BAB V

PENUTUP

V.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah kita bahas pada bab-bab sebelumnya, kita dapat menyimpulkan beberapa hal:

1. Dengan menggunakan suatu pemetaan $f: V^n \to \mathbb{C}^n \otimes V$ di mana $f(v) = \sum_{finite} \varepsilon_i \otimes v_i$, $\forall v = (v_i) \in V^n$, $1 \le i \le n$ kita dapatkan bahwa $V^n \cong \mathbb{C}^n \otimes V$. Melalui isomorfisma tersebut, V^n dapat dipandang sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari ruang kompleks *n-tuple* dengan ruang vektor V.
2. Jika V suatu ruang vektor, dan $\mathbb{M}_{m,n}$ suatu ruang matriks atas ruang $\mathbb{C}$, maka $\mathbb{M}_{m,n}(V) \cong \mathbb{M}_{m,n} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{M}_{m,n}$. Dengan demikian $\mathbb{M}_{m,n}(V)$ yaitu suatu ruang matriks dari ruang vektor V dapat dipandang sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari ruang matriks atas ruang kompleks $\mathbb{M}_{mn}$ dengan ruang vektor V.
3. Sifat-sifat dari ruang matriks sebagai suatu ruang hasilkali tensor terkait sifat-sifat pada ruang hasilkali tensor sebagai berikut:
   a) Jika $\varepsilon_{i,j} \otimes v_0 \in \mathbb{M}_{m,n} \otimes V$ dan $\varepsilon_{k,l}^{[p,q]} \otimes v_0' \in \mathbb{M}_{p,q} \otimes V$, maka jumlah langsungnya:

$\left(\varepsilon_{i,j}^{[m,n]}\otimes v_0\right)\oplus\left(\varepsilon_{k,l}^{[p,q]}\otimes v_0'\right)=\left(\varepsilon_{i,j}^{[m+p,n+q]}\otimes v_0\right)+\left(\varepsilon_{m+k,n+l}^{[m+p,n+q]}\otimes v_0'\right)\in\mathbf{M}_{m+p,n+q}\otimes V$

Dengan kata lain jumlah langsung dari ruang hasilkali tensor ruang matriks dan ruang vektor merupakan representasi dari jumlah langsung pada ruang matriks.

b) Jika $\alpha\in\mathbb{M}_{m,p}$, $\beta\in\mathbb{M}_{q,n}$, $v_0\in V$ dan $\gamma\in\mathbb{M}_{p,q}$ maka $\alpha(\gamma\otimes v_0)\beta=\alpha\gamma\beta\otimes v_0$.

c) Diberikan suatu ruang matriks $\mathbb{M}_r$ kemudian kita gunakan suatu identifikasi $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_r)\cong\mathbb{M}_m\otimes\mathbb{M}_r$, maka untuk $\alpha\in\mathbb{M}_m,\gamma\in\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_r)$ dan $\beta\in\mathbb{M}_m$ diperoleh $\alpha\gamma\beta=(\alpha\otimes I_r)\gamma(\beta\otimes I_r)$.

d) Jika $v=\left[v_{i,j}\right]\in\mathbb{M}_{m,n}(V)$, maka $v=\sum\varepsilon_{i,j}\otimes v_{i,j}=\sum E_i{}^*v_{i,j}E_j$.

4. Dengan menggunakan isomorfisma kanonik* dari ruang matriks $\mathbb{M}_n(B(H))$ pada ruang operator terbatas $B(H^n)$, kita dapatkan struktur dari $\mathbb{M}_n(B(H))$ sama dengan $B(H^n)$(dalam arti norm operator dan operator adjoint di $\mathbb{M}_n(B(H))$ sama dengan di $B(H^n)$). Karena $\mathbb{M}_n(B(H))$ dapat dipandang sebagai ruang operator terbatas sebagaimana $B(H^n)$ maka ruang matriks $\mathbb{M}_n(B(H))$ adalah suatu aljabar-C*.

V.2 Saran

Untuk pengembangan lebih lanjut, ada beberapa hal yang dapat penulis sarankan.

1. Suatu matriks n kali n atas ruang linear V dapat dipandang sebagai kombinasi linear dari bentuk $v = \sum \alpha_i \otimes v_i$, dengan $v_i \in V$, dan α_i matriks skalar n kali n. Kita harap itu akan menjadi gagasan yang lazim pada teori ruang Banach, siapapun yang menemukannya akan sangat berguna untuk mempelajari norm dari kombinasi linear $v = \sum \alpha_i \otimes v_i$, dengan α_i sebagai variabel acak.
2. Karena pembahasan dalam tugas akhir ini masih terbatas ruang operator hasilkali tensor dari ruang Hilbert *n-tuple*, maka untuk pengembangan selanjutnya dapat dilakukan terhadap ruang operator hasilkali tensor dari ruang Hilbert yang lebih umum.
3. Dapat dikaji lebih lanjut lagi sifat-sifat hasilkali tensor dari aljabar operator sebagai aljabar-C*.