BAB 3

GRUP DUAL

3.1 Grup Topologi

Definisi 3.1.1. [4] **Grup Topologi**. **Grup topologi** adalah suatu grup Γ dengan suatu topologi sedemikian sehingga pemetaan operasi $(x, y) \mapsto x \circ y : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ dan invers $x \mapsto x^{-1} : \Gamma \to \Gamma$ merupakan fungsi kontinu.

Contoh 3.1.1. Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dengan operasi penjumlahan biasa merupakan suatu grup, yaitu $(\mathbb{C}, +)$. Dengan topologi biasa pada $\mathbb{C}$, maka $\mathbb{C}$ merupakan suatu grup topologi.

Bukti. Untuk menunjukkan kekontinuan dari operasi $+$, misalkan barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ merupakan sebarang barisan yang konvergen ke x dan y. Berdasarkan konsep barisan pada bilangan kompleks dapat diperoleh bahwa $x_n + y_n \to x + y$, dan karena untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dan konstanta c berlaku

$$cx_n \to cx,$$

maka dengan mengambil $c = -1$ diperoleh $-x_n \to -x$. Dengan demikian terbukti bahwa $(\mathbb{C}, +)$ dengan topologi biasa merupakan suatu grup topologi. ∎

Contoh 3.1.2. Grup perkalian $\mathbb{C}^{\times} := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dari bilangan kompleks tak nol dengan topologi biasa juga membentuk grup topologi. Subgrup $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ dari $\mathbb{C}$ juga membentuk suatu grup topologi.

3.2 Grup Diskrit dan Karakter pada Grup Diskrit

Definisi 3.2.1. [4] **Grup diskrit. Grup diskrit** adalah grup yang setiap subsetnya merupakan himpunan buka. Grup diskrit juga disebut sebagai **grup tanpa topologi**.

Definisi 3.2.2. [4] **Karakter.** Misalkan Γ merupakan grup abellian diskrit. Homomorfisma $\gamma : \Gamma \to \mathbb{T}$ di mana $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$, disebut sebuah **karakter** pada grup Γ. Himpunan semua karakter pada Γ ditulis sebagai $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$.

Contoh 3.2.1. Misalkan $(\mathbb{R}, +)$ adalah sebuah grup aditif bilangan real. Dengan mendefinisikan $\gamma(x) := e^{ix}$, maka γ merupakan suatu karakter pada $\mathbb{R}$ karena untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $\gamma(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \gamma(x)\gamma(y)$.

3.3 Grup Dual $\hat{\Gamma}$

Teorema 3.3.1. [4] **Grup dual.** Misalkan Γ merupakan grup abellian diskrit. Maka, $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ dengan operasi perkalian titik-demi-titik, yaitu $((\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(x)\psi(x))$, membentuk suatu struktur grup yang disebut dengan **grup dual** dan dilambangkan dengan $\hat{\Gamma}$.

Bukti. 1. *Sifat ketertutupan operasi "$\cdot$" pada* $\hat{\Gamma}$. Misalkan $\varphi, \psi \in \hat{\Gamma}$, harus ditunjukkan bahwa $\varphi \cdot \psi \in \hat{\Gamma}$. Untuk membuktikan bahwa $\varphi \cdot \psi \in \hat{\Gamma}$, maka harus ditunjukkan bahwa $(\varphi \cdot \psi)(x) \in \mathbb{T}$ dan $(\varphi \cdot \psi)$ suatu homomorfisma.

