BAB III

ANALISIS FAKTOR

3.1 Definisi Analisis Faktor

Fruchter (1954) mengutarakan bahwa analisis faktor merupakan suatu metode yang digunakan untuk menganalisis sejumlah observasi dipandang dari segi interkorelasinya. Metode ini pada dasarnya digunakan untuk menetapkan apakah variansi-variansi yang terlihat dalam suatu observasi yang besar dapat didasarkan pada suatu jumlah kategori dasar yang jumlahnya lebih sedikit dari yang terlihat. Tujuan utama dari analisis faktor adalah menggambarkan variansi-kovariansi antar variabel yang sebenarnya dapat dibagi kedalam beberapa sifat dasar namun tidak terobservasi kuantitasnya. Sifat yang mendasar tersebut yang disebut faktor umum (Johnson:1956).

Konsep variansi memegang peran yang sangat penting dalam analisis ini. Menurut Fruchter (1954), ada beberapa jenis variansi yaitu: *common varians, specific varians.* Varians umum *(Common varians)* merupakan suatu varians yang reliabel berkorelasi dengan variabel lain. Varians spesifik (*Specific varians)* merupakan suatu varians yang diperoleh dari kesalahan teknik pengambilan sampel, pengukuran dan kondisi tes yang berada di bawah standar, kondisi psikologis, perubahan tertentu pada diri individu dan perubahan lainnya yang menyebabkan unreabilitas. Varians ini tidak berkorelasi dengan varians yang reliabel. Sebagai sebuah metode, analisis faktor mempunyai serangkaian langkah atau tahap. Terdapat lima langkah penting dalam proses analisis faktor yaitu menggunakan transformasi *oblique* maka model faktor yang diperoleh disebut model faktor *oblique*. Pada tugas akhir ini hanya akan dibahas tentang model faktor ortogonal.

Berikut ini merupakan asumsi yang diperlukan dalam model faktor ortogonal:

- $E(F_j) = 0$ untuk setiap $j = 1,2,\ldots,m$
- var(F_j) = 1 dan kov (F_i, F_j) = 0, dengan $i \neq j$ untuk setiap i dan $j = 1,2,\ldots,m$
- $E(\varepsilon_i) = 0$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,p$
- var(ε_i) = ψ_i dan kov ($\varepsilon_i, \varepsilon_j$) = 0, dengan $i \neq j$ untuk setiap i dan

  $j = 1,2,\ldots,m$

Model faktor ortogonal berakibat kepada struktur kovarians untuk variabel acak **X**, yaitu:

1) kov(**X**) = $\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$ (3.2.3)

   atau

   $\text{var}(X_i) = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2 + \psi_i$

   $\text{kov}(X_i, X_k) = l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + \ldots + l_{im}l_{km}$

2) kov(**X**,**F**) = **L** (3.2.4)

   atau

   kov (X_i, F_j) = l_{ij} dengan $i = 1,2,\ldots,p$ dan $j = 1,2,\ldots,m$

   dimana l_{ij} merupakan elemen ke-*ij* dari matriks **L**.

Bukti 1)

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' = (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})'$$
$$= (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})((\mathbf{LF})' + (\boldsymbol{\varepsilon}'))$$
$$= \mathbf{LF}(\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})' + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'$$

Maka

$$\Sigma = \text{kov}(\mathbf{X})$$

$$= E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$= E(\mathbf{LF}(\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})' + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$$

$$= E(\mathbf{LF}(\mathbf{LF})') + E(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})') + E(\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$$

$$= E(\mathbf{LFF}'\mathbf{L}') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}'\mathbf{L}') + E(\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$$

$$= \mathbf{L}E(\mathbf{FF}')\mathbf{L}' + E(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}')\mathbf{L}' + \mathbf{L}E(\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$$

$$= \mathbf{LIL}' + 0 + 0 + \boldsymbol{\psi}$$

$$= \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$$

Atau

$$\text{kov}(X_i, X_k) = E[(\mathbf{X_i}-\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i})(\mathbf{X_k}-\boldsymbol{\mu}_\mathbf{k})^\mathbf{t}]$$

$$= E[(\mathbf{l_{ik}F_i}-\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{i})(\mathbf{l_{ki}F_j}-\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{k})^\mathbf{t}]$$

$$= l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2 + \psi_i \qquad \text{jika } i = k$$

$$= l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + \ldots + l_{im}l_{km} \qquad \text{jika } i \neq k$$

Bukti 2)

