BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1931 Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pertama kali memperkenalkan ruang Orlicz L_ϕ sebagai perumuman dari ruang Lebesgue L_p untuk kasus $1 \le p < \infty$. Terdapat dua versi ruang Orlicz yang banyak dikaji oleh para peneliti sebelumnya, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz. Penelitian tentang ruang Orlicz kontinu dapat dilihat pada penelitian yang dilakukan oleh Maligranda, L (1989), Masta, A. A. (2016), Rao, M. (1991) dan penelitian terdahulu lainnya. Adapun penelitian tentang ruang barisan Orlicz dapat dilihat pada penelitian yang dikaji oleh Maligranda, L. & Mastylo, M. (2000), dan pada penelitian yang dilakukan Awad A. Bakery bersama Rafaf, R. (2020), serta pada penelitian-penelitian terdahulu lainnya. Dalam penelitian ini penulis fokus membahas tentang ruang barisan Orlicz dengan memanfaatkan pengetahuan-pengetahuan dari hasil penelitian sebelumnya.

Terlebih dahulu penulis akan mengenalkan definisi dari ruang barisan Orlicz yang didefinisikan oleh Maligranda, L. bersama Mastylo, M. pada tahun 2000. Definisi ruang barisan Orlicz tersebut adalah:

Jika $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ adalah fungsi Orlicz yaitu suatu fungsi konveks yang kontinu di mana bernilai 0 hanya di titik 0, maka ruang barisan Orlicz ℓ_ϕ adalah

$$\ell_\phi = \{\, \xi = (\xi_j) : \rho_\phi(\lambda\xi) < \infty \; untuk \; suatu \; \lambda > 0 \,\}$$

dengan $\rho_\phi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(|\xi_j|)$ untuk sembarang barisan real $\xi = \{\xi_j\}$, yang dilengkapi dengan *norm Luxemburg* yaitu

$$\| \xi \|_\phi = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

Definisi serupa juga digunakan oleh Savas, E. (2004) dalam penelitiannya yang berjudul "*Some Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions*" dan Khusnussaadah, N. (2019) dalam penelitiannya yang berjudul "*Completeness of Sequence Spaces Generated by an Orlicz Function*". Keduanya menggunakan istilah yang sama pada fungsi yang digunakan, yaitu fungsi Orlicz yang merupakan fungsi konveks yang kontinu. Definisi fungsi Orlicz ini serupa dengan definisi fungsi Young pada ruang Orlicz kontinu, yaitu suatu fungsi $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ adalah fungsi Young jika ϕ adalah konveks, $\phi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ dan ϕ adalah fungsi yang kontinu (Masta, dkk., 2016; Masta, dkk., 2018). Definisi fungsi Young ini digunakan oleh Prayoga, P. S. (2020) dalam mendefinisikan ruang barisan Orlicz pada penelitiannya yang berjudul "Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Hölder Pada Ruang Barisan Orlicz".

Pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkonstruksi ruang barisan Orlicz yang diperumum dengan mengganti fungsi Young menjadi fungsi Young yang lebih luas. Fungsi Young diperluas merupakan fungsi konveks-s yang bernilai 0 hanya di titik 0. Fungsi ini disebut pula sebagai fungsi Young-s.

Sebelum membahas lebih jauh tentang ruang barisan Orlicz dan fungsi Young-s, penulis terlebih dahulu mengenalkan definisi dari fungsi konveks-s. Misalkan $0 < s \leq 1$, fungsi $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ disebut konveks-s jika untuk setiap $x, y \in [0, \infty)$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha^s + \beta^s = 1$ berlaku $\phi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \phi(x) + \beta^s \phi(y)$. Definisi ini diperkenalkan oleh Kuei Lin Tseng dan Dragomir, S. tahun 2007 pada penelitiannya yang berjudul "*On Some New Inequalities Of Hermite-Hadamard-Fejér Type Involving Convex Functions*". Fungsi konveks-s inilah yang menjadi salah satu sifat yang digunakan untuk mendefinisikan fungsi Young-s. Dermawan, R., dkk. (2022) mendefinisikan fungsi Young-s sebagai perumuman dari fungsi Young, yaitu fungsi $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ adalah fungsi Young-s jika ϕ adalah konveks-s, $\phi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ dan ϕ adalah fungsi yang kontinu. Dari definisi fungsi Young-s ini penulis mendefinisikan ruang barisan Orlicz yang baru, di mana pada penelitian ini disebut sebagai ruang barisan Orlicz diperumum.

