BAB III

HASILKALI TENSOR PADA RUANG VEKTOR

III.1 Ruang Dual

Definisi III.1.2: Ruang Dual [10]

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F. Suatu transformasi linear $f \in \mathcal{L}(V,F)$ dikatakan fungsional linear (atau cukup disebut fungsional saja) di V. Himpunan dari semua fungsional di V kita lambangkan V^* dan kita namakan ruang dual aljabar (biasa kita sebut ruang dual) dari V.

Catatan: Dalam hal ini lapangan F kita pandang sebagai ruang vektor atas dirinya sendiri, dengan demikian kita dapat membentuk suatu transformasi linear $f : V \to F$.

Seperti telah kita ketahui himpunan dari semua transformasi linear ($\mathcal{L}(V,F)$) adalah ruang vektor [10]. Kemudian $\mathcal{L}(V,F)$ kita katakan suatu aljabar, karena komposisi atas fungsi-fungsi di $\mathcal{L}(V,F)$ dapat dipandang sebagai perkalian di $\mathcal{L}(V,F)$. Sehingga ruang dual V^* adalah suatu ruang vektor juga suatu aljabar, dan $f \in \mathcal{L}(V,F)$ kita katakan vektor dual dari V^*.

III.2 Ruang Vektor Bebas

Definisi III.2.1: Ruang Vektor Bebas[10]

Misalkan F lapangan, X himpunan tak kosong, kita konstruksi ruang vektor F_X *atas F dengan X sebagai generatornya, sederhananya dengan mengambil* F_X *sebagai himpunan dari semua kombinasi linear berhingga dari elemen-elemen di X:*

$$F_X := \left\{ \sum_{finite} r_i x_i : r_i \in F, x_i \in X \right\}$$

di mana operasinya didefinisikan sehinggga memenuhi keadaan berikut:

$$rx_i + sx_i = (r+s)x_i$$

$$r(sx_i) = (rs)x_i$$

F_X *dikatakan ruang vektor bebas atas X.*

III.3 Pemetaan Kanonik

Definisi III.3.1: Pemetaan Kanonik [7]

Misalkan N subgrup normal dari grup G maka pemetaan $f : G \to G/N$, *dengan* $f(a) = Na, \forall a \in G$ *dikatakan suatu proyeksi kanonik (pemetaan kanonik).*

Berdasarkan Definisi II.1.1, ruang vektor merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan. Karena ruang vektor adalah grup abelian, maka subruangnya dapat kita pandang sebagai subgrup yang merupakan suatu subgrup normal. Sehingga kita dapat membentuk suatu pemetaan kanonik dari ruang vektor terhadap grup kosiennya sebagaimana definisi III.3.1. Dapat ditunjukkan bahwa suatu grup kosien dari suatu ruang vektor adalah ruang vektor juga, selanjutnya grup kosien ini kita katakan ruang kosien[10].

III.4 Fungsi Bilinear

Definisi III.4.1: Fungsi Bilinear[10]

Misalkan U, V dan W merupakan ruang vektor atas lapangan F. Suatu fungsi $f: U \times V \to W$ *adalah bilinear jika fungsi tersebut linear pada kedua variabelnya secara terpisah, yaitu:*

$$f(ru + su', v) = rf(u,v) + sf(u',v) \text{........}(\textit{linear kiri})$$

$$\textit{dan } f(u, rv + sv') = rf(u,v) + sf(u,v') \text{........}(\textit{linear kanan})$$

$\forall r, s \in F\,;\, v, v' \in V$ *dan* $u, u' \in U$.

Contoh III.4.2:[10]

Suatu hasilkali dalam $\langle .|. \rangle : V \times V \to R$ pada ruang vektor atas lapangan real adalah suatu fungsi bilinear. Aksioma penambahan, dan kehomogenan pada definisi hasilkali dalam merupakan buktinya.

Lemma III.4.3:[11]

Misalkan E, F ruang vektor dan M aljabar, kemudian $\phi : E \to M$ *dan* $\psi : F \to M$ *masing-masing adalah suatu fungsi linear. Maka fungsi* $\gamma : E \times F \to M$, *dengan*

$$\gamma(e,f)=\phi(e)\psi(f), \forall(e,f)\in E\times F \text{ ....(III.4.3.1)}$$

adalah suatu fungsi bilinear.

<u>Bukti:</u>

Akan dibuktikan fungsi $\gamma: E\times F\rightarrow M$, dengan $\gamma(e,f)=\phi(e)\psi(f)$, $\forall(e,f)\in E\times F$ adalah suatu fungsi bilinear.

Ambil sembarang $e,e'\in E$ dan $f,f'\in F$ dengan r,s sebarang skalar untuk ruang vektor E,F

1) Linear Kiri

Akan dibuktikan $\gamma(re+se',f)=r\gamma(e,f)+s\gamma(e',f)$, selanjutnya:

$\gamma(re+se',f)=\phi(re+se')\psi(f)$ ....(karena III.4.3.1)

$=(\phi(re)+\phi(se'))\psi(f)$ ....(karena ϕ linear)

$=r\phi(e)\psi(f)+s\phi(e')\psi(f)$ .....(karena ϕ linear dan M suatu aljabar)

$=r\gamma(e,f)+s\gamma(e',f)$ ....(karena III.4.3.1)

Terbukti linear kiri.

2) Linear Kanan

Akan dibuktikan $\gamma(e,rf+sf')=r\gamma(e,f)+s\gamma(e,f')$, selanjutnya:

$\gamma(e,rf+sf')=\phi(e)\psi(rf+sf')$ ....(karena III.4.3.1)

$=\phi(e)(\psi(rf)+\psi(sf'))$ ....(karena ψ linear)

$= r\phi(e)\psi(f) + s\phi(e)\psi(f')$.....(karena ψ linear dan M suatu aljabar)

$= r\gamma(e,f) + s\gamma(e,f')$.................................(karena III.4.3.1)

Terbukti linear kanan.

Dari 1) dan 2) terbukti $\gamma : E \times F \to M$ adalah suatu fungsi bilinear. □

III.5 Hasilkali Tensor

Definisi 3.5.1: Hasilkali Tensor[10]

Misalkan U dan V merupakan ruang vektor atas lapangan F dan misalkan T subruang dari ruang vektor bebas $F_{U\times V}$ yang dibangun oleh vektor-vektor berbentuk:

$$r(u,v)+s(u',v)-(ru+su',v) \text{ .... (III.5.1.1)}$$

$$dan \quad r(u,v)+s(u,v')-(u,rv+sv') \text{.........(III.5.1.2)}$$

$\forall r,s$ skalar di F; $u,u' \in U$ dan $v,v' \in V$. Ruang kosien $F_{U\times V}/T$ dikatakan hasilkali tensor dari U dan V dan dinotasikan oleh $U \otimes V$.

Sebagai catatan pada definisi hasilkali tensor di atas, setiap vektor yang dibangun oleh subruang T merupakan elemen nol pada ruang vektor $U \otimes V$. Dengan mempertimbangkan definisi tersebut elemen-