BAB III

RUANG FUNGSI CESARO

3.1 Pembentukan Ruang Fungsi *Cesaro*

Misal A suatu operator linear dan Y sebuah ruang fungsi, didefinisikan ruang baru X, dimana $X := \{f \mid Af \in Y\}$. Asumsikan bahwa pemetaan A dari X ke Y adalah pemetaan satu-satu dan onto.

Adapun proses pembentukan ruang fungsi *Cesaro* dinyatakan dalam definisi berikut ini.

Definisi 3.1.1

Misal $X := \{f \mid Af \in Y\}$, X *disebut ruang fungsi Cesaro yang dinotasikan* CES_p, *jika* A *adalah operator linear* T *dimana*

$$(T\,|f|)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt \ \ dan\ \ Y = L_p(0,\infty),\ untuk\ 1 < p < \infty.$$

Dengan kata lain $f \in L_p(0,\infty)$ *untuk* $1 < p < \infty$, *jika dan hanya jika*

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx\right]^{1/p} < \infty.$$

Berdasarkan *Definisi 3.1.1* di atas dapat disimpulkan bahwa ruang fungsi Cesaro memuat semua fungsi terukur f yang jika ditransformasikan oleh operator T terdapat pada ruang fungsi klasik $L_p(0,\infty)$.

Contoh 3.1.2.

Fungsi f dengan $0 \le f(t) < 1$ dan turun untuk semua $t \in (0,\infty)$ adalah anggota dari ruang fungsi *Cesaro* CES_p. Sebagai contoh fungsi f dengan $f(t) = 0$ untuk semua $t \in (0,\infty)$ adalah anggota dari ruang fungsi *Cesaro* CES_p, karena

$$\begin{aligned}
\| f \| &= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x 0\, dt \right)^p dx \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_0^\infty 0\, dx \right]^{1/p} \\
&= 0 < \infty
\end{aligned}$$

Contoh 3.1.3

Tetapi untuk fungsi f dengan $f(t) \ge 1$ dan tidak turun untuk semua $t \in (0,\infty)$ bukan anggota dari ruang fungsi *Cesaro* CES_p. Sebagai contoh $f(t) = 2t$ untuk semua $t \in (0,\infty)$ bukan anggota dari ruang fungsi *Cesaro* CES_p, karena

$$\begin{aligned}
\| f \| &= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | 2t | dt \right)^p dx \right]^{1/p}
\end{aligned}$$

$$=\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x 2t\,dt\right)^p dx\right]^{1/p}$$

$$=\left[\int_0^\infty x^p dx\right]^{1/p}$$

Karena $\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^p dx$ tak hingga, maka nilai $\int_0^\infty x^p dx$ tak hingga, sehingga

$\left[\int_0^\infty x^p dx\right]^{1/p}$ tak hingga.

3.2 Kelengkapan Ruang Fungsi *Cesaro*

Sebelum ditunjukkan mengenai kelengkapan dari ruang fungsi *Cesaro* CES_p terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa ruang fungsi *Cesaro* CES_p adalah ruang fungsi bernorma terhadap norma yang didefinisikan berikut:

$$\| f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx\right]^{1/p} \text{ untuk setiap } f \in CES_p .$$

Misalkan $f, g \in CES_p$ sebarang maka berlaku:

i) $\| f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx\right]^{1/p} \geq 0$.

Hal ini karena $\| f \|$ merupakan hasil pengintegralan mutlak suatu fungsi, dan $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ untuk semua $t \in (0,\infty)$ sebab:

$$\| f(t) \| = 0 \Leftrightarrow \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt = 0 \text{, karena } x \in (0,\infty) \text{ sehingga } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 0$$

Jadi untuk setiap $f \in CES_p$ berlaku

$$\| f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \geq 0$$

dan

$$\| f \| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0 \text{ untuk semua } t \in (0,\infty).$$

ii) $\| \alpha f \| = | \alpha | \| f \|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, sebab:

$$\| \alpha f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | \alpha f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | \alpha | | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} | \alpha | \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty |\alpha|^p \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[|\alpha|^p \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha|^{p/p} \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha| \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha| \, \| f \|$$

Jadi dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $f \in CES_p$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\| \alpha f \| = |\alpha| \, \| f \|$.

iii) $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$, sebab:

$$\|f + g\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) + g(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$\le \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x (|f(t)| + |g(t)|)dt \right)^p dx \right]^{1/p} = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|dt + \frac{1}{x} \int_0^x |g(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$\le \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |g(t)|dt \right)^p dx \right]^{1/p} = \| f \| + \| g \|$$

Jadi dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $f, g \in CES_p$ berlaku

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

Karena norma yang didefinisikan di atas memenuhi aksioma norma (*i*), (*ii*), dan (*iii*) maka berdasarkan *Definisi 2.4.2,* ruang fungsi *Cesaro* CES_p adalah ruang bernorma.