Kovarians untuk variabel acak **X** dan faktor umum **F** adalah

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{F}^\mathbf{t} = (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}^\mathbf{t}$$
$$= \mathbf{LFF}^\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}^\mathbf{t}$$

Karena var(F_i) =1 dan kov($\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{F}$) = 0, maka

$$\text{kov}(\mathbf{X},\mathbf{F}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{F}^t$$

$$= \mathbf{E}[\mathbf{LFF}^t + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}^t]$$

$$= \mathbf{E}[\mathbf{LFF}^t] + \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}[\ ^t]$$

$$= \mathbf{LE}[\mathbf{FF}^t] + \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}[\ ^t]$$

$$= \mathbf{LI} + \mathbf{0}$$

$$= \mathbf{L}$$

Secara umum ditulis sebagai berikut:

kov $(X_i, F_j) = l_{ij}$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$ dan $j = 1,2,\ldots,m$

Proporsi varians variabel ke-i terhadap faktor umum (m) disebut komunalitas dan dinotasikan dengan h_i^2. Varians dari variabel acak ke-i dinotasikan dengan σ_{ii} dan varians spesifik dari variabel acak ke-i dinotasikan dengan ψ_i merupakan proporsi varians var(X_i) $=\sigma_{ii}$ terhadap faktor spesifik. Sehingga total varians dari model faktor adalah:

$$\mathbf{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (h_i^2 + \psi_i)$$

Atau dapat dibentuk menjadi:

$$\underbrace{\sigma_{ii}}_{\text{Var}(X_i)} = \underbrace{l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2}_{\text{komunalitas}} + \underbrace{\psi_i}_{\text{varians spesifik}}$$

Var(X_i) = komunalitas + varians spesifik

Atau $h_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2$ (3.2.5)

Sehingga $\sigma_{ii} = h_i^2 + \psi_i$, untuk setiap $i = 1,2,\ldots,p$

Komunalitas ke-i merupakan jumlah kuadrat dari faktor loading variabel ke-i pada m faktor umum.

Pembakuan (standarisasi) dilakukan untuk menghindari masalah yang terjadi, yaitu jika terdapat variabel dengan varians sangat besar sehingga penentuan faktor loading menjadi kurang objektif. Jika setiap variabel acak X_i dibakukan sehingga membentuk variabel $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}$, untuk setiap $i = 1,2,\ldots,p$, maka vektor variabel acak yang dibakukan adalah:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \frac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks varians kovarians dari variabel acak yang dibakukan adalah :

$$\Sigma = E\left[\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\sigma}}\right)\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\sigma}}\right)^{\mathbf{t}}\right]$$

$$\Sigma = E\left[\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^{\mathbf{t}}\right] = E\left(\begin{bmatrix} \frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \frac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}\right)$$

$$= E\begin{bmatrix} \frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{p2}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}.$$

Dari bab sebelumnya diketahui bahwa:

$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$ untuk setiap i dan $k = 1,2,\ldots,p$

Sehingga matriks varians kovarians untuk variabel yang dibakukan dapat dinyatakan sebagai matriks korelasi $\boldsymbol{\rho}$.

$$\text{Kov}(\mathbf{Z}) = \text{kor}\ (\mathbf{X}) = \boldsymbol{\rho} \qquad (3.2.6)$$

Jika variabel yang dibakukan digunakan pada model faktor maka persamaan (3.2.6) menjadi

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{LL}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\psi} \qquad (3.2.7)$$

Dan matriks loading menjadi korelasi dari $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{F}$, yaitu:

$$\text{Kor}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \mathbf{L} \qquad (3.2.8)$$

3.3 Pemilihan Jumlah Faktor Umum (*m*)

Pemilihan jumlah faktor umum (m) merupakan langkah terpenting dalam melakukan analisis faktor kerena berperan penting dalam memperoleh model faktor. Jika jumlah faktor umun terlalu besar dapat mengakibatkan beberapa faktor spesifik akan terbawa kedalam faktor umum dan sebaliknya jika terlalu kecil dapat menghilangkan faktor umum yang penting. Rencher (1934) megutarakan bahwa ada 4 kriteria dalam menentukan jumlah faktor umum, yaitu:

