BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Topik mengenai urutan sering digunakan dalam Matematika, termasuk topik yang membahas urutan total. Urutan total $\leq$ pada himpunan G merupakan sebuah urutan (urutan parsial) yang *comparable*, dengan kata lain, urutan total adalah relasi biner pada G yang memenuhi sifat *transitive*, *antisymmetric*, *reflexive*, dan untuk setiap dua elemen $a \neq b$ dari G memenuhi $a < b$ atau $b < a$ (tidak mungkin keduanya karena sifat *asymmetry*) [6], [10], [9], [7]. Jika himpunan G tersebut adalah grup abel di bawah operasi penjumlahan (atau perkalian) dengan suatu kondisi tambahan maka G termasuk grup abel yang terurut total.

Dengan demikian, sebuah grup abel terurut total dapat diartikan secara formal sebagai sebuah grup abel $(G, +)$ yang terdefinisi sebuah urutan total $\leq$ dan memenuhi hukum *monotony* atau homogen (urutan diawetkan di bawah operasi penjumlahan) [10], [5], yaitu jika $a \leq b$ maka $c + a \leq c + b$ dan $a + c \leq b + c$ untuk semua $c \in G$, atau *compatibility law* [10] yaitu jika $a \leq b$ maka $a + c < b + c$. Contoh dari grup abel terurut total di antaranya adalah grup bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan dengan urutan biasa "kurang dari atau sama dengan" ("$\leq$").

Pada sebuah grup abel terurut total, dapat diperoleh ideal-ideal urutan. Misalkan $(\Gamma, +, \leq)$ adalah grup abel terurut total dengan *positive cone* yang dinotasikan dengan Γ^+. Ideal urutan dari Γ adalah subgrup I dari Γ yang mengawetkan urutan [12], dengan kata lain, jika $x \in \Gamma^+$ dan $y \in I^+$ dengan $x \leq y$, maka $x \in I$. Dalam [12], himpunan ideal urutan dalam Γ terurut total di bawah inklusi yang dilambangkan dengan $\sum(\Gamma)$.

Ideal urutan juga dapat diperoleh dari grup abel terurut total berupa jumlah langsung leksikografik dari dua grup abel yang terurut total, contohnya pada grup abel terurut total $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$. Rosjanuardi dan Itoh [11] menunjukan bahwa ideal urutan nontrivial satu-satunya dari $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ adalah $I = \{(0, n) | n \in \mathbb{Z}\}$.

Dengan menggunakan fakta bahwa setiap subgrup dari $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ di mana $n \in \mathbb{N}$ [3], diperoleh bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, subgrup $n\mathbb{Z}$ dari $\mathbb{Z}$ bukanlah ideal urutan sehingga diperoleh $\mathbb{Z}$ tidak memiliki ideal urutan non trivial, artinya ideal urutan dari $\mathbb{Z}$ hanyalah 0 dan $\mathbb{Z}$ itu sendiri. Hasil yang sama diperoleh untuk grup abel terurut total $\mathbb{R}$. Setiap subgrup dari $\mathbb{R}$ adalah subhimpunan *dense* di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik [14], di mana keduanya tidak mengawetkan urutan. Sehingga, $\mathbb{R}$ tidak memiliki ideal urutan nontrivial. Dari fakta-fakta tersebut, muncul pertanyaan: apakah grup abel yang terurut total $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ tidak memiliki ideal urutan nontrivial seperti grup $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$?

1.2 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk memperoleh gambaran ideal urutan nontrivial dari grup abel terurut total $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

1.3 Rumusan Masalah

Diberikan grup abel terurut total $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

1. Apakah $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ memiliki ideal urutan nontrivial? Jika ya, bagaimanakah bentuk dari ideal urutan nontrivial dari Γ_1?
2. Apakah $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ memiliki ideal urutan nontrivial? Jika ya, bagaimanakah bentuk dari ideal urutan nontrivial dari Γ_2?

1.4 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah diperolehnya gambaran ideal urutan nontrivial dari grup abel terurut total $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari lima bab. Bab pertama merupakan pendahuluan dari skripsi ini, berisi latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan. Pada bagian latar belakang, penulis menjelaskan hal-hal yang melatarbelakangi pemilihan topik dan masalah penelitian mengenai ideal urutan non trivial pada grup abel terurut $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$. Topik dan masalah yang akan diteliti kemudian dikonstruksi menjadi dua buah rumusan masalah dengan penyelesaian masalah tersebut sebagai tujuan dari skripsi ini.

Dalam penyelesaian masalah yang dirumuskan di bab pertama, penulis melakukan studi literatur dari berbagai buku dan jurnal. Kajian pustaka atau sumber-sumber studi literatur yang digunakan tersebut dimuat pada bab kedua skripsi ini. Selanjutnya, metode penelitian yang digunakan selama melakukan studi literatur dan membahas topik dari skripsi ini dipaparkan pada bab ketiga.

Pembahasan secara lebih rinci mengenai masalah dari skripsi ini diuraikan pada bab keempat dengan menggunakan definisi, lemma, teorema dan contoh yang telah disusun pada bab kedua. Kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya dari skripsi ini kemudian dijelaskan pada bab kelima.