Selanjutnya akan dibahas mengenai kelengkapan dari ruang fungsi *Cesaro* CES_p.

Teorema 3.2.1

Ruang fungsi Cesaro CES_p adalah ruang fungsi bernorma yang lengkap (ruang Banach).

Bukti.

Misalkan $\{y_m\}$ adalah barisan *Cauchy* di CES_p. Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku

$$|y_m(t) - y_n(t)| = \left[\int_0^\infty T\,|\,y_m(t) - y_n(t)\,|^p\,dx\right]^{1/p} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left[\int_0^\infty T\,|\,y_m(t) - y_n(t)\,|^p\,dx\right] < \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow T\,|\,y_m(t) - y_n(t)\,|^p < \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow T\,|\,y_m(t) - y_n(t)\,| < \varepsilon.$$

Karena $L_p(0,\infty)$ lengkap maka terdapat $y(t) \in L_p(0,\infty)$ sedemikian sehingga $y_m(t) \to y(t)$. Artinya $|\,y_m(t) - y(t)\,| < \varepsilon$ untuk $m \to \infty$. Akan ditunjukkan bahwa $y(t) \in CES_p$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $T \mid y(t) \mid \in L_p(0,\infty)$.

Selanjutnya

$$|\, y(t) \,| = |\, y(t) - y_m(t) + y_m(t) \,| \leq |\, y(t) - y_m(t) \,| + |\, y_m(t) \,|$$

$$\Rightarrow \int_0^x |\, y(t) \,|\, dt \;\leq\; \int_0^x \left(|\, y(t) - y_m(t) \,| + |\, y_m(t) \,| \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x |\, y(t) \,| dt \;\leq \int_0^x |\, y(t) - y_m(t) \,| dt + \int_0^x |\, y_m(t) \,| dt \qquad (\textstyle\int \text{operator linier})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\int_0^x |\, y(t) \,| dt \leq \; \frac{1}{x}\int_0^x |\, y(t) - y_m(t) \,| dt + \frac{1}{x}\int_0^x |\, y_m(t) \,| dt$$

$$\Rightarrow T \mid y(x) \mid \leq T \mid y(x) - y_m(x) \mid + T \mid y_m(x) \mid.$$

Diketahui bahwa $T \mid y_m(t) \mid \in L_p(0,\infty)$ dan karena $L_p(0,\infty)$ adalah ruang yang lengkap maka $T \mid y(t) - y_m(t) \mid < \infty$ sehingga $T \mid y(t) \mid < \infty$. Ini mengakibatkan bahwa $T \mid y(t) \mid \in L_p(0,\infty)$ dan ini menunjukkan bahwa $y(t) \in CES_p$. Karena setiap barisan Cauchy $\{y_m\}$ di CES_p konvergen ke $y(t) \in CES_p$ maka berdasarkan *Definisi 2.5.2* CES_p adalah ruang yang lengkap (ruang banach).

3.3 Sifat-Sifat Ruang Fungsi *Cesaro*

Berikut akan dibahas mengenai sifat-sifat dari ruang fungsi *Cesaro* yang lain, seperti kepadatan, keterbagian, dan lain-lain.

Teorema 3.3.1

Ruang fungsi Cesaro CES_p adalah ruang solid.

Bukti.

Misalkan $f \in CES_p$ maka $T|f| \in L_p(0,\infty)$ dengan

$$\left(T|f|\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt < \infty.$$

Selanjutnya jika $|g(t)| \le |f(t)|$ untuk setiap $t \in (0,\infty)$ maka

$$\left(T|g|\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt \le \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt < \infty$$

sehingga $\left(T|g|\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt < \infty$ atau $T|g| \in L_p(0,\infty)$. Dengan demikian $g \in CES_p$.

