

**SIFAT INKLUSI DAN KETAKSAMAAN HÖLDER PADA
RUANG BARISAN ORLICZ DIPERUMUM**

SKRIPSI

diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Kelompok Bidang Keahlian Analisis



Oleh

Dasep

NIM 1902192

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
2023**

SIFAT INKLUSI DAN KETAKSAMAAN HÖLDER PADA RUANG BARISAN ORLICZ DIPERUMUM

Oleh
Dasep

Sebuah skripsi yang diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika Kelompok Bidang Keahlian Analisis

© Dasep 2023
Universitas Pendidikan Indonesia
April 2023

Hak Cipta dilindungi undang-undang.
Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian, dengan dicetak
ulang, difotokopi, atau cara lainnya tanpa izin dari penulis.

LEMBAR PENGESAHAN

DASEP

SIFAT INKLUSI DAN KETAKSAMAAN HÖLDER PADA RUANG
BARISAN ORLICZ DIPERUMUM

disetujui dan disahkan oleh pembimbing:

Pembimbing I



Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
NIP. 199006102015041001

Pembimbing II



Dr. H. Cece Kustiawan, M.Si.
NIP. 196612131992031001

Mengetahui,

Ketua Departemen Pendidikan Matematika



Dr. H. Dadang Juandi, M.Si.
NIP. 196401171992021001

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Sifat Inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum” ini beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri. Saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai etika ilmu yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran etika keilmuan atau ada klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandung, April 2023

Penulis,

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Dasep', written over a faint rectangular stamp or box.

Dasep

NIM 1902192

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Sifat Inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum”. Shalawat serta salam semoga tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW. yang telah menuntun umatnya menuju jalan kebenaran, kemudian kepada keluarganya, para sahabatnya, dan umatnya hingga akhir zaman.

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengkonstruksi ruang barisan Orlicz diperumum dan mengkaji keberlakuan sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang tersebut, dengan memanfaatkan hasil yang telah diperoleh pada ruang Orlicz. Salah satu cara untuk mengkonstruksi ruang barisan Orlicz diperumum adalah dengan mengganti fungsi Young pada ruang barisan Orlicz dengan fungsi Young diperluas.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca untuk kebaikan penulis di masa mendatang. Penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun bagi pembaca.

Bandung, April 2023

Penulis

UCAPAN TERIMA KASIH

Empat tahun sudah penulis menuntut ilmu di Universitas Pendidikan Indonesia pada program studi Matematika hingga berakhir dengan penyusunan skripsi ini. Rasa syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena semuanya dapat berjalan dengan lancar tiada lain berkat pertolongan-Nya. Kemudian dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa pengerjaannya tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu, Kakek, Nenek dan ketiga kakak penulis yang senantiasa memberikan dukungan berupa doa, semangat dan berbagai kebaikan lainnya yang begitu banyak untuk penulis.
2. Bapak Dr. Al Azhary Masta, M.Si. selaku pembimbing I yang telah membimbing proses penyusunan skripsi ini, dan memberikan ide untuk bahan skripsi kepada penulis. Serta meluangkan waktu untuk memberikan ilmu, arahan, motivasi dan saran kepada penulis baik dalam penyusunan skripsi ini maupun dalam perkuliahan.
3. Bapak Dr. H. Cece Kustiawan, M.Si. selaku pembimbing II dan ketua prodi matematika yang telah membimbing proses penyusunan skripsi ini dengan sabar memperbaiki banyak kesalahan dari penulis, dan telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, motivasi dan saran baik dalam penyusunan skripsi ini maupun dalam perkuliahan.
4. Ibu Dra. Encum Sumiaty, M.Si. dan Ibu Siti Fatimah, M.Si., Ph.D. selaku dosen pengampu mata kuliah Kapita Selekt Analisis yang dengan sabar memperbaiki dan membimbing penyusunan draf skripsi ini semasa kuliah Kapita Selekt.
5. Bapak Dr. H. Dadang Juandi, M.Si. selaku ketua Departemen Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia yang telah mendukung dan memfasilitasi penulis selama menjalani perkuliahan.
6. Ibu Dra. Hj. Rini Marwati, M.S. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan, motivasi dan saran kepada penulis selama empat tahun ini.