Perhatikan bahwa $(\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(x)\psi(x)$, untuk $x \in \Gamma$. Karena $\varphi(x) \in \mathbb{T}$ dan $\psi(x) \in \mathbb{T}$, maka $(\varphi \cdot \psi)(x) \in \mathbb{T}$.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $(\varphi \cdot \psi)$ suatu homomorfisma maka harus ditunjukkan bahwa $(\varphi \cdot \psi)(xy) = (\varphi \cdot \psi)(x)(\varphi \cdot \psi)(y)$. Misalkan $x, y \in \Gamma$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot \psi)(xy) &= \varphi(xy)\psi(xy) \\
&= [\varphi(x)\varphi(y)][\psi(x)\psi(y)] \\
&= [\varphi(x)\psi(x)][\varphi(y)\psi(y)] \\
&= (\varphi \cdot \psi)(x)(\varphi \cdot \psi)(y)
\end{aligned}$$

2. *Sifat asosiatif "·"* Misalkan $\varphi, \psi, \phi \in \hat{\Gamma}$ dan $x \in \Gamma$. Harus ditunjukkan bahwa $(\varphi \cdot \psi) \cdot \phi = \varphi \cdot (\psi \cdot \phi)$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
[(\varphi \cdot \psi) \cdot \phi](x) &= (\varphi \cdot \psi)(x)\phi(x) \\
&= [\varphi(x)\psi(x)]\phi(x) \\
&= \varphi(x)[\psi(x)\phi(x)] \\
&= \varphi(x)(\psi \cdot \phi)(x) \\
&= [\varphi \cdot (\psi \cdot \phi)](x),
\end{aligned}$$

untuk setiap $x \in \Gamma$. Jadi, terbukti bahwa $(\varphi \cdot \psi) \cdot \phi = \varphi \cdot (\psi \cdot \phi)$.

3. *Terdapat elemen identitas pada grup* $\hat{\Gamma}$. Pemetaan $\varepsilon : \Gamma \to \mathbb{T}$ dengan aturan $x \mapsto 1$, untuk setiap $x \in \Gamma$ adalah elemen identitas pada grup dual $\hat{\Gamma}$. ε merupakan homomorfisma karena $\varepsilon(xy) = 1 \cdot 1 = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ untuk setiap $x, y \in \Gamma$, dan juga merupakan elemen identitas pada grup $\hat{\Gamma}$ karena untuk sebarang $\gamma \in \hat{\Gamma}$ berlaku

$$(\varepsilon \cdot \gamma)(x) = \varepsilon(x)\gamma(x) = \gamma(x) = \gamma(x)\varepsilon(x) = (\gamma \cdot \varepsilon)(x),$$

untuk setiap $x \in \Gamma$.

4. *Adanya elemen invers pada grup* $\hat{\Gamma}$. Ambil sebarang $\gamma \in \hat{\Gamma}$. Dengan mendefinisikan $\gamma^{-1}(x) := \overline{\gamma(x)}$, konjugat dari γ, maka $\overline{\gamma} \in \hat{\Gamma}$, jadi $\gamma^{-1}\hat{\Gamma}$. Selanjutnya, karena untuk setiap $x \in \Gamma$

$$(\gamma \cdot \gamma^{-1})(x) = \gamma(x)\gamma^{-1}(x) = \gamma(x)\overline{\gamma}(x) = \|\gamma(x)\|^2 = 1$$

dan

$$(\gamma^{-1} \cdot \gamma)(x) = \gamma^{-1}(x)\gamma(x) = \overline{\gamma}(x)\gamma(x) = \|\gamma(x)\|^2 = 1,$$

maka $\gamma \cdot \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \cdot \gamma = 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $\gamma \in \hat{\Gamma}$ memiliki elemen invers.

■

3.4 Topologi pada Grup Dual $\hat{\Gamma}$

Grup $\hat{\Gamma}$ yang terdiri dari himpunan semua homomorfisma $\gamma : \Gamma \to \mathbb{T}$ dengan operasi perkalian titik-demi-titik, dapat dilengkapi dengan suatu topologi. Dengan memandang bahwa γ merupakan anggota dari ruang produk $\mathbb{T}^{\Gamma} := \prod_{x \in \Gamma} \mathbb{T}$ yang juga merupakan ruang topologi, maka pemetaan $\gamma \mapsto (\gamma(x))_{x\in\Gamma}$ dari $\hat{\Gamma}$ ke $\mathbb{T}^{\Gamma}$ akan memberikan topologi pada grup dual $\hat{\Gamma}$. Topologi ini adalah topologi kekonvergenan titik-demi-titik, yaitu

$$\gamma_\lambda \to \gamma \Longleftrightarrow \gamma_\lambda(x) \to \gamma(x), \forall x \in \Gamma.$$