Karena jika $|g(t)| \le |f(t)|$ untuk setiap $t \in (0,\infty)$ mengakibatkan $g \in CES_p$ maka berdasarkan *Definisi 2.6.1* CES_p adalah himpunan yang solid.

Teorema 3.3.2

Ruang fungsi Cesaro CES_p adalah ruang terbagi (separable).

Bukti.

Misal X adalah ruang dari semua fungsi terukur bernilai rasional $(0,\infty)$ sedemikian sehingga norma

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx\right]^{1/p} \text{ konvergen.}$$

Akan ditunjukkan bahwa X subruang dari CES_p yakni dengan membuktikan bahwa X ruang bernorma.

(i) $\| f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \geq 0$, hal ini karena $\| f \|$ merupakan hasil pengintegralan dari fungsi-fungsi bernilai rasional non negatif, dan $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ untuk semua $t \in (0, \infty)$ sebab:

$$\| f(t) \| = 0 \Leftrightarrow \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt = 0, \text{ karena } x \in (0, \infty) \text{ sehingga } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 0$$

Jadi untuk setiap $f \in X$ berlaku $\| f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \geq 0$ dan $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ untuk semua $t \in (0, \infty)$.

(ii) $\| \alpha f \| = | \alpha | \| f \|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, sebab:

$$\| \alpha f \| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | \alpha f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | \alpha | | f(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} |\alpha| \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_0^\infty |\alpha|^p \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= \left[|\alpha|^p \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha|^{p/p} \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha| \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p}$$

$$= |\alpha| \, \| f \|$$

Jadi dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $f \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $\| \alpha f \| = |\alpha| \, \| f \|$.

(iii) $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$, sebab:

$$\|f + g\| = \left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) + g(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \leq$$

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | + | g(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} =$$

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x | f(t) | dt + \frac{1}{x} \int_0^x | g(t) | dt \right)^p dx \right]^{1/p} \leq$$

$$\left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx\right]^{1/p}+\left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt\right)^p dx\right]^{1/p}=$$

$$\|f\|+\|g\|$$

Jadi dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $f,g\in X$ berlaku $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$.

Karena norma yang didefinisikan di atas memenuhi aksioma norma (*i*), (*ii*), dan (*iii*) maka berdasarkan *Definisi 2.4.2* ruang fungsi X adalah ruang fungsi bernorma.

Sekarang akan dibuktikan bahwa X adalah padat di CES_p. Perhatikan bahwa $\overline{X}$ yaitu himpunan dari semua fungsi bernilai rasional di X dan semua titik akumulasinya yaitu fungsi bernilai irrasional, sehingga $\overline{X}$ membentuk ruang fungsi CES_p dengan kata lain $\overline{X}=CES_p$. Berdasarkan *Definisi 2.7.2,* maka CES_p merupakan ruang terbagi.

3.4 Ekuivalensi antara Norma pada Ruang Fungsi *Cesaro*

Pada bagian ini akan dibahas mengenai ekuivalensi antara norma pada ruang fungsi *Cesaro* dengan sebuah norma $\|f\|_0$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\| f \|_0 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \int_1^{n+1} | f(t) | dt \right)^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(m \int_0^{1/m} | f(t) | dt \right)^p \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k \right)^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(m \sum_{k=m}^{\infty} | t_k | \right)^p \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right]^{1/p}.$$

dengan $s_k = \int_k^{k+1} | f(t) | dt$ dan $t_k = \int_{1/(k+1)}^{1/k} | f(t) | dt$

sebagaimana akan dijelaskan oleh *Teorema 3.4.1.* Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa $\| . \|_0$ adalah sebuah norma.

(i) $\| f \|_0 \geq 0$ dan $\| f \|_0 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$

Bukti.

Misalkan $f, g \in CES_p$ dan $m \in \mathbb{N}$. Jelas $\| f \|_0 \geq 0$ karena masing-masing adalah integral mutlak dari fungsi. Demikian juga $\| f \|_0 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.

