BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Himpunan terurut (himpunan terurut parsial) P merupakan himpunan yang dilengkapi dengan urutan (urutan parsial) $\leq$, di mana urutan itu sendiri merupakan relasi biner yang bersifat refleksif, antisimetri, dan transitif. Kemudian, jika untuk setiap dua elemen pada P dapat dibandingkan (untuk setiap $x, y \in P$ berlaku $x \leq y$ atau $y \leq x$), maka P disebut himpunan terurut total [6].

Suatu grup $(G, +)$, disebut grup terurut total jika pada G terdefinisi urutan total $\leq$, serta jika $a \leq b$ maka $a + c \leq b + c$ dan $c + a \leq c + b$ untuk setiap $c \in G$ [14]. Diberikan suatu grup abel terurut total $(\Gamma, \leq)$, *positive cone* dari Γ yaitu $\Gamma^+ \coloneqq \{x \in \Gamma \mid x \geq 0\}$.

Pada tahun 1954, Frink dalam artikelnya [10], memperkenalkan ideal urutan pada himpunan terurut. Ideal urutan merupakan salah satu konsep penting dalam aljabar abstrak, khususnya pada pembahasan mengenai himpunan terurut. Misalkan P suatu himpunan terurut, subhimpunan J dari P disebut ideal urutan dari P, jika $x \in J$ dan $y \leq x$, maka $y \in J$.

Pada tahun 1965, Andrus dan Butson dalam artikelnya [2], membahas ideal urutan pada grup terurut. Selain itu, dalam beberapa kajian yang berkaitan dengan grup terurut seperti [1], [17], [18], dan yang terbaru [19], ideal urutan menjadi salah satu konsep yang penting. Misalkan Γ adalah grup abel terurut total. Ideal urutan dari Γ adalah subgrup I yang mengawetkan urutan, yaitu jika $x \in \Gamma^+, y \in I^+$ dengan $x \leq y$ maka $x \in I$ [17]. $\{0_\Gamma\}$ dan Γ itu sendiri merupakan ideal urutan yang trivial dari Γ.

Diberikan $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ grup abel terurut total dari himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. Setiap subgrup dari $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$, di mana $n \in \mathbb{Z}$. Namun, setelah diidentifikasi, untuk $n \neq 0$ dan $n \neq \pm 1$, $n\mathbb{Z}$ bukanlah ideal urutan dari $\mathbb{Z}$, sehingga memberikan kesimpulan bahwa $\mathbb{Z}$ tidak memiliki ideal urutan tak-trivial. Hasil identifikasi pada grup abel terurut total dari bilangan real

$(\mathbb{R}, +, \leq)$ juga memberikan kesimpulan yang sama, yaitu $\mathbb{R}$ tidak memiliki ideal urutan tak-trivial.

Misalkan Γ adalah grup $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dengan urutan leksikografik $((x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ atau $(x_1 = x_2$ dan $y_1 \leq y_2))$. Rosjanuardi & Itoh telah mengidentifikasi pada [18] bahwa ideal urutan tak-trivial dari Γ hanyalah $0 \oplus_{lex} \mathbb{Z}$. Kemudian timbul pertanyaan, bagaimana ideal urutan untuk grup $\mathbb{R} \oplus_{lex} (\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z})$ dan sebaliknya $(\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}) \oplus_{lex} \mathbb{R}$?

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui ideal urutan dari $\mathbb{R} \oplus_{lex} (\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z})$ dan $(\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}) \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

1.3 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam skripsi ini yaitu, apakah ada ideal urutan tak-trivial dari $\mathbb{R} \oplus_{lex} (\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z})$ dan $(\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}) \oplus_{lex} \mathbb{R}$? Jika ya, bagaimanakah bentuk ideal urutan tak-trivial tersebut?

1.4 Manfaat

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu diperoleh informasi mengenai ideal urutan dari $\mathbb{R} \oplus_{lex} (\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z})$ dan $(\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}) \oplus_{lex} \mathbb{R}$. Selain itu, hasil penelitian ini dapat menjadi inspirasi untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Sistematika Penulisan

Dalam skripsi ini terdapat lima bab. Bab pertama berisi latar belakang penelitian, tujuan, rumusan masalah, manfaat, dan sistematika penulisan. Pada bagian latar belakang, penulis mengungkapkan mengapa memilih topik ideal urutan dari grup $\mathbb{R} \oplus_{lex} (\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z})$ dan $(\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}) \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

Bab kedua berisi kajian pustaka yang menjelaskan teori-teori yang menjadi landasan untuk mendukung dan menjawab rumusan masalah yang telah ditentukan. Teori-teori yang dibahas meliputi, himpunan, relasi biner, grup, subgrup, urutan linier dan grup terurut, jumlah langsung, urutan leksikografik, serta ideal urutan. Dalam kajian Pustaka ini, penulis melakukan studi literatur dari berbagai buku maupun jurnal.

Bab ketiga, penulis menjelaskan metode penelitian pada penelitian ini. Pada bab keempat, penulis membahas pokok masalah yang terdapat pada rumusan masalah dan menjawab rumusan masalah tersebut. Kemudian pada bab kelima, penulis memberikan simpulan untuk skripsi ini dan saran untuk penelitian selanjutnya.