1) Jumlah faktor umum (m) sama dengan jumlah faktor yang diperlukan pada perhitungan variansi untuk mendapatkan persentase minimal 80% dari jumlah varians total yaitu tr(**R**)
2) Jumlah faktor umum (m) sama dengan jumlah nilai eigen yang lebih besar dari pada rata-rata total nilai eigennya. Untuk matriks korelasi (**R**) rata-rata nilai eigennya sama dengan 1 sehingga banyaknya faktor umum adalah banyaknya nilai eigen yang lebih dari satu sedangkan untuk matriks varians kovarians rata-ratanya adalah $\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{p}$.
3) Jumlah faktor umum (m) dapat ditentukan berdasarkan plot nilai eigen dari matriks **S** atau **R** yang disebut *scree plot*. Jika grafik turun secara tajam diikuti dengan garis lurus dengan sedikit landai maka dapat dipilih nilai eigen sebanyak m sebelum grafik membentuk garis lurus.
4) Memilih banyaknya faktor umum setelah memperoleh nilai loading dengan melakukan pengujian hipotesis. Hipotesis nol menyatakan bahwa m sesuai dengan model faktor.

H_0 : $\Sigma = \mathbf{LL}^t + \psi$ dimana **L** adalah matriks $p \times m$

H_1 : Σ merupakan matriks dari bentuk matriks definit positif yang lain.

Kriteria keempat khusus digunakan pada analisis faktor dengan menggunakan metode penaksiran maksimum likelihood.

3.4 Metode Estimasi

3.4.1 Metode Komponen Utama (*Principal Component*)

Metode komponen utama bertujuan untuk menduga parameter pada analisis faktor, yaitu faktor loading, komunalitas dan varians spesifik. Matriks varians kovarians dari sampel yaitu **S** merupakan estimator bagi matriks varians kovarians populasi yang tidak diketahui yaitu Σ. Untuk mencari estimasi dari $\hat{\mathbf{L}}$, substitusikan Σ dengan **S** pada persamaan (3.2.3) sehingga diperoleh:

$$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} \tag{3.4.1}$$

Dalam metode komponen utama, $\hat{\mathbf{\Psi}}$ diabaikan dan **S** dapat difaktorkan menjadi $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$. Untuk memfaktorkan **S** dapat juga didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{S} = \mathbf{EDE}^t \tag{3.4.2}$$

Dimana **E** merupakan matriks ortogonal yang terdiri dari vektor eigen yang telah dinormalisasi $\mathbf{ee}^t = 1$ dari matriks **S** dan

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \tag{3.4.3}$$

Dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ adalah nilai eigen dari **S** dan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p > 0$. Untuk menyelesaikannya dilakukan pemfaktoran $\mathbf{S} = \mathbf{EDE}^t$ ke dalam bentuk $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, sehingga dapat dibentuk menjadi

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.4}$$

Dengan

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_p} \end{bmatrix} \tag{3.4.5}$$

Dengan demikian persamaan (3.4.2) menjadi

$$\mathbf{S} = \mathbf{EDE}^t$$

$$= \mathbf{ED}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}^t$$

$$= \left(\mathbf{ED}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}\right)^t \tag{3.4.6}$$

Dengan mengambil $\mathbf{D}_1$ yang terdiri dari nilai eigen terbesar $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ dan $\mathbf{E}_1$ terdiri dari vektor eigen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ yang bersesuaian dengan $\mathbf{D}_1$, maka akan diperoleh nilai dari $\hat{\mathbf{L}}$, yaitu:

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}} = \underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{E}}_1}\ \underset{(m\times m)}{\mathbf{D}_1^{\frac{1}{2}}} \tag{3.4.7}$$

Atau

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}} = \underset{(p\times m)}{\left[\mathbf{e}_1\sqrt{\lambda_1} \mid \mathbf{e}_2\sqrt{\lambda_2} \mid \ldots \mid \mathbf{e}_m\sqrt{\lambda_m}\right]}$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\,\mathbf{e}_1 \mid \sqrt{\lambda_2}\,\mathbf{e}_2 \mid \ldots \mid \sqrt{\lambda_m}\,\mathbf{e}_m \right]_{(p\times m)} \qquad (3.4.8)$$

Dengan $\hat{\mathbf{L}} = \left[\hat{l}_{i1}, \hat{l}_{i2}, \ldots, \hat{l}_{im}\right]$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$