7. Bapak/Ibu dosen KBK Analisis dan seluruh dosen serta staf Departemen Pendidikan Matematika yang dengan tulus memberikan ilmu kepada penulis, dan senantiasa memberikan didikan, teladan, dukungan kepada penulis selama menjalani proses perkuliahan.
8. Tim riset KBK Analisis 2022 yang telah memberi kesempatan dan membantu penulis melakukan penelitian dan memberikan ilmu, dukungan, arahan serta saran yang berharga kepada penulis selama mengikuti penelitian.
9. Teman-teman kelas Matematika C 2019 dan mahasiswa Departemen Pendidikan Matematika angkatan 2019 yang telah berjuang bersama selama empat tahun ini dan saling membantu, mendoakan untuk kesuksesan bersama.
10. Pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang turut membantu dan memotivasi penulis dalam mengikuti perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas mereka dengan kebaikan dan keberkahan yang begitu banyak.

Bandung, April 2023

Penulis

ABSTRAK

Sifat Inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum

Oleh

Dasep

Ruang Orlicz pertama kali diperkenalkan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz sebagai perluasan dari ruang Lebesgue pada tahun 1931. Terdapat dua jenis ruang Orlicz, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi ruang barisan Orlicz diperumum dengan mengganti fungsi pada ruang barisan Orlicz dengan fungsi yang lebih luas. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk mengkaji sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperumum. Metode dalam penelitian ini menggunakan definisi dan sifat-sifat yang berlaku pada ruang Orlicz dari hasil penelitian sebelumnya dan menggunakan fungsi Young-s untuk mendefinisikan ruang barisan Orlicz diperumum. Dari hasil penelitian ini diperoleh ruang barisan Orlicz yang lebih umum dari ruang barisan Orlicz yang sudah ada, dan penulis juga memperoleh syarat cukup dan perlu sifat inklusi serta perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperumum.

Kata Kunci: fungsi konveks-s, fungsi Young-s, ruang Orlicz, ruang barisan Orlicz, sifat inklusi, ketaksamaan Hölder.

ABSTRACT

Inclusion Properties and Hölder's Inequality of Generalized Orlicz Sequence Spaces

By

Dasep

The Orlicz space was first introduced by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz as an extension of the Lebesgue space in 1931. There are two types of Orlicz spaces, namely continuous Orlicz spaces and Orlicz sequence spaces. This study aims to construct a generalized Orlicz sequence space by replacing the function in the Orlicz sequence space with a broader function. In addition, this study also aims to examine the inclusion and inequality properties of Hölder in generalized Orlicz sequence spaces. The method in this study uses the definitions and properties that apply to the Orlicz space from the results of previous studies and uses the s -Young function to define the generalized Orlicz sequence space. From the results of this study, it was obtained that the Orlicz sequence space is more general than the existing Orlicz sequence space, and the authors also obtained sufficient and necessary conditions for inclusion properties and Hölder's generalization inequality in generalized Orlicz sequence spaces.

Keywords: s -convex function, s -Young function, Orlicz space, Orlicz sequence space, inclusion properties, Hölder's inequality.

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
UCAPAN TERIMA KASIH	iv
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR LAMPIRAN	x
DAFTAR LAMBANG	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA	6
2.1 Fungsi Konveks dan Konveks- s	6
2.2 Fungsi Young dan Young- s	9
2.3 Barisan dan Deret Bilangan Real	20
2.4 Ruang Bernorma dan Ruang Banach	23
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	25
BAB IV RUANG ORLICZ.....	27
4.1 Ruang Orlicz Kontinu	27

