BAB III

ANALISIS ANTRIAN

Analisis Antrian merupakan bentuk analisis probabilitas, bukan merupakan teknik, oleh karena itu hasil analisis disebut sebagai karakteristik operasi bersifat probabilitas.

Dalam bab ini akan dibahas mengenai proses kedatangan dan model antrian (M/M/c):(FCFS/∞/∞)

3.1 Proses Stokastik

Definisi 3.1.1 : (Ross, 1996)

Proses stokastik adalah himpunan peubah acak yang merupakan fungsi waktu, yang dinotasikan $\{X(t), t \in T\}$. Dimana untuk setiap t pada himpunan indeks T, $X(t)$ merupakan peubah acak.

Definisi 3.1.2 : (Ross, 1996)

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan proses menghitung jika $N(t)$ menyatakan banyak peristiwa terjadi dalam selang waktu t. Proses menghitung $N(t)$ harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ bernilai bulat positif
3. Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$

4. Untuk $s < t$, $N(t) - N(s)$ menyatakan banyaknya peristiwa terjadi dalam selang $(s,t]$.

Pada penelitian ini $N(t)$ menyatakan banyaknya pelanggan yang datang pada interval waktu [0,t], dan ruang keadaannya adalah $T = \{0,1,2,...\}$. Jadi proses stokastiknya adalah $N(t) = \{0,1,2,...\}$ dan disebut proses stokastik waktu kontinu dengan ruang keadaan diskrit.

Definisi 3.1.3 : (Ross, 1996)

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan proses Poisson, jika untuk proses kedatangan maupun keberangkatan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Pada saat $t = 0$ tidak terdapat peristiwa kedatangan maupun keberangkatan $N(t = 0) = 0$
2. Diberikan $N(t)$ jumlah dari peristiwa kedatangan maupun pelayanan selama interval [0,t], peristiwa kedatangan maupun pelayanan mempunyai kenaikan stasioner dan kenaikan bebas.
3. Di dalam suatu interval kecil Δt, probabilitas tepat satu kedatangan adalah $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ dan probabilitas lebih dari satu kedatangan adalah $o(\Delta t)$[1] dalam interval Δt. Simbol $o(\Delta t)$ menyatakan fungsi Δt yang mendekati 0, sedangkan Δt sendiri mendekati 0, artinya $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

1

---

[1] $o(\Delta t)$ atau dikenal juga sebagai "*little-oh* dari Δt" didefinisikan sebagai berikut:
f adalah $o(\Delta t)$ apabila $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$. Jika f adalah $o(\Delta t)$, maka pada Δt yang amat kecil f akan lebih kecil lagi dari Δt

3.2 Distribusi Kedatangan

Akan dijelaskan bahwa jika proses kedatangan terjadi secara acak, maka proses kedatangan tersebut akan memenuhi sifat-sifat Poisson dan berdistribusi Poisson.

Notasi-notasi proses kedatangan :

n = Jumlah pelanggan dalam antrian pada waktu t

$P_n(t)$ = Probabilitas ada n pelanggan dalam antrian pada waktu t

λ = Rata-rata tingkat kedatangan dalam satu satuan waktu

$(\lambda\Delta t)$ = Probabilitas ada 1 pelanggan yang baru datang dalam antrian selama selang waktu dari t hingga Δt

μ = Rata-rata tingkat pelayanan dalam satu satuan waktu

$(\mu\Delta t)$ = Probabilitas ada 1 pelanggan yang selesai dilayani selama waktu dari t hingga Δt

Misalkan tingkat pelayanan tidak mempengaruhi jumlah pelanggan dalam antrian dan pelanggan membentuk antrian, maka probabilitas ada n pelanggan $(n > 0)$ pada waktu $t + \Delta t$ ditentukan oleh empat kemungkinan sebagai berikut :

Kemungkinan I

- Ada n pelanggan dalam antrian pada waktu t, probabilitasnya adalah $P_n(t)$.
- Tidak ada kedatangan pelanggan selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $1 - \lambda(\Delta t)$.
- Tidak ada pelanggan yang dilayani selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $1 - \mu\Delta t$.

Kemungkinan II

- Ada *n+1* pelanggan dalam antrian pada waktu *t*, probabilitasnya adalah $P_{n+1}(t)$.
- Tidak ada kedatangan selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $1-\lambda\Delta t$.
- Ada 1 pelanggan yang dilayani selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $\mu\Delta t$.

