

**Ideal Urutan pada Jumlah Langung Leksikografik dari Grup Abel  
Terurut Total  $\mathbb{R}$  dan  $\mathbb{Z}$**

**SKRIPSI**

diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika



oleh

Eneng Riska Nuraeni

NIM 1900737

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

**2023**

**IDEAL URUTAN PADA JUMLAH LANGSUNG  
LEKSIKOGRAFIK DARI GRUP ABEL TERURUT  
TOTAL  $\mathbb{R}$  DAN  $\mathbb{Z}$**

Oleh

Eneng Riska Nuraeni

Sebuah skripsi yang diajukan sebagai salah satu syarat untuk  
memperoleh gelar Sarjana Matematika Kelompok Bidang Keahlian  
Aljabar

© Eneng Riska Nuraeni 2023

Universitas Pendidikan Indonesia

April 2023

Hak Cipta dilindungi undang-undang.

Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian, dengan  
dicetak ulang, difotokopi, atau cara lainnya tanpa izin dari penulis.

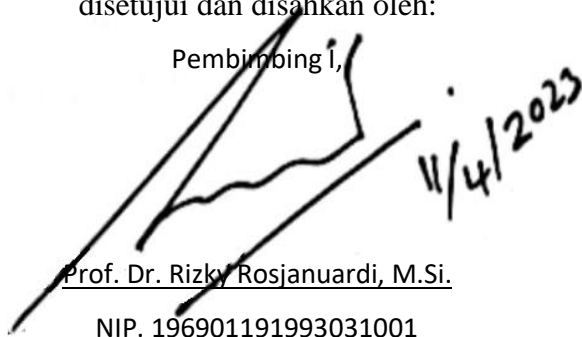
**LEMBAR PENGESAHAN**

ENENG RISKA NURAENI

IDEAL URUTAN PADA JUMLAH LANGSUNG LEKSIKOGRAFIK DARI  
GRUP ABEL TERURUT TOTAL  $\mathbb{R}$  DAN  $\mathbb{Z}$

disetujui dan disahkan oleh:

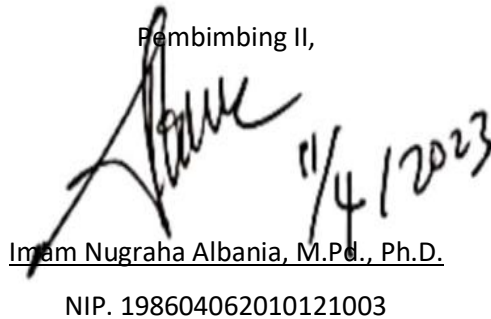
Pembimbing I,



Prof. Dr. Rizky Rosjanuardi, M.Si.

NIP. 196901191993031001

Pembimbing II,

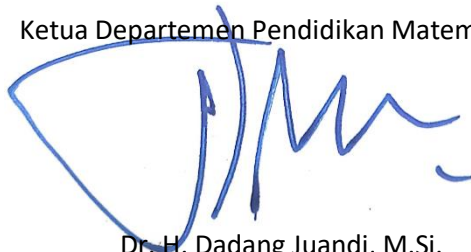


Imam Nugraha Albania, M.Pd., Ph.D.

NIP. 198604062010121003

Mengetahui,

Ketua Departemen Pendidikan Matematika,



Dr. H. Dadang Juandi, M.Si.

NIP. 196401171992021001



## ABSTRAK

Setiap subgrup dari grup abel terurut total  $\mathbb{R}$  adalah subhimpunan *dense* di  $\mathbb{R}$  atau subgrup siklik, sedangkan setiap subgrup dari grup abel terurut total  $\mathbb{Z}$  berbentuk  $n\mathbb{Z}$  di mana  $n \in \mathbb{N}$ . Dengan memeriksa sifat mengawetkan urutan pada setiap bentuk subgrup nontrivial dari masing-masing grup, diperoleh bahwa setiap subgrup nontrivial dari  $\mathbb{R}$  dan  $\mathbb{Z}$  bukanlah ideal urutan. Misalkan  $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$  dan  $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$  adalah grup abel terurut total. Bentuk umum setiap subgrup dari  $\Gamma_1$  adalah  $G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$  dengan  $G \leq \mathbb{R}$  dan  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , sedangkan bentuk umum dari  $\Gamma_2$  adalah  $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$ . Selanjutnya, periksa sifat mengawetkan urutan dari setiap bentuk subgrup nontrivial dari  $\Gamma_1$  diperoleh bahwa  $\Gamma_1$  memiliki ideal urutan nontrivial meskipun  $\mathbb{R}$  dan  $\mathbb{Z}$  tidak memiliki ideal urutan nontrivial. Satu-satunya subgrup nontrivial dari  $\Gamma_1$  yang mengawetkan urutan adalah  $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ . Dengan metode serupa, diperoleh satu-satunya ideal urutan yang nontrivial dari  $\Gamma_2$  adalah  $J = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ .

**Kata kunci: ideal urutan, subgrup, grup abel terurut total, jumlah langsung leksikografik, nontrivial**

### **ABSTRACT**

Every subgroup of the totally ordered abelian group  $\mathbb{R}$  is a dense subset in  $\mathbb{R}$  or a cyclic subgroup, while every subgroup of the totally ordered abelian group of  $\mathbb{Z}$  is  $n\mathbb{Z}$  where  $n \in \mathbb{N}$ . By examining the order preservation in each nontrivial subgroup of each group, it is found that all nontrivial subgroups of  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{Z}$  are not order ideal. Let  $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$  and  $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$  be totally ordered abelian groups. The general subgroup form of  $\Gamma_1$  is  $G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$  with  $G \leq \mathbb{R}$  and  $n\mathbb{Z} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , while the general subgroup form of  $\Gamma_2$  is  $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$ . Next, by examining the order-preserving condition of each nontrivial subgroup of  $\Gamma_1$ , we obtained that  $\Gamma_1$  has a nontrivial order ideal even though  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{Z}$  do not have nontrivial order ideal. The only nontrivial subgroup of  $\Gamma_1$  that order preserves is  $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ . Using a similar method, the only nontrivial order ideal of  $\Gamma_2$  is  $J = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ .

**Keywords:** order ideal, subgroup, totally ordered abelian groups, lexicographic direct sum, nontrivial.

## DAFTAR ISI

LEMBAR PERNYATAAN .....	i
LEMBAR PENGESAHAN .....	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
UCAPAN TERIMA KASIH .....	iv
ABSTRAK .....	vi
<i>ABSTRACT</i> .....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Tujuan .....	2
1.3 Rumusan Masalah .....	2
1.4 Manfaat .....	2
1.5 Sistematika Penulisan .....	2
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	<b>4</b>
2.1 Grup.....	4
2.2 Subgrup .....	6
2.3 Jumlah Langsung dari Grup.....	11
2.4 Urutan.....	13
2.5 Urutan Total .....	14
2.6 Grup Terurut Total.....	17
2.7 Urutan Leksikografik.....	18
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	<b>22</b>
<b>BAB IV PEMBAHASAN</b> .....	<b>23</b>
4.1 Ideal urutan dari $\mathbb{R}$ .....	23

4.2 Ideal urutan dari $\mathbb{Z}$ .....	27
4.3 Jumlah langsung Leksikografik dari Dua Grup Abel Terurut Total ..	27
4.4 Grup Abel Terurut Total $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ .....	28
4.4.1 Subgrup dari $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$ .....	28
4.4.2 Ideal urutan dari $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ .....	29
4.5 Grup Abel Terurut Total $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ .....	35
4.5.1 Subgrup dari $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ .....	35
4.5.2 Ideal urutan Nontrivial dari $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ .....	36
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	<b>42</b>
5.1. Kesimpulan .....	42
5.2. Saran .....	42



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adji, S., & Raeburn, I. (2004). The Ideal Structure of Toeplitz Algebras. *Integral Equations and Operator Theory*, 48(3), 281-293.
- [2] Bartle, R. G., & Bartle, R. G. (1964). *The Elements of Real Analysis* (Vol. 2). New York: Wiley.
- [3] Clark, A. (1984). *Elements of Abstract Algebra*. New York: Dover Publication, Inc.
- [4] Fuchs, L. (1963). *Partially Ordered Algebraic Systems*. New York: Dover Publications, Inc.
- [5] Goodearl, K. R. (1986). *Partially Ordered Abelian Groups with Interpolation* (No. 20). American Mathematical Soc.
- [6] Halmos, P. R. (1960). *Naive set theory*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- [7] Harzheim, E. (2005). *Ordered sets* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
- [8] Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra (Edisi Ketiga)*. John Wiley & Sons.
- [9] Hungerford, T. W. (1974). *Algebra* (Vol. 73). New York: Springer Science & Business Media.
- [10] Rosenstein, J. G. (1982). *Linear orderings*. New York: Academic press.
- [11] Rosjanuardi, R., & Itoh, T. (2010). Characterisation of Maximal Primitive Ideals of Toeplitz Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 72(2), 121126.
- [12] Rosjanuardi, R. (2008). Primitive Ideals of Toeplitz Algebra of Ordered Groups. *J. Indones. Math. Soc.(MIHMI)*, 14, 111-118.
- [13] Rosjanuardi, R., Wahyuni, S., Wijayanti I.E. (2011). *Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- [14] Singh, J. (2013). *Subgroups of The Additive Group of Real Line*.
- [15] Steen, L. A., Seebach, J. A., & Steen, L. A. (1978). *Counterexamples in Topology* (Vol. 1, p. 8). New York: Springer.

[16] Warner, S. (1965). Modern Algebra. New York: Dover Publication.