Hal menarik lainnya yang banyak dikaji oleh para peneliti pada ruang Orlicz adalah sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder, baik pada ruang Orlicz kontinu maupun pada ruang barisan Orlicz. Welland, R. pada tahun 1966 mengkaji sifat inklusi pada ruang Orlicz kontinu dengan memberikan syarat cukup sifat inklusi pada ruang tersebut. Selanjutnya pada tahun 1977 Kufner, A., John, O. dan Fučik, S. mengembangkan hasil yang diperoleh Welland, R. dengan memberikan syarat cukup dan perlu pada ruang Orlicz kontinu. Kemudian pada tahun 1989, Maligranda, L. bersama Mastylo melengkapi hasil yang diperoleh Welland, R. dan Kufner dengan memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz kontinu dengan domain yang lebih luas dibandingkan penelitian yang dilakukan oleh Kufner dan kawan-kawan.

Selanjutnya pada tahun 2000, Maligranda, L. dan Mastylo juga mengkaji syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz. Lain halnya dengan Masta, dkk. yang mengkaji sifat inklusi pada ruang Orlicz tipe Lemah (Masta, 2016) dan sifat inklusi pada ruang Orlicz-Morrey (Masta, 2018). Kemudian tahun 2020, Prayoga, P. S., dkk. juga mengkaji sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz.

Adapun penelitian tentang ketaksamaan Hölder dapat dilihat pada penelitian yang dilakukan oleh O'Neil (1965). Pada penelitiannya, O'Neil memperoleh bentuk ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz kontinu. Selanjutnya tahun 2018, Ifronika, dkk. menunjukkan bentuk perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz kontinu. Kemudian, Fatimah, dkk. (2019) juga menunjukkan bentuk ketaksamaan Hölder dan perumumannya pada ruang barisan Orlicz dengan memberikan syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan *summable-p*. Dengan menggunakan hasil yang diperoleh Ifronika (2018) dan Fatimah (2019), Prayoga, P.S., dkk. (2020) juga menunjukkan perumuman bentuk ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz yang dikonstruksinya.

Dari penjelasan tersebut, memberikan motivasi kepada penulis untuk mengkaji syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperumum dengan menggunakan informasi dari hasil-hasil penelitian sebelumnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, maka permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana definisi ruang barisan Orlicz diperumum dengan menggunakan fungsi Young-s?
2. Bagaimana syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz diperumum?
3. Bagaimana syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperumum?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui definisi ruang barisan Orlicz diperumum dengan menggunakan fungsi Young-s.
2. Memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz diperumum.
3. Memberikan syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperumum.

1.4 Batasan Penelitian

Penelitian ini hanya berfokus pada definisi, sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperumum.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi para pembaca dalam mempelajari ruang Orlicz, khususnya tentang ruang barisan Orlicz. Selain itu, manfaat dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan motivasi bagi para peneliti selanjutnya untuk mengkaji dan mengembangkan ruang barisan Orlicz diperumum beserta sifat-sifatnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri atas 6 bab. Bab 1 Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan dalam skripsi ini. Selanjutnya Bab II Kajian Pustaka, pada bab ini penulis menyajikan teori-teori pendukung yang akan digunakan pada pembahasan bab IV dan V. Kajian pada bab II dimulai dengan definisi dan sifat-sifat dari fungsi konveks, fungsi konveks-s, fungsi Young dan fungsi Young-s. Kemudian dilanjutkan dengan definisi dari barisan dan deret himpunan bilangan real beserta kekonvergenannya. Terakhir, pada bab II dibahas mengenai definisi fungsi norma dan fungsi quasi-norma serta definisi ruang bernorma dan ruang lengkap atau ruang Banach.

Bagian selanjutnya adalah Bab III Metodologi Penelitian yang dilakukan oleh penulis. Pada bab ini, penulis menjabarkan topik penelitian, metode penelitian dan langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini. Pada bab selanjutnya yaitu Bab IV Ruang Orlicz, berisi hasil-hasil penelitian terdahulu tentang sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz. Dari hasil-hasil penelitian tersebut, penulis manfaatkan sebagai dasar untuk mengkonstruksi ruang barisan Orlicz diperumum, sifat inklusi dan bentuk ketaksamaan Höldernya.

Berikutnya dilanjutkan dengan Bab V Ruang Barisan Orlicz Diperumum. Bab ini berisi hasil yang diperoleh penulis dalam penelitiannya. Diawali dengan pendefinisian ruang barisan Orlicz diperumum yang dilengkapi dengan suatu fungsi quasi-norma serta sifat-sifat yang berlaku pada ruang barisan Orlicz diperumum. Selanjutnya pada bab V, penulis memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder serta perumumannya pada ruang barisan Orlicz diperumum. Bagian terakhir pada skripsi ini adalah Bab VI Penutup. Bab IV berisi simpulan dari hasil penelitian yang dilakukan penulis dan saran mengenai penelitian lanjutan tentang ruang barisan Orlicz.