Kemungkinan III

- Ada *n-1* pelanggan dalam antrian pada waktu *t*, probabilitasnya adalah $P_{n-1}(t)$.
- Ada kedatangan 1 pelanggan dalam antrian dalam waktu Δt, probabilitasnya adalah $\lambda\Delta t$
- Tidak ada pelanggan yang dilayani selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $1-\mu\Delta t.$, probabilitasnya adalah

Kemungkinan IV

- Ada *n* pelanggan dalam antrian pada waktu *t*, probabilitasnya adalah $P_n(t)$.
- Ada kedatangan 1 pelanggan selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $\lambda\Delta t$.
- Ada kedatangan 1 pelanggan yang dilayani selama waktu Δt, probabilitasnya adalah $\mu\Delta t$.

Berdasarkan empat kemungkinan di atas, maka probabilitas bahwa ada *n* pelanggan dalam antrian pada waktu $t+\Delta t$ adalah $P_n(t+\Delta t)$, dengan asumsi bahwa probabilitas kedatangan dan probabilitas pelayanan lebih dari satu pelanggan dalam waktu Δt dianggap sama dengan nol.

Probabilitas di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)(\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_n(t)(\lambda\Delta t)(\mu\Delta t) \\ &= P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t+2\lambda\mu\Delta t^2) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2) \\ &= P_n(t) - P_n(t)(\lambda\Delta t+\mu\Delta t-2\lambda\mu\Delta t^2) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t-\lambda\mu\Delta t^2) \end{aligned}$$

Apabila Δt mendekati nol, maka Δt^2 nilainya kecil sekali sehingga bisa diabaikan. Dengan demikian persamaan di atas menjadi:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) - P_n(t)(\lambda\Delta t+\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = -P_n(t)(\lambda\Delta t+\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)$$

Persamaan terakhir ekuivalen dengan persamaan

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

berdasarkan definisi turunan dari P_n terhadap t diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} \\ &= -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad , n>0 \qquad (3.2.1) \end{aligned}$$

Kasus khusus untuk $n = 0$

Misalkan antrian dalam keadaan $n = 0$ atau probabilitas tidak ada pelanggan pada waktu $t+\Delta t$ ditulis dengan $P_0(t+\Delta t)$, diperoleh dua kemungkinan yaitu :

Kemungkinan I:

Tidak ada pelanggan pada waktu t dan tidak ada pelanggan yang masuk dalam waktu Δt, probabilitasnya adalah: $P_0(t)(1-\lambda\Delta t)$

Kemungkinan II:

Ada satu pelanggan dalam antrian pada waktu t dan satu pelanggan yang dilayani dalam waktu Δt dan tidak ada pelanggan yang masuk dalam antrian dalam waktu Δt, maka probabilitasnya adalah: $P_1(t)(\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)$

Dari dua kemungkinan di atas diperoleh probabilitasnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= (1-\lambda\Delta t)(P_0(t)) + (\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)P_1(t) \\ &= (1-\lambda\Delta t)(P_0(t)) + (\mu\Delta t-\lambda\Delta t^2)P_1(t) \end{aligned}$$

dengan mengabaikan suku pangkat tinggi dari Δt, persamaan di atas menjadi:

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= (1-\lambda\Delta t)(P_0(t)) + (\mu\Delta t)P_1(t) \\ \frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} &= -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \end{aligned}$$

Untuk $\Delta t \to 0$, terdapat:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \qquad (3.2.2)$$

Jika antrian dalam kondisi tidak stabil (*non steady state)*, dan pelayanan tidak berlangsung $(\mu = 0)$, maka probabilitas kedatangan akan ditentukan dari persamaan (3.2.1) dan (3.2.2).

Dari persamaan (3.2.1) diperoleh:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t)-(\lambda)P_n(t) \qquad (3.2.3)$$

Dari persamaan (3.2.2) diperoleh:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad \text{atau} \quad \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt \qquad (3.2.4)$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan, diperoleh:

$$\int \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = \int -\lambda dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + c$$

$$e^{\ln P_0(t)} = e^{-\lambda t + c}$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t + c}$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}\, e^{c} \text{ dimana } A = e^{c}$$

Jadi, $P_0(t) = \mathrm{A}\, e^{-\lambda t}$

Seandainya proses kedatangan mulai dari waktu $t = 0$, maka $P_0(t) = 1$ dan

diperoleh: $P_0(t) = \mathrm{A}\, e^{-\lambda t}$

untuk $t = 0 \Rightarrow$ $P_0(0) = \mathrm{A}\, e^{-\lambda.0}$

$$1 = \mathrm{A}\ e^{.0}$$

$$1 = \mathrm{A}$$

$$\therefore A = 1$$

atau $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ (3.2.5)