Persamaan (3.4.6) ketika diaplikasikan pada matriks **S** atau matriks korelasi **R** disebut sebagai solusi komponen utama (*Principal Component Solution*). Komponen utama pada analisis faktor pada matriks varians kovarians sampel **S** dinyatakan dengan pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2), \ldots, (\hat{\lambda}_p, \hat{e}_p)$ dengan $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \ldots \geq \hat{\lambda}_p$. Jika $m < p$ merupakan jumlah dari faktor umum, maka matriks dari estimasi faktor loading $\{\hat{l}_{ij}\}$ dinyatakan sebagai:

$$\hat{\mathbf{L}} = \left[\mathbf{e}_1\sqrt{\lambda_1} \mid \mathbf{e}_2\sqrt{\lambda_2} \mid \ldots \mid \mathbf{e}_m\sqrt{\lambda_m}\right] \qquad (3.4.9)$$

Estimasi varians spesifik diberikan oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, sehingga

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\psi}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\psi}_p \end{bmatrix} \text{ dengan } \hat{\psi}_i = s_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_{ij}^2 \qquad (3.4.10)$$

Estimasi komunalitas dinyatakan sebagai:

$$\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + \cdots + \hat{l}_{im}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_{ij}^2 \qquad (3.4.11)$$

Secara ideal, kontribusi beberapa faktor utama awal terhadap varians sampel cukup besar. Kontribusi varians sampel s_{ii} dari faktor umum pertama dinyatakan dengan $\hat{l}_{i1}^2$ maka kontribusi dari faktor umum pertama terhadap varians total $\mathbf{tr(S)} = s_{11} + s_{22} + \cdots + s_{pp}$ adalah:

$$\hat{l}_{11}^2 + \hat{l}_{21}^2 + \cdots + \hat{l}_{p1}^2 = \sum_{i=1}^{p} \hat{l}_{i1}^2 = \left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_{i1}\right)^t\left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_{i1}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_{i1}\right)^2 = \hat{\lambda}_1\sum_{i=1}^{p}(\hat{\mathbf{e}}_{i1})^2 = \hat{\lambda}_1$$

Dengan $\hat{\mathbf{e}}_1$ adalah vektor eigen satuan yang memiliki panjang satu. Sehingga secara umum kontribusi dari faktor umum ke-j terhadap varians sampel total adalah:

$$\hat{l}_{1j}^2 + \hat{l}_{2j}^2 + \cdots + \hat{l}_{pj}^2 = \sum_{i=1}^{p} \hat{l}_{ij}^2 = \left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_{ij}\right)^t\left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_{ij}\right)^2 = \hat{\lambda}_j\sum_{i=1}^{p}(\hat{\mathbf{e}}_{ij})^2 = \hat{\lambda}_j$$

Definisi 3.4.1

Proporsi varians $\xi^{(j)}$ yang berasal dari faktor umum ke-j adalah :

$$\xi^{(j)} = \frac{\hat{\lambda}_j}{s_{11} + s_{22} + \cdots + s_{pp}}$$ untuk analisis faktor pada **S**, dan

$$\xi^{(j)} = \frac{\hat{\lambda}_j}{p}$$ untuk analisis faktor pada **R**

Berdasarkan penjelasan mengenai analisis faktor dengan menggunakan metode komponen utama dapat dibuat suatu algoritma seperti berikut ini:

- Dengan menggunakan matriks korelasi algoritmanya sebagai berikut:
  1. Masukkan seluruh data sampel dengan p variabel dan n pengamatan, $\mathbf{X}_{pxn}$.
  2. Hitung matriks korelasi untuk sampel **R**.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan $r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}}$ dengan s_{ij} merupakan kovarians sampel dari variabel *i* dan *j*, untuk setiap *i* dan $j = 1,2,\ldots,p$

3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks **R**.
4. Menghitung matriks invers korelasi $\mathbf{R}^{-1}$ sehingga $\mathbf{RR}^{-1} = \mathbf{I}$
5. Tentukan nilai komunalitas awal $h_i^2 = 1$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$.
6. Substitusi elemen diagonal pada matriks **R** dengan nilai $\hat{h}_i^2 = 1$ maka diperoleh matriks korelasi reproduksi $\mathbf{R}_r$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} h_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & h_2^2 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & h_p^2 \end{bmatrix}$$

7. Dari matriks $\mathbf{R}_r$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dan vektor eigen $e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{mi}$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$
8. Diperoleh nilai loading l_{ij} menggunakan rumus $l_{ij} = \sqrt{\lambda_i} e_{ij}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,p$.
9. Melakukan rotasi faktor untuk memperoleh nilai faktor loading dan komunalitas akhir untuk mempermudah interpretasi hasil analisis faktor.