(ii) $\| \alpha f \|_0 = | \alpha | \, \| f \|_0$

Bukti.

$$\| \alpha f \|_0 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \int_1^{n+1} | \alpha f(t) | dt \right)^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(m \int_0^{1/m} | \alpha f(t) | dt \right)^p \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \int_1^{n+1} | \alpha | \, | f(t) | dt \right)^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(m \int_0^{1/m} | \alpha | \, | f(t) | dt \right)^p \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} | \alpha | \int_1^{n+1} | f(t) | dt \right)^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(m | \alpha | \int_0^{1/m} | f(t) | dt \right)^p \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right]^{1/p}$$

$$=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha|^{p}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+\left[\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha|^{p}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$=\left[|\alpha|^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+\left[|\alpha|^{p}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$=|\alpha|\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+|\alpha|\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$=|\alpha|\left(\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}\right)$$

$$=|\alpha|\,\|\alpha f\|_{0}$$

(iii) $\|f+g\|_0 \le \|f\|_0+\|g\|_0$

Bukti.

$$\|f+g\|_0=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|(f+g)(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|(f+g)(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$\le\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|+|g(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+$$

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|+|g(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}=$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|dt+\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|g(t)|dt\right)^{p}\right]^{1/p}+$$

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|dt+m\int_{0}^{1/m}|g(t)|dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

Berdasarkan pertidaksamaan Minkowski

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|\,dt+\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|g(t)|\,dt\right)^{p}\right]^{1/p} \le \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|\,dt\right)^{p}\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|g(t)|\,dt\right)^{p}\right]^{1/p} \qquad (*)$$

dan

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|\,dt+m\int_{0}^{1/m}|g(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$\le \left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|g(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p} \qquad (**)$$

Berdasarkan (*) dan (**) dapat disimpulkan bahwa $\| f+g \|_0 \le \| f \|_0 + \| g \|_0$.

Karena $\| f \|_0$ memenuhi *(i), (ii),* dan (*iii*) maka berdasarkan *Definisi 2.1.2,* $\| f \|_0$ adalah sebuah norma.

Teorema 3.4.1

Norma $\| f \| = \left[\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|f(t)|\,dt\right)^{p}dx\right]^{1/p}$ *ekuivalen dengan norma* $\| f \|_0$.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $\| f \| = \left[\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|f(t)|\,dt\right)^{p}dx\right]^{1/p}$ ekuivalen dengan norma $\| f \|_0$ dimana

$$\|f\|_0 = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^{n+1}|f(t)|\,dt\right)^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k\right)^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\sum_{k=m}^{\infty}|t_k|\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

dengan $s_k = \int_k^{k+1}|f(t)|\,dt$ dan $t_k = \int_{1/(k+1)}^{1/k}|f(t)|\,dt$. Dengan ditunjukkan bahwa terdapat konstanta K_1 dan K_2 sedemikian sehingga berlaku $K_1\|f\|_0 \le \|f\| \le K_2\|f\|_0$ untuk setiap $f \in CES_p$.

Untuk $n \le x \le n+1$, maka diperoleh

$$\frac{1}{2n}\int_0^n|f(t)|\,dt \le \frac{1}{n+1}\int_0^n|f(t)|\,dt \le \frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt \le \frac{1}{n}\int_0^{n+1}|f(t)|\,dt \le \frac{2}{n+1}\int_0^{n+1}|f(t)dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n}\int_0^n|f(t)|\,dt \le \frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt \le \frac{2}{n+1}\int_0^{n+1}|f(t)dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2n}\int_0^n|f(t)|\,dt\right)^p \le \left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt\right)^p \le \left(\frac{2}{n+1}\int_0^{n+1}|f(t)dt\right)^p$$

$$\Rightarrow 2^{-p}\left(\frac{1}{n}\int_0^n|f(t)|\,dt\right)^p \le \left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt\right)^p \le 2^p\left(\frac{1}{n+1}\int_0^{n+1}|f(t)dt\right)^p$$

$$\Rightarrow 2^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^n|f(t)|\,dt\right)^p \le \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt\right)^p dx \le 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\int_0^{n+1}|f(t)dt\right)^p$$

$$\Rightarrow 2^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^n|f(t)|\,dt\right)^p \le \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|\,dt\right)^p dx \le 2^p\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^n|f(t)dt\right)^p$$

Begitu juga, untuk $1/(m+1) \le x \le 1/m \Leftrightarrow m \le 1/x \le m+1$ dengan $m = 1,2,3,...,$ dan diperoleh

$$\frac{m+1}{2}\int_0^{1/m+1}|f(t)|dt \le m\int_0^{1/m+1}|f(t)|dt \le \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt$$

$$\le (m+1)\int_0^{1/m}|f(t)|dt \le 2m\int_0^{1/m}|f(t)|dt$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2}\int_0^{1/m+1}|f(t)|dt \le \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt \le 2m\int_0^{1/m}|f(t)|dt$$

$$\Rightarrow 2^{-p}\left((m+1)\int_0^{1/m+1}|f(t)|dt\right)^p \le \left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|dt\right)^p \le 2^p\left(m\int_0^{1/m}|f(t)|dt\right)^p$$

$$\Rightarrow 2^{-p}\sum_{m=2}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m}|f(t)|dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) \le \int_0^1\left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|dt\right)^p dx$$

$$\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m}|f(t)|dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

