai *mean* = f dan varians = $2f$, maka $\sigma_\ell^2 \chi_f^2$ mempunyai *mean* = $f\sigma_\ell^2$ dan bervarians = $2f\sigma_\ell^2$. Maka dengan membandingkan *mean* dan varians antara pendekatan *Satterthwaite* dan distribusi *Chi-Square* di atas maka akan diperoleh dua persamaan sebagai berikut:

$$\frac{n-1}{\alpha} \sigma_\ell^2 = f \sigma_\ell^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{\sigma_\ell^4}{\alpha^2} (3n-4) = 2f \sigma_\ell^4 \quad (3.6)$$

Dengan cara mensubstitusikan persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.6) maka diperoleh nilai α dan f sebagai berikut:

$$\alpha = \frac{3n-4}{2(n-1)} \quad \text{dan} \quad f = \frac{2(n-1)^2}{3n-4}$$

Nilai f tersebut akan digunakan untuk menghitung batas kontrol dari nilai statistik Hotelling T^2 .

3.3 Prosedur Pembangunan Peta Kendali Hotelling T^2

Prosedur untuk membangun peta kendali Hotelling T^2 ini melalui dua tahapan, yaitu tahap pertama yang disebut *start-up stage* dan tahap pengendalian proses. Tahap pertama merupakan tahap penaksir batas-batas kendali berdasarkan data historis, sedangkan tahap yang kedua adalah tahap aplikasi peta kendali yang diperoleh dari tahap pertama.

3.3.1 Tahap Pertama (Tahap *Start-Up Stage*)

Tahap pertama ini merupakan tahap mengontrol data di masa lalu, yaitu mengontrol *mean* prosesnya dengan menggunakan peta kendali Hotelling T^2 individual sampai *mean* prosesnya terkontrol. Setelah itu akan diperoleh juga batas kendali dan nilai kovarians yang nantinya akan digunakan untuk tahap pengendalian yang kedua. Pada dasarnya tahap pertama ini bertujuan untuk

menentukan batas kendali dan nilai kovarians dari data historis yang nantinya digunakan untuk pengendalian tahap berikutnya.

Tahap awal untuk membangun peta kendali ini dapat diringkas melalui langkah-langkah di bawah ini.

1. Menghitung rata-rata setiap karakteristik kualitas yang akan dikendalikan.

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dengan m merupakan banyaknya pengamatan tiap karakteristik kualitas.

2. Menghitung matriks varians-kovarians tiap karakteristik kualitas.

$$S = \frac{1}{2(m-1)} V'V$$

3. Hitung nilai statistik Hotelling T^2 .

$$T_i^2 = (x_i - \bar{x})' S^{-1} (x_i - \bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

4. Untuk setiap pengamatan $i = 1, 2, \dots, m$, bandingkan T^2 dengan batas-kendali sebagai berikut :

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha; p/2, (f-p-1)/2} \text{ dengan } f = \frac{2(m-1)^2}{3m-4}$$

$$LCL = 0, \text{ karena } T^2 \geq 0 \text{ (tidak akan pernah negatif).}$$

Jika $T^2 > UCL$, maka data pengamatan ke- i berada di luar kendali statistik (*out of control*), sehingga data pada pengamatan tersebut tidak dapat digunakan untuk menghitung batas-batas kendali.

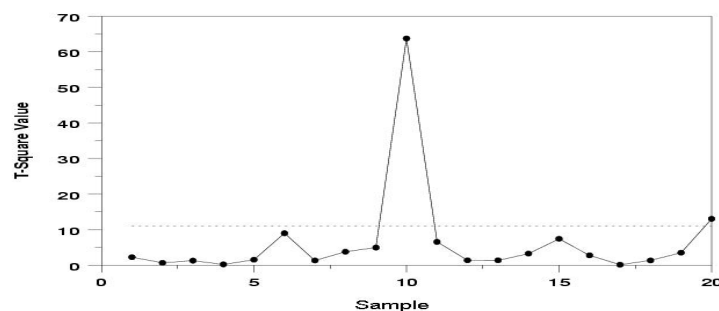
5. Buatlah diagram peta kendali dengan cara memplot semua nilai T_i^2 , untuk setiap sampelnya.

6. Jika nilai T_i^2 berada di luar batas kendali, maka sampel ke- i dikatakan *out of control*, dan jika disebabkan oleh *assignable causes*, maka sampel ke- i tersebut dapat dihapus.
7. Kemudian hitung kembali \bar{X} dan S dengan menggunakan data-data pengamatan yang *in control*.