Definisi 3.4.1 dapat digunakan sebagai salah satu kriteria dalam menentukan banyaknya faktor umum. Setelah seluruh nilai taksiran parameter diperoleh kemudian dihitung matriks sisa. Matriks sisa didefinisikan sebagai selisih dari korelasi sampel **S** atau dari matriks **R** dengan nilai-nilai taksiran yang diperoleh.

$$\text{Matriks sisa} = \mathbf{S} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\psi} \text{ atau } \mathbf{R} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\psi} \tag{3.4.12}$$

Sharma (1996) mengemukakan bahwa kelayakan dari model faktor yang terbentuk dapat dilihat dari matriks sisa $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^{t} - \hat{\psi}$ dan nilai RMSR (*Root Mean Square Residual*). Elemen diagonal dari matriks sisa merupakan varians spesifik dan elemen non diagonalnya merupakan selisih dari korelasi antar variabel yang terobservasi dengan korelasi antar variabel hasil estimasi, sehingga semakin kecil nilai sisa dan nilai RMSR maka model faktor yang diperoleh semakin baik. Nilai RMSR dari matriks sisa diperoleh dari

$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} res_{ij}^{2}}{p(p-1)/2}} \tag{3.4.13}$$

dengan p merupakan banyaknya variabel.

3.4.2 Metode Pemfaktoran Sumbu Utama (*Principal Axis Factoring*)

Dalam metode pemfaktoran sumbu utama untuk mengestimasi nilai faktor loading $\hat{\mathbf{L}}$ menggunakan estimasi awal dari $\hat{\mathbf{\Psi}}$ dan memfaktorkan $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ atau $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ dan diperoleh:

$$\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' \tag{3.4.14}$$

atau

$$\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' \tag{3.4.15}$$

Dari persamaan diketahui bahwa elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ merupakan komunalitas $\hat{h}_i^2 = s_{ii} - \hat{\psi}_i$ dan elemen diagonal dari matriks $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ merupakan komunalitas $\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\psi}_i$. Dengan nilai elemen diagonal tersebut maka $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ atau $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ memiliki bentuk:

$$\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & \hat{h}_2^2 & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix} \tag{3.4.16}$$

$$\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & \hat{h}_2^2 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix} \tag{3.4.17}$$

Estimasi komunalitas awal pada matriks $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ diperoleh dari

$$\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\psi}_i = 1 - \frac{1}{r^{ii}} \tag{3.4.18}$$

Dengan r^{ii} adalah elemen diagonal ke-*i* dari matriks $\mathbf{R}^{-1}$. Untuk $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$, estimasi komunalitas awal diperoleh secara analog dengan persamaan (3.4.18).

$$\hat{h}_i^2 = s_{ii} - \hat{\psi}_i = s_{ii} - \frac{1}{s_{ii}} \tag{3.4.19}$$

Dengan s_{ii} adalah elemen diagonal ke-*i* dari matriks $\mathbf{S}^{-1}$.

Untuk mencari estimasi dari $\hat{\mathbf{L}}$, matriks **S** dapat didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{S} = \mathbf{EDE^t}$$

Dimana **E** merupakan matriks ortogonal yang terdiri dari vektor eigen yang telah dinormalisasi $\mathbf{ee^t} = 1$ dari matriks **S** dan

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p\end{bmatrix}$$

Dengan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ adalah nilai eigen dari $\mathbf{S}$ dan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p > 0$. Untuk menyelesaikan pemfaktoran $\mathbf{S}=\mathbf{EDE}^t$ kedalam bentuk $\mathbf{S}=\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, sehingga dapat dibentuk menjadi persamaan (3.4.4) dan proses selanjutnya analog dengan metode komponen utama hingga diperoleh estimasi nilai faktor loading awal.

Setelah diperoleh estimasi nilai faktor loading awal $\hat{\mathbf{L}}$ dengan menggunakan estimasi nilai komunalitas awal $\hat{h}_i^2$ dari persamaan (3.4.19) sehingga diperoleh nilai komunalitas yang baru yaitu $\hat{h}_i^{*2}$ dengan menggunakan persamaan (3.2.5), maka diperoleh:

$$\hat{h}_i^{*2}=\sum_{j=1}^{m}\hat{l}_{ij}^2 \qquad (3.4.20)$$

Kemudian nilai $\hat{h}_i^{*2}$ disubstitusikan ke diagonal dari matriks $\mathbf{S}-\hat{\mathbf{\Psi}}$ atau $\mathbf{R}-\hat{\mathbf{\Psi}}$, sehingga diperoleh:

$$\mathbf{S}-\hat{\mathbf{\Psi}}=\begin{bmatrix}\hat{h}_1^{*2} & s_{12} & \cdots & s_{1p}\\ s_{21} & \hat{h}_2^{*2} & \cdots & s_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & \hat{h}_p^{*2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}-\hat{\mathbf{\Psi}}=\begin{bmatrix}\hat{h}_1^{*2} & r_{12} & \cdots & r_{1p}\\ r_{21} & \hat{h}_2^{*2} & \cdots & r_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & \hat{h}_p^{*2}\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh estimasi nilai loading yang baru $\hat{\mathbf{L}}^*$, yaitu:

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}^*} = \underset{(p\times m)}{\left[\mathbf{e}_1^*\sqrt{\lambda_1^*} \mid \mathbf{e}_2^*\sqrt{\lambda_2^*} \mid \ldots \mid \mathbf{e}_m^*\sqrt{\lambda_m^*}\right]}$$

$$= \underset{(p\times m)}{\left[\sqrt{\lambda_1^*}\mathbf{e}_1^* \mid \sqrt{\lambda_2^*}\mathbf{e}_2^* \mid \ldots \mid \sqrt{\lambda_m^*}\mathbf{e}_m^*\right]}$$

$\hat{\mathbf{L}}^* = \left[\hat{l}_{i1}^*, \hat{l}_{i2}^*, \ldots, \hat{l}_{im}^*\right]$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$

Dengan $(\lambda_m^*, \mathbf{e}_m^*)$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ merupakan pasangan nilai eigen dan vektor eigen yang ternormalisasi yang diperoleh dari matriks dengan mengganti nilai diagonal $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ atau $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ yang elemen diagonalnya diganti dengan nilai $\hat{h}_i^{*2}$. Proses penggantian nilai elemen diagonal $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ atau $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ dengan nilai $\hat{h}_i^{*2}$ diiterasikan hingga perubahan estimasi nilai komunalitas konvergen. Setelah proses konvergen maka nilai eigen dan vektor eigen pada iterasi terakhir matriks $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ atau $\mathbf{R} - \hat{\mathbf{\Psi}}$ digunakan untuk menentukan nilai faktor loading.

Definisi 3.4.2

Proporsi varians $\xi^{(j)}$ yang berasal dari faktor umum ke-j adalah :

$$\xi^{(j)} = \frac{\hat{\lambda}_j}{\mathbf{tr}(\mathbf{S} - \mathbf{\Psi})} = \frac{\hat{\lambda}_j}{s_{11} + s_{22} + \cdots + s_{pp}} \quad \text{untuk analisis faktor pada } \mathbf{S}$$

dan

$$\xi^{(j)} = \frac{\hat{\lambda}_j}{\mathbf{tr}(\mathbf{R} - \mathbf{\Psi})} = \frac{\hat{\lambda}_j}{p} \quad \text{untuk analisis faktor pada } \mathbf{R}$$

Berdasarkan penjelasan mengenai analisis faktor dengan menggunakan metode pemfaktoran sumbu utama dapat dibuat suatu algoritma seperti berikut ini:

- Dengan menggunakan matriks varians kovarians algoritmanya sebagai berikut:

1. Masukkan seluruh data sampel dengan p variabel dan n pengamatan, $\mathbf{X}_{pxn}$.
2. Hitung matriks varians kovarians untuk sampel **S**

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

Dengan $s_{ij} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_{ik} - \overline{X}_i)(X_{jk} - \overline{X}_j)$ untuk setiap i dan $j = 1,2,\ldots,p$

3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks **S.**
4. Menghitung matriks invers varians kovarians $\mathbf{S}^{-1}$ sehingga $\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$
5. Tentukan nilai komunalitas awal $h_i^{*2} = s_{ii} - \dfrac{1}{s_{ii}}$, dengan $i = 1,2,\ldots,p$ dan

   s_{ii} merupakan elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S}^{-1}$.
6. Substitusi elemen diagonal pada matriks **S** dengan nilai $\hat{h}_i^{*2}$ maka diperoleh matriks varians kovarians reproduksi $\mathbf{S}_r$

$$\mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} h_1^{*2} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & h_2^{*2} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & h_p^{*2} \end{bmatrix}$$

7. Dari matriks $\mathbf{S}_r$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dan vektor eigen $e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{mi}$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$

8. Diperoleh nilai loading l_{ij} menggunakan rumus $l_{ij} = \sqrt{\lambda_i} e_{ij}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,p$

9. Ambil nilai h_i^{**2} terkecil hingga $h_i^{*2} - h_i^{**2}$ merupakan nilai terbesar.

10. Jika nilai $h_i^{*2} - h_i^{**2}$ belum mencapai nilai konvergen maka proses berulang kembali ke langkah 5 dengan mengambil nilai $h_i^{*2} - h_i^{**2}$.