Dari persamaan (3.2.3) untuk n = 1diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t)$$

Kemudian persamaan (3.2.5) disubstitusikan ke persamaan di atas diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$ dikalikan dengan faktor $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt}+e^{\lambda t}\lambda P_1(t)=\lambda$$

atau dapat ditulis

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right] = \lambda$$

dan diperoleh:

$$P_1(t)e^{\lambda t} = \int \lambda dt = \lambda t + C$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + Ce^{-\lambda t} \qquad (3.2.6)$$

Karena $P_1(t)$ = 0 pada saat t = 0, maka $P_1(0)=Ce^{-\lambda 0}=0$ sehingga C = 0, dan persamaan (3.2.6) ekuivalen dengan:

$$P_1(t) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{1!} \qquad (3.2.7)$$

Untuk n = 2 persamaan (3.2.3) menjadi:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t)$$

Dari persamaan (3.2.7) disubstitusikan ke persamaan di atas, diperoleh:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda\left(\frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{1!}\right) - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_2(t)}{dt} + e^{\lambda t}\lambda P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_2(t)\right] = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t}P_2(t) = \int \lambda^2 t\,dt$$

$$P_2(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + C\right) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} + Ce^{-\lambda t}$$

Karena $P_2(t) = 0$ pada saat t = 0, maka $P_2(0) = Ce^{-\lambda 0} = 0$ sehingga C = 0, dan persamaan di atas ekuivalen dengan

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!}$$

Dengan menggunakan prinsip-prinsip di atas, maka dapat diformulasikan bentuk umum dari persamaan probabilitas proses kedatangan untuk n pelanggan secara acak dalam antrian pada waktu t, yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \tag{3.2.8}$$

Keterangan : $t \geq 0$, $n = 0,1,2,3,...$

Persamaan (3.2.8) merupakan persamaan fungsi distribusi probabilitas Poisson, dengan:

$P_n(t)$ = probabilitas kedatangan n pelanggan dalam waktu t

λt = tingkat kedatangan rata-rata satu-satuan waktu

t = periode waktu

n = banyaknya kedatangan pelanggan dalam t satuan waktu

e = dasar logaritma natural yaitu 2,71828

Jadi proses kedatangan pelanggan memenuhi sifat-sifat proses Poisson, dan berdistribusi Poisson.

3.3 Model Antrian M/M/c

Model antrian M/M/c dapat digunakan untuk memodelkan sistem atau perangkat dengan *multiprocessor* dimana server-servernya identik, semua pelanggan yang menunggu dilayani berada pada antrian. Semua server diasumsikan banyaknya c $(c \geq 1)$ dan setiap server dapat melayani pelanggan dengan laju (intensitas) μ per satuan waktu. Laju (intensitas) kedatangan adalah λ per satuan waktu. Jika ada minimal 1 dari c server kosong, maka pelanggan yang datang segera dilayani. Jika c server tersebut semuanya sibuk, maka pelanggan yang datang menunggu dalam antrian (mengantri).

Sistem dapat dipandang sebagai proses kelahiran dan kematian dengan laju (intensitas) kedatangan pengantri dalam sistem yaitu λ_n sama dengan λ untuk setiap n. Misalkan μ_n merupakan laju (intensitas) keberangkatan pengantri dalam sistem dimana terdapat n pelanggan dalam sistem antrian. μ_n sama dengan $n\mu$ jika dalam sistem terdapat n pengantri dimana $n \leq c$ dan μ_n sama dengan $c\mu$ jika dalam sistem terdapat n pengantri dimana $n > c$.

Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem antrian (P_n) pada saat $t + \Delta t$ adalah jumlah dari:

1. P $\{$ n pelanggan dalam antrian pada saat t, dan tidak ada kedatangan maupun keberangkatan selama interval $(t, t + \Delta t]$ $\}$

2. P { *n-1* pelanggan dalam antrian pada saat t, dan terdapat satu kedatangan serta tidak ada keberangkatan selama interval $(t, t+\Delta t]$ }

3. P { *n+1* pelanggan dalam antrian pada saat t , dan tidak terdapat kedatangan serta terdapat satu keberangkatan selama interval $(t, t+\Delta t]$ }

4. P { n pelanggan dalam antrian pada saat t, dan terdapat satu kedatangan serta terdapat satu keberangkatan selama interval $(t, t+\Delta t]$ }