4.1.1	Definisi Norma Luxemburg dan Definisi Ruang Orlicz Kontinu...	27
4.1.2	Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz Kontinu.....	33
4.1.3	Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Orlicz Kontinu.....	36
4.2	Ruang Barisan Orlicz	40
4.2.1	Definisi Ruang Barisan Orlicz	40
4.2.2	Sifat-sifat yang Berlaku pada Ruang barisan Orlicz.....	43
4.2.3	Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz.....	45
4.2.4	Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz.....	48
BAB V RUANG BARISAN ORLICZ DIPERUMUM		52
5.1	Definisi Ruang Barisan Orlicz Diperumum dan Normanya	52
5.2	Sifat-sifat pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum.....	57
5.3	Ruang Quasi-Banach $(\ell_{\phi_s}(\mathbb{R}), \ \cdot\ _{\ell_{\phi_s}(\mathbb{R})})$	62
5.4	Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum.....	65
5.5	Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum.....	71
BAB VI PENUTUP		75
6.1	Kesimpulan.....	75
6.2	Saran.....	76
DAFTAR PUSTAKA		77
LAMPIRAN.....		80

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Riwayat Hidup Penulis.....	80
---------------------------------------	----

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
L_ϕ	Ruang Orlicz	1
L_p	Ruang Lebesgue	1
ℓ_ϕ	Ruang barisan Orlicz	1
$\ \cdot\ _\phi$ atau $\ \cdot\ _{\ell_\phi}$	Norma Luxemburg	1
ϕ	Fungsi Young	1
ϕ^{-1}	Invers fungsi Young	12
$X = (x_k)$	Barisan bilangan real x_k	20
$x_n \rightarrow x$	Barisan x_n konvergen ke x	20
$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$	Deret bilangan real	23
$\ \cdot\ $	Fungsi bernorma	23
$L_\phi(\mathbb{R}^n)$	Ruang Orlicz kontinu atas \mathbb{R}^n	27
$\ \cdot\ _{L_\phi(\mathbb{R}^n)}$	Fungsi norma pada ruang Orlicz kontinu	27
$B(a, r)$	Bola buka berpusat di a dan berjari-jari $r > 0$	33
$ B(a, r) $	Volume bola	33
$\chi_{B(a,r)}$	Fungsi karakteristik	33
S_{m,N_0}	$\{m - N_0, \dots, m - 1, m, m + 1, \dots, m + N_0\}$	46
$ S_{m,N_0} $	Kardinalitas dari S_{m,N_0}	46
$\xi_k^{m_0, N_0}$	Barisan karakteristik	46
ϕ_s	Fungsi Young- s	52
$\ell_{\phi_s}(\mathbb{R})$	Ruang barisan Orlicz diperumum	52
$\ \cdot\ _{\ell_{\phi_s}(\mathbb{R})}$	Fungsi quasi-norma pada ruang barisan Orlicz diperumum	52

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, N. M. 2013. "Some Properties On Orlicz Sequence Spaces," *Journal of Babylon University/Pure and Applied Sciences*, 21, 2340-2345.
- Al Hazmy, S., Kustiawan, C., & Rukmana, I. 2001. "Discrete Orlicz-Morrey Spaces And Their Inclusion Properties," *Journal of Engineering Science and Technology*, 16(3), 2018-2027.
- Awad A Bakery & Afaf R. 2020. "Some Properties of Pre-quasi Norm On Orlicz Sequence Space," *Journal of Inequalities and Applications*, 55.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2011. "Introduction to Real Analysis," Urbana: John Wiley & Sons, Inc.
- Cheung, W.-S. 2000. "Generalization of Hölder's Inequality," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 7-10.
- Dermawan, R., Fatimah, S., Hazmy, S. A., Masta, A. A., & Kustiawan, C. 2022. "Generalized of Young's Function," AIP Proceedings.
- Dermawan, R. 2022. "Sifat Inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada Ruang Orlicz-Diperumum," Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Fatimah, S., Masta, A. A., Ifronika, Wafiqoh, R., & Agustine, P. C. (t.t.). 2019. "Sufficient and necessary conditions for generalized Hölder's inequality in p-summable sequence spaces," *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1280. No. 2. IOP Publishing.
- Fatimah, S., Masta, A., Ifronika, I., Wafiqoh, R., & Agustine, "Generalized Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces," In *Proceedings of the 7th Mathematics, Science, and Computer Science Education International Seminar, MSCEIS 2019, 12 October 2019, Bandung, West Java, Indonesia*. 2020.
- Gunawan, H., Kikianty, E., & Schwanke, C. 2017. "Discrete Morrey Spaces and Their Inclusion Properties," *Mathematische Nachrichten*, 291(8-9), 1-14.
- Gunawan, H. & Setya-Budhi, W. 2017. "An Inclusion Property of Orlicz-Morrey Spaces," *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 893, No. 1, p. 012015). IOP Publishing.
- Ifronika, Masta, A. A., Nur, M., & Gunawan, H. 2018. "Generalized hölder's inequality in Orlicz spaces," *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 22(1), 25-34.
- Kamthan, P. K., & Gupta, M. 1981. "Sequence Spaces and Series," New York: Marcel Dekker, Inc.