11. Jika nilai $h_i^{*2} - h_i^{**2}$ sudah konvergen maka akan diperoleh nilai faktor loading dan komunalitas model faktor yang ada, dengan faktor umum sebanyak *m*.

12. Melakukan rotasi faktor untuk memperoleh nilai faktor loading dan komunalitas akhir untuk mempermudah interpretasi hasil analisis faktor.

- Dengan menggunakan matriks korelasi algoritmanya sebagai berikut:

1. Masukkan seluruh data sampel dengan p variabel dan n pengamatan, $\mathbf{X}_{pxn}$.

2. Hitung matriks korelasi untuk sampel **R.**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan $r_{ij} = \dfrac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}}$ dengan s_{ij} merupakan korelasi sampel dari variabel *i* dan *j*, untuk setiap *i* dan $j = 1,2,\ldots,p$

3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks **R.**

4. Menghitung matriks korelasi invers $\mathbf{R}^{-1}$ sehingga $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$

5. Tentukan nilai komunalitas awal $h_i^{*2} = 1 - \frac{1}{r_{ii}}$, dengan $i = 1,2,\ldots,p$ dan r_{ii} merupakan elemen diagonal dari matriks $\mathbf{R}^{-1}$.

6. Substitusi elemen diagonal pada matriks $\mathbf{R}$ dengan nilai $\hat{h}_i^{*2}$ maka diperoleh matriks korelasi reproduksi $\mathbf{R}_r$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} h_1^{*2} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & h_2^{*2} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & h_p^{*2} \end{bmatrix}$$

7. Dari matriks $\mathbf{R}_r$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dan vektor eigen $e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{mi}$ dengan $i = 1,2,\ldots,p$

8. Diperoleh nilai loading l_{ij} menggunakan rumus $l_{ij} = \sqrt{\lambda_i} e_{ij}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,p$

9. Ambil nilai h_i^{**2} terkecil hingga $h_i^{*2} - h_i^{**2}$ merupakan nilai terbesar.

10. Jika nilai $h_i^{*2} - h_i^{**2}$ belum mencapai nilai konvergen maka proses berulang kembali ke langkah 5 dengan mengambil nilai $h_i^{*2} - h_i^{**2}$.

11. Jika nilai $h_i^{*2} - h_i^{**2}$ sudah konvergen maka akan diperoleh nilai faktor loading dan komunalitas model faktor yang ada, dengan faktor umum sebanyak *m*.

12. Melakukan rotasi faktor untuk memperoleh nilai faktor loading dan komunalitas akhir untuk mempermudah interpretasi hasil analisis faktor.

Setelah seluruh nilai taksiran parameter diperoleh kemudian dihitung matriks sisa dengan menggunakan persamaan (3.4.12) dan nilai RMSR dengan menggunakan persamaan (3.4.13).

3.5 Rotasi Faktor

Rotasi faktor pada nilai faktor loading dapat mempermudah interpretasi terhadap hasil analisis faktor dengan meminimumkan variabel yang memiliki nilai faktor loading yang tinggi pada suatu faktor umum. Dalam beberapa kasus, hasil analisis faktor sulit diinterpretasikan karena nilai dari faktor loadingnya hampir sama pada beberapa faktor umum, dan banyaknya variabel yang memiliki nilai loading tinggi terhadap satu faktor. Ada dua tipe rotasi yang bisa digunakan yaitu *ortogonal* dan *oblique*. Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas salah satu metode rotasi yaitu rotasi ortogonal. Dalam rotasi ortogonal sudut dan jarak dipertahankan, komunalitas tidak berubah dan tetap menggunakan konfigurasi titik yang sama. Dalam hal ini yang berubah adalah nilai faktor loading dan varians tiap faktor umum. Jika menggunakan rotasi ini maka model faktor yang dihasilkan adalah model faktor ortogonal.