Probabilitas di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)(1-\lambda_n\Delta t)(1-\mu_n\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t)(1-\mu_{n-1}\Delta t) \\
&\quad + P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1}\Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t) + P_n(t)(\lambda_n\Delta t)(\mu_n\Delta t) \\
&= P_n(t)(1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t+2\lambda_n\mu_n\Delta t^2) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t-\lambda_{n-1}\mu_{n-1}\Delta t^2) \\
&\quad + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t-\lambda_{n+1}\mu_{n+1}\Delta t^2)
\end{aligned}
$$

Bila Δt mendekati nol, maka Δt^2 nilainya kecil sekali sehingga dapat diabaikan. Sehingga persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)(1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t) \\
&= P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n\Delta t+\mu_n\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t) \\
P_n(t+\Delta t) - P_n(t) &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t) - P_n(t)(\lambda_n\Delta t+\mu_n\Delta t) \\
\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n+\mu_n)
\end{aligned}
$$

Ketika Δt mendekati 0, menghasilkan

$$
\frac{dP_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}
$$

$$
P_n'(t) = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n+\mu_n)
$$

Untuk $n = 0$, maka

$$P_0'(t) = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t)$$

Pada keadaan *steady state* $P_n'(t) = 0$, sehingga

$$0 = \mu P_1 - \lambda P_0 \qquad \text{jika } n = 0$$

$$0 = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) P_n \qquad \text{jika n} > 0$$

Untuk mendapatkan probabilitas n pengantri pada sistem dalam keadaan *steady state*, diuraikan sebagai berikut. Ketika $n = 0$, memenuhi

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0$$

Untuk $n > 0$, diperoleh

$$P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}}{\mu_{n+1}}$$

Perhatikan ruas kanan yang kedua. Jika n > 1, maka

$$\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} = \mu_n \left[\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}}{\mu_n} \right] - \lambda_{n-1} P_{n-1}$$

$$\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} = \mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}$$

Ulangi perhitungan ini dengan nilai n yang lebih kecil, sehingga akhirnya diperoleh

$$\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0$$

Dari persamaan untuk $n = 0$, diketahui bahwa

$$\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} P_{n-2}$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_{n-n}}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_{n-n+1}} P_{n-n}$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} P_0$$

Persamaan di atas dapat ditulis secara ringkas sebagai berikut

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0 \qquad \text{, untuk } n = 1,2,\ldots \tag{3.3.1}$$

Dengan demikian dapat diperoleh fungsi probabilitas n pengantri dalam sistem antrian. Probabilitas n pelanggan dalam sistem antrian, dimana $0 \le n < c$ adalah

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{(1\mu)(2\mu)..(n\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \,,$$

Probabilitas n pelanggan dalam sistem antrian, dimana $n \ge c$ adalah

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{(1\mu_1)(2\mu_2)\ldots(c\mu_c)(c\mu_{c+1})(c\mu_{c+2})\ldots(c\mu_{n-c})} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{c!\, c^{n-c} \mu^n} P_0$$

$$P_n = \frac{\rho^n}{c!\, c^{n-c}} P_0$$

Sehingga dapat disimpulkan

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & , n \leq c \\ \dfrac{\rho^n}{c!\, c^{n-c}} P_0 & , n > c \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem antrian $(n = 0)$, adalah

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\}^{-1}$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c} \right)^j \right\}^{-1}$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \rho/c} \right) \right\}^{-1} \quad , \frac{\rho}{c} < 1 \tag{3.3.3}$$

Panjang antrian (L_q) adalah

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!}$$

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!}P_0 = P_0\frac{\rho^c}{c!}\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{\rho}{c}\right)^k$$

Karena nilai $\frac{\rho}{c} < 1$, maka

$$L_q = P_0\frac{\rho^c}{c!}\frac{\rho/c}{\left(1-\rho/c\right)^2}$$

$$L_q = P_0\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!c^2}\left[\frac{\rho}{\left(1-\rho/c\right)^2}\right]$$

$$L_q = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]P_0 \tag{3.3.4}$$

Panjang sistem antrian adalah

$$L_S = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]P_0 + \rho$$

Nilai rata-rata waktu tunggu pengantri dalam antrian (W_q) merupakan panjang antrian dibagi dengan rata-rata tingkat kedatangan, sehingga:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Nilai rata-rata waktu tunggu pengantri dalam sistem (W_S) didapat dari rata-rata waktu pelayanan dengan rata-rata waktu tunggu dalam antrian, sehingga didapat:

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu}$$