Setelah keenam langkah pada tahap awal ini dilakukan, dan proses yang dihasilkan adalah proses yang *in control*, maka akan dihasilkan nilai \bar{X} dan S yang kemudian akan digunakan untuk pengendalian proses pada tahap selanjutnya.

3.3.2 Tahap Kedua (Tahap Pengendalian)

Pada tahap pengendalian karakteristik kualitas ini menggunakan data masa yang akan datang, dengan acuan batasan kendali yang diperoleh dari tahap pengendalian awal. Misalkan pada tahap awal suatu pengamatan karakteristik kualitas diperoleh data yang sudah *in control*, maka akan diperoleh juga nilai vektor rerata, nilai matriks varians kovarians, dan nilai batasan kontrol. Nilai-nilai tersebut akan digunakan pada tahap ini untuk mengendalikan karakteristik kualitas pada pengamatan berikutnya.



Gambar 3.2 Contoh Peta Kendali Hotelling T^2

3.4 Analisis Kapabilitas Proses (*Process Capability Analyze*)

Analisis kapabilitas proses merupakan suatu studi untuk mengestimasi kapabilitas proses produksi suatu produk. Tujuannya adalah untuk mencegah dihasilkannya produk cacat lebih banyak (Mayaranie, 2009:25). Kapabilitas proses juga merupakan suatu kemampuan proses yang merefleksikan apakah produk yang dihasilkan sudah memenuhi spesifikasinya.

Menurut Montgomery (2001:351), kegunaan analisis kapabilitas proses antara lain adalah:

1. Memprediksi seberapa baik proses dalam memenuhi spesifikasi yang telah ditetapkan
2. Membantu dalam memilih ataupun memodifikasi sebuah proses produksi
3. Menentukan syarat performansi peralatan yang baru
4. Membantu dalam memilih pemasok
5. Merencanakan tahapan proses
6. Mengurangi variabilitas dalam proses manufaktur. Hasil analisis ini dinyatakan dengan indeks kapabilitas proses.

Suatu proses produksi dikatakan memiliki kapabilitas yang baik bila:

1. Proses tersebut dalam kondisi terkendali
2. Proses tersebut memenuhi spesifikasi.
3. Proses tersebut memiliki nilai presisi dan akurasi yang tinggi
 - Akurasi adalah kedekatan nilai pengamatan dengan nilai sasarannya
 - Presisi adalah kedekatan nilai pengamatan yang satu dengan nilai pengamatan yang lainnya (Ninindya, 2008).

Seperti yang telah disebutkan bahwa salah satu kegunaan dari analisis kapabilitas proses adalah untuk mengurangi variabilitas dalam proses manufaktur dan hasil dari analisis tersebut dinyatakan dengan indeks kapabilitas proses (*Capability index*). *Capability index* merupakan pengukuran terhadap kemampuan proses dalam menghasilkan suatu produk yang memenuhi spesifikasi (Montgomery, 2001). Sehingga indeks kapabilitas proses Multivariat (*Multivariate Capability index*) merupakan suatu indeks yang menggambarkan seberapa jauh proses tersebut dapat memenuhi spesifikasi yang diharapkan, atau dapat didefinisikan pula sebagai suatu indeks proses yang menunjukkan nilai rasio antara penyebaran (variabilitas) spesifikasi produk yang diijinkan terhadap spesifikasi produk yang diperbolehkan antara penyebaran actual yang melibatkan lebih dari satu variabel.

Ada beberapa macam metode yang digunakan untuk perhitungan indeks kapabilitas multivariat. Misalnya indeks kapabilitas proses multivariat vektor, indeks kapabilitas proses multivariat MC_{pm} , dan indeks kapabilitas proses multivariat MC_p .

Pada tugas akhir ini metode dalam perhitungan indeks kapabilitas multivariat menggunakan metode indeks kapabilitas proses MC_{pm} . Metode indeks kapabilitas proses MC_{pm} diperkenalkan pertama kali oleh Taam, Subbaiah, dan Liddy pada tahun 1993. Perhitungan indeks kapabilitas proses dengan metode ini dinilai lebih sensitif dan lebih mudah untuk diterapkan. Kelebihan lain dari metode ini juga dapat mengindikasikan *variability*, *centeredness*, dan keduanya (Scagliarini & Vermiglio : 2007).

