Ideal Urutan pada Jumlah Langung Leksikografik dari Grup Abel Terurut Total $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$

SKRIPSI

diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika

oleh

Eneng Riska Nuraeni

NIM 1900737

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2023

IDEAL URUTAN PADA JUMLAH LANGSUNG LEKSIKOGRAFIK DARI GRUP ABEL TERURUT TOTAL $\mathbb{R}$ DAN $\mathbb{Z}$

Oleh

Eneng Riska Nuraeni

Sebuah skripsi yang diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika Kelompok Bidang Keahlian Aljabar

Universitas Pendidikan Indonesia

April 2023

LEMBAR PENGESAHAN

ENENG RISKA NURAENI

IDEAL URUTAN PADA JUMLAH LANGSUNG LEKSIKOGRAFIK DARI GRUP ABEL TERURUT TOTAL ℝ DAN ℤ

disetujui dan disahkan oleh:

Pembimbing I,

11/4/2023

Prof. Dr. Rizky Rosjanuardi, M.Si.

NIP. 196901191993031001

Pembimbing II,

11/4/2023

Imam Nugraha Albania, M.Pd., Ph.D.

NIP. 198604062010121003

Mengetahui,

Ketua Departemen Pendidikan Matematika,

Dr. H. Dadang Juandi, M.Si.

NIP. 196401171992021001

ABSTRAK

Setiap subgrup dari grup abel terurut total $\mathbb{R}$ adalah subhimpunan *dense* di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik, sedangkan setiap subgrup dari grup abel terurut total $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ di mana $n \in \mathbb{N}$. Dengan memeriksa sifat mengawetkan urutan pada setiap bentuk subgrup nontrivial dari masing-masing grup, diperoleh bahwa setiap subgrup nontrivial dari $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ bukanlah ideal urutan. Misalkan $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ adalah grup abel terurut total. Bentuk umum setiap subgrup dari Γ_1 adalah $G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$ dengan $G \leq \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sedangkan bentuk umum dari Γ_2 adalah dan $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$. Selanjutnya, periksa sifat mengawetkan urutan dari setiap bentuk subgrup nontrivial dari Γ_1 diperoleh bahwa Γ_1 memiliki ideal urutan nontrivial meskipun $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ tidak memiliki ideal urutan nontrivial. Satu-satunya subgrup nontrivial dari Γ_1 yang mengawetkan urutan adalah $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$. Dengan metode serupa, diperoleh satu-satunya ideal urutan yang nontrivial dari Γ_2 adalah $J = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

Kata kunci: ideal urutan, subgrup, grup abel terurut total, jumlah langsung leksikografik, nontrivial

ABSTRACT

Every subgroup of the totally ordered abelian group $\mathbb{R}$ *is a dense subset in* $\mathbb{R}$ *or a cyclic subgroup, while every subgroup of the totally ordered abelian group of* $\mathbb{Z}$ *is* $n\mathbb{Z}$ *where* $n \in \mathbb{N}$. *By examining the order preservation in each nontrivial subgroup of each group, it is found that all nontrivial subgroups of* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{Z}$ *are not order ideal. Let* $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ *and* $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ *be totally ordered abelian groups. The general subgroup form of* Γ_1 *is* $G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$ *with* $G \leq \mathbb{R}$ *and* $n\mathbb{Z} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *while the general subgroup form of* Γ_2 *is* $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$. *Next, by examining the order-preserving condition of each nontrivial subgroup of* Γ_1, *we obtained that* Γ_1 *has a nontrivial order ideal even though* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{Z}$ *do not have nontrivial order ideal. The only nontrivial subgroup of* Γ_1 *that order preserves is* $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$. *Using a similar method, the only nontrivial order ideal of* Γ_2 *is* $J = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

Keywords: order ideal, subgroup, totally ordered abelian groups, lexicographic direct sum, nontrivial.

DAFTAR ISI

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adji, S., & Raeburn, I. (2004). The Ideal Structure of Toeplitz Algebras. Integral Equations and Operator Theory, 48(3), 281-293.

[2] Bartle, R. G., & Bartle, R. G. (1964). The Elements of Real Analysis (Vol. 2). New York: Wiley.

[3] Clark, A. (1984). Elements of Abstract Algebra. New York: Dover Publication, Inc.

[4] Fuchs, L. (1963). Partially Ordered Algebraic Systems. New York: Dover Publications, Inc.

[5] Goodearl, K. R. (1986). Partially Ordered Abelian Groups with Interpolation (No. 20). American Mathematical Soc.

[6] Halmos, P. R. (1960). Naive set theory. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

[7] Harzheim, E. (2005). Ordered sets (Vol. 7). Springer Science & Business Media.

[8] Herstein, I. N. (1996). Abstract Algebra (Edisi Ketiga). John Wiley & Sons.

[9] Hungerford, T. W. (1974). Algebra (Vol. 73). New York: Springer Science & Business Media.

[10] Rosenstein, J. G. (1982). Linear orderings. New York: Academic press.

[11] Rosjanuardi, R, & Itoh, T. (2010). Characterisation of Maximal Primitive Ideals of Toeplitz Algebras. Scientiae Mathematicae Japonicae, 72(2), 121126.

[12] Rosjanuardi, R. (2008). Primitive Ideals of Toeplitz Algebra of Ordered Groups. J. Indones. Math. Soc.(MIHMI), 14, 111-118.

[13] Rosjanuardi, R., Wahyuni, S., Wijayanti I.E. (2011). Aljabar. Jakarta: Universitas Terbuka.

[14] Singh, J. (2013). Subgroups of The Additive Group of Real Line.

[15] Steen, L. A., Seebach, J. A., & Steen, L. A. (1978). Counterexamples in Topology (Vol. 1, p. 8). New York: Springer.

[16] Warner, S. (1965). Modern Algebra. New York: Dover Publication.