Jika $\hat{L}$ merupakan matriks berukuran $p \times m$ yang merupakan estimasi nilai faktor loading yang diperoleh dengan menggunakan metode komponen utama maka

$$\hat{\mathbf{L}}^{*} = \mathbf{LT}$$

Dimana $\mathbf{T}$ merupakan matriks transformasi yang memenuhi $\mathbf{T}^{t}\mathbf{T}^{t} = \mathbf{T}^{t}\mathbf{T} = \mathbf{I}$

Maka estimasi dari matriks varians kovarians adalah:

$$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\mathbf{T}\mathbf{T}^{t}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi$$

Sedangkan estimasi dari matriks korelasi adalah:

$$\mathbf{R} \cong \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\mathbf{T}\mathbf{T}^{t}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi$$

Jika $\hat{L}$ merupakan matriks berukuran $p \times m$ yang merupakan estimasi nilai faktor loading yang diperoleh dengan menggunakan metode pemfaktoran sumbu utama maka

$$\hat{\mathbf{L}}^{*} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}$$

Dimana **T** merupakan matriks transformasi yang memenuhi $\mathbf{T}^{t}\mathbf{T}^{t} = \mathbf{T}^{t}\mathbf{T} = \mathbf{I}$

Maka estimasi dari matriks varians kovarians adalah:

$$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\mathbf{T}\mathbf{T}^{t}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi$$

Sedangkan estimasi dari matriks korelasi adalah:

$$\mathbf{R} \cong \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\mathbf{T}\mathbf{T}^{t}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi = \hat{\mathbf{L}}^{*}\hat{\mathbf{L}}^{*t} + \psi$$

Karena hasil kedua metode tersebut analog maka pada pembahasan selanjutnya hanya akan dibahas salah satu metode yaitu metode komponen utama.

3.5.1 Rotasi Ortogonal *Varimax*

Rotasi ortogonal *varimax* dikemukakan pertama kali oleh Kaiser pada tahun 1958. Pada dasarnya metode ini menghasilkan koordinat aksis dengan beberapa nilai faktor loading yang besar dan faktor loading lainnya sedapat mungkin mendekati nol. Berdasarkan pendekatan geometri rotasi secara umum terbatas pada faktor umum sebanyak 2 (m = 2). Untuk $m > 2$, beberapa teknik rotasi telah banyak dianjurkan. Salah satu dari metode tersebut yang paling populer adalah teknik *varimax,* dan dianggap paling ideal dalam menghasilkan faktor umum yang mendekati struktur data yang lebih sederhana. Teknik rotasi ini bertujuan mencari nilai loading yang memaksimumkan variansi dari kuadrat nilai loading pada setiap kolom $\hat{\mathbf{L}}$. Jika kuadrat dari loading pada suatu kolom nilainya hampir sama maka variansnya akan mendekati nol. Sedangkan jika kuadrat nilai loading antara 0 dan 1 (untuk matriks **R**) maka varians akan meningkat. Dengan kata lain, teknik varimax mencoba menghasilkan nilai faktor loading yang besar atau faktor lainnya sekecil mungkin untuk memudahkan interpretasi hasil analisis faktor.

Pada teknik *varimax* akan merotasikan sumbu utama agar terletak sedekat mungkin dengan banyak titik. Sumbu utama pertama dan sumbu kedua dirotasikan dengan sudut yang telah ditetapkan. Sumbu utama baru kemudian dirotasikan dengan sumbu utama ketiga dan seterusnya sampai $\frac{1}{2}p(p-1)$ pasang sumbu utama terotasi. Tiap rotasi pada sumbu utama mengakibatkan nilai faktor loading meningkat dan mencapai batasnya sehingga iterasi akan konvergen pada suatu nilai. Tetapi pada banyak kasus titik-titik dari setiap variabel tidak terambil dengan baik dan mengakibatkan sumbu utama tidak dapat dirotasikan mendekati titik-titik tersebut. Pada dasarnya tidak ada teknik yang dapat menjamin bahwa setiap variabel dapat membentuk satu faktor dalam semua kasus.

Rotasi *varimax* tersedia diberbagai program komputer untuk analisis faktor. Output dari rotasi *varimax* mencakup nilai loading yang telah dirotasi $\hat{\mathbf{L}}^*$, komunalitas (jumlah kuadrat tiap baris $\hat{\mathbf{L}}^*$), varians (jumlah kuadrat tiap kolom $\hat{\mathbf{L}}^*$) dan matriks ortogonal yang dapat digunakan untuk memperoleh $\hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}$.