Menurut Scagliarini & Vermiglio (2007) menjelaskan bahwa Perhitungan indeks kapabilitas proses MC_{pm} ini didefinisikan sebagai rasio dari dua buah volume, yaitu sebagai berikut:

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol(R_2)} \quad (3.3)$$

dimana R_1 merupakan daerah toleransi modifikasi, sedangkan R_2 merupakan daerah proses 99,72% yang merupakan daerah yang terletak pada daerah $\pm 3\sigma$. Apabila data pengamatan berdistribusi normal multivariat, maka daerah R_2 berbentuk ellips, sedangkan R_1 (daerah toleransi modifikasi) adalah ellipsoid terbesar yang berpusat pada target yang berada di dalam daerah toleransi yang asli.

Dalam kasus umum p -variat, R_1 berbentuk hiperellipsoid dengan volume R_1 Kendall (1961) (dalam Ninindya, 2008) sebagai berikut:

$$vol(R_1) = \frac{2 \prod_{i=1}^p a_i \pi^{p/2}}{p \Gamma(p/2)}$$

dimana a_i merupakan nilai toleransi spesifikasi ke- i dengan $i = 1, 2, \dots, p$. Indeks kapabilitas proses Multivariat (*Multivariate Capability index*) ini dituliskan sebagai:

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol[(X - \mu)' \Sigma_{\mu_0}^{-1} (X - \mu)] \leq K(p)} \quad (3.4)$$

Dengan X adalah vektor acak berukuran $(p \times 1)$ yang berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata μ dan matriks kovarians Σ , $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$.

Sedangkan $\Sigma_{\mu_0} = E\left((X - \mu_0)(X - \mu_0)'\right)$ adalah matriks *mean square error* dari

proses, μ_0 adalah suatu vektor yang menyatakan nilai target, dan $K(p)$ adalah 99,73 persentil dari χ^2 dengan derajat kebebasan p .

Penyebut dari indeks kemampuan proses MC_{pm} juga dapat dinyatakan sebagai hasil dari dua persamaan.

$$\begin{aligned} Vol(R_2) &= |\Sigma|^{1/2} (\pi K(p))^{p/2} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \right]^{-1} \times [1 + (\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)]^{1/2} \\ &= Vol(R_3) \times [1 + (\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dengan R_3 adalah daerah dimana 99,73% dari suatu proses berada dalam wilayah tersebut.

Oleh karena itu berdasarkan persamaan (3.3) dan persamaan (3.5) MC_{pm} dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} MC_{pm} &= \frac{Vol(R_1)}{Vol(R_3) \times [1 + (\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)]^{1/2}} \\ &= \frac{Vol(R_1)}{Vol(R_3)} \frac{1}{[1 + (\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)]^{1/2}} \\ MC_{pm} &= \frac{C_p}{D} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.6) indeks kapabilitas proses multivariat MC_{pm} terdiri dari dua komponen yaitu C_p dan D . Dimana C_p merupakan variabilitas proses untuk daerah toleransi modifikasi, sedangkan D merupakan deviasi proses dari target. Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak berukuran n , masing-masing berdimensi p , maka perkiraan atau taksiran dari indeks MC_{pm} adalah sebagai berikut:

$$\hat{MC}_{pm} = \frac{Vol(R_1)}{|\Sigma|^{1/2} (\pi K)^{p/2} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \right]^{-1}} \times \frac{1}{\left[1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \right]^{1/2}}$$

$$\widehat{M}C_{pm} = \frac{\widehat{C}_p}{\widehat{D}}$$

dengan

$$\begin{aligned}\widehat{C}_p &= \frac{Vol(R_1)}{Vol(\text{skala proses } 99,73\%)} \\ &= \frac{Vol(R_1)}{|S|^{1/2}(\pi K)^{p/2} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \right]^{-1}}\end{aligned}$$

dan

$$\widehat{D} = \left[1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \right]^{1/2}$$

dimana K adalah quantil 99,73 dari distribusi chi-square (χ^2).

Ketika vektor rata-rata proses sama dengan vektor target dan indeksnya bernilai satu, maka 99,73% nilai proses terletak di dalam daerah toleransi modifikasi. Perkiraan indeks \widehat{C}_p analog dengan indeks C_p pada kasus univariat yaitu jika indeks bernilai lebih dari satu maka proses mempunyai variansi yang lebih kecil dibandingkan dengan batas spesifikasi, sedangkan jika indeks bernilai kurang dari satu maka proses mempunyai variansi yang lebih besar dibandingkan dengan batas spesifikasi. Untuk $0 < 1/\widehat{D} < 1$ menunjukkan kedekatan antara *mean* proses dengan target, semakin besar nilai $1/\widehat{D}$ maka *mean* semakin dekat dengan target.