3.5 Grup Dual $\hat{\Gamma}$ Sebagai Grup Topologi

Teorema 3.5.1. [4] Misalkan Γ grup abellian diskrit dan $\hat{\Gamma}$ grup dual yang dilengkapi dengan topologi kekonvergenan titik-demi-titik. Maka, $\hat{\Gamma}$ adalah grup topologi.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa grup dual $\hat{\Gamma}$ merupakan grup topologi, harus ditunjukkan bahwa pemetaan $(\gamma, \chi) \mapsto \gamma\chi : \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}$ dan $\gamma \mapsto \gamma^{-1} : \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}$ adalah pemetaan yang kontinu.

Diberikan barisan (γ_n, χ_n) yang konvergen ke (γ, χ), harus ditunjukkan bahwa barisan $(\gamma_n\chi_n)$ konvergen ke $\gamma\chi$.

Perhatikan bahwa (γ_n, χ_n) konvergen ke (γ, χ) berarti $\gamma_n \to \gamma$ dan $\chi_n \to \chi$. Demikian pula $\gamma_n \to \gamma \Leftrightarrow \gamma_n(x) \to \gamma(x)$ dan $\chi_n \to \chi \Leftrightarrow \chi_n(x) \to \chi(x)$, untuk setiap $x \in \Gamma$. Karena $\gamma_n(x) \to \gamma(x)$ dan $\chi_n(x) \to \chi(x)$ merupakan barisan bilangan kompleks, maka perkalian barisan tersebut akan konvergen ke perkalian nilai-nilai konvergennya, yaitu $\gamma_n(x)\chi_n(x) \to \gamma(x)\chi(x)$. Akan tetapi, $\gamma_n(x)\chi_n(x) \to \gamma(x)\chi(x)$, untuk setiap $x \in \Gamma$, jika dan hanya jika $\gamma_n\chi_n \to \gamma\chi$, sehingga menunjukkan bahwa pemetaan $(\gamma, \chi) \mapsto \gamma\chi$ merupakan pemetaan kontinu.

Diberikan barisan $\gamma_n \to \gamma$, harus ditunjukkan bahwa $\gamma_n^{-1} \to \gamma^{-1}$.

Misalkan $x \in \Gamma$, tulis $\gamma_n(x) = a_{\gamma_n} + ib_{\gamma_n}$ dan $\gamma_n = a_\gamma + ib_\gamma$. Perhatikan bahwa $\gamma_n \to \gamma$ jika dan hanya jika $\gamma_n(x) \to \gamma(x)$, untuk setiap $x \in \Gamma$. Karena $\gamma_n(x) \to \gamma(x)$ untuk setiap $x \in \Gamma$, maka berdasarkan teorema tentang barisan konvergen pada bilangan kompleks diperoleh $a_{\gamma_n} \to a_\gamma$ dan $b_{\gamma_n} \to b_\gamma$. Invers pada setiap anggota $\mathbb{T}$ adalah konjugatnya, artinya $(\gamma_n(x))^{-1} = \overline{\gamma_n(x)} = a_{\gamma_n} - ib_{\gamma_n}$ dan $(\gamma(x))^{-1} = \overline{\gamma(x)} = a_\gamma - ib_\gamma$. Karena $a_{\gamma_n} \to a_\gamma$ dan $b_{\gamma_n} \to b_\gamma$, maka $(\gamma_n(x))^{-1} \to (\gamma(x))^{-1}$. Sedangkan $(\gamma_n(x))^{-1} \to (\gamma(x))^{-1}$, untuk tiap $x \in \Gamma$, jika dan hanya jika $\gamma_n^{-1} \to \gamma^{-1}$. Dengan demikian, pemetaan $\gamma \mapsto \gamma^{-1} : \hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}$ adalah kontinu. ∎