- Khusnussaadah, N. & Supama. 2019. "Completeness of Sequence Spaces Generated by an Orlicz Function," *Journal of Sciences and Data Analysis*, 19, 1-14.
- Kustiawan C., A.A. Masta, Dasep, E. Sumiaty, S. Fatimah & S.A. Hazmy. Maret 2023. "GENERALIZED ORLICZ SEQUENCE SPACES," BAREKENG: J. Math. & App., vol. 17, iss. 1, pp. 0427-0438.
- Kreyszig, E. 1978. "Introductory Functional Analysis with Applications," Canada: John Wiley & Sons Inc.
- Kufner, A., John, O., & Fučík, S. 1977. "Function Spaces," Czechoslovakia: Noordhoff International Publishing.
- Léonard, C. 2007. "Orlicz Spaces," Retrieved Januari 8, 2020, from <http://leonard.perso.math.cnrs.fr/papers/Leonard-Orlicz%20spaces.pdf>.
- Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1971). On Orlicz Sequence Spaces I. *Israel Journal of Mathematics*, 10, 379-390.
- Luxemburg, W. A. 1955. "Banach Function Spaces," Thesis: Technische Hogeschool te Delft.
- Maligranda, L. & Mastylo, M. 2000. "Inclusion Mappings Between Orlicz Sequence Spaces," *Journal of Functional Analysis*, 176, 264-279.
- Maligranda, L. 1989. "Orlicz Spaces and Interpolation," Thesis, Departamento de Matematica, Universidade Estadual de Campinas.
- Masta, A. A. 2018. "Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz-Morrey," Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Masta, A. A., Gunawan, H. & Setya-Budhi, W. 2016. "Inclusion Property of Orlicz and Weak Orlicz Spaces," *J. Math. Fund. Sci*, 48(3), 193–203.
- Masta, A. A., Gunawan, H. & Wono Setya-Budhi. 2017. "On Inclusion Properties of Two Versions of Orlicz-Morrey Spaces," *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14-228.
- O'Neil, R. (1965). Fractional Integration in Orlicz Spaces. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115, 300-328.
- Orlicz, W. 1992. "Linear Functional Analysis (Series in Real Analysis Volume 4)," Singapore: World Scientific.
- Prayoga, P. S., Al Azhary Masta, & Siti fatimah. 2020. "Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Hölder Pada Ruang Barisan Orlicz," *Jurnal EurekaMatika*, 8, No 2.
- Rao, M., & Ren, Z. 1991. "Theory of Orlicz spaces," New York: Marcel Dekker, Inc.

- Savas, E. & savas, R. 2004. "Some Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions," *Archivum Mathematicum*, 40, 33-40.
- Sawano, Y. (2011). A Handbook of Harmonic Analysis. Retrieved Februari 1, 2022, from <https://www.comp.tmu.ac.jp/yoshihiro/teaching/harmonicanalysis/harmonic-analysis-textbook.pdf>
- Taqiyuddin, M., & Rosjanuardi, R., "Inclusion Properties of Weighted Weak Orlicz Spaces," *Journal of Engineering Science and Technology*, 16(5), 3974-3986, 2021.
- Tseng, K., Hwang, S. & Dragomir, S., "On Some New Inequalities Of Hermite-Hadamard-Fejér Type Involving Convex Functions," *Demonstratio Mathematica*, 40(1), 51-64, 2007.
- Welland, R. 1966. "Inclusion Relations Among Orlicz Spaces," *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(135)