Perhatikan bahwa

$$2^{-2p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^{n+1}|f(t)|dt\right)^p \le 2^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\int_1^{n+1}|f(t)|dt\right)^p$$

$$\le 2^{-p}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^{n}|f(t)|dt\right)^p \quad \text{..............(1)}$$

dan

$$2^{-2p}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) \le 2^{-p}\left(\int_0^1|f(t)|\,dt\right)^p$$

$$+2^{-p}\sum_{m=2}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) \text{........(2)}$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$$2^{-2p}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|\,dt\right)^{p}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]$$

$$\leq 2^{-p}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n}|f(t)|dt\right)^{p}+2^{-p}\left(\int_{0}^{1}|f(t)|\,dt\right)^{p}+2^{-p}\sum_{m=2}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=2^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{0}^{n}|f(t)|dt\right)^{p}+2^{-p}\sum_{m=2}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$\leq\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|f(t)|\,dt\right)^{p}dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|f(t)|\,dt\right)^{p}dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|f(t)|\,dt\right)^{p}dx$$

$$=\|f\|^{p}.$$

Berdasarkan pertidaksamaan $x^{1/p}+y^{1/p}\leq 2^{1/q}(x+y)^{1/p}$ pada *Teorema 2.3.4* dimana $x,y\geq 0$, diperoleh

$$2^{-2-1/q}\,\|f\|_{0}\leq 2^{-2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{1}^{n+1}|f(t)|\,dt\right)^{p}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_{0}^{1/m}|f(t)|\,dt\right)^{p}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]^{1/p}$$

$$\leq\|f\|$$

Dengan $K_1=2^{-2-1/q}$.

Selanjutnya dengan menuliskan $\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}$ diperoleh

$$2^{p}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{0}^{n}|f(t)|\,dt\right)^{p}=2^{2p}\sum_{n=2}^{\infty}n^{-p}\left[\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1}|f(t)|\,dt+\int_{1}^{n}|f(t)|\,dt\right)\right]^{p}.$$

Berdasarkan pertidaksamaan pada *Teorema 2.3.5* diperoleh

$$2^{2p}\sum_{n=2}^{\infty} n^{-p}\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^1 |f(t)|\,dt+\int_1^n |f(t)|\,dt\right)\right]^p$$

$$\le 2^{2p}\sum_{n=2}^{\infty} n^{-p}\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right)^p+\frac{1}{2}\left(\int_1^n |f(t)|\,dt\right)^p\right]$$

$$\le 2^{2p}(\zeta(p)-1)\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m} |f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right\}$$

$$+2^{2p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^{n+1} |f(t)|\,dt\right)^p.$$

Selanjutnya

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx+\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx$$

$$\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m} |f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+2^p\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^n |f(t)|\,dt\right)^p$$

$$\le \{2^{2p}(\zeta(p)-1)+2^p\}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m} |f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$+2^{2p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^{n+1} |f(t)|\,dt\right)^p$$

$$\le A\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\int_0^{1/m} |f(t)|\,dt\right)^p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^{n+1} |f(t)|\,dt\right)^p\right\},$$

dengan $A=\max\{2^{2p}(\zeta(p)-1)+2^p,2^{2p-1}\}$.

Dengan demikian berdasarkan pertidaksamaan $(x+y)^{1/p} \leq 2^{1/p}(x^{1/p}+y^{1/p})$ pada *Teorema 2.3.4* dengan $x, y \geq 0$ diperoleh

$$\|f\| \leq A^{1/p} 2^{1/p} \|f\|_0.$$

Dengan $K_2 = (2A)^{1/p}$.

Karena keberadaan konstanta K_1 dan K_2 telah dibuktikan dan pertidaksamaan $K_1 \|f\|_0 \leq \|f\| \leq K_2 \|f\|_0$ berlaku maka norma $\|.\|$ ekuivalen dengan norma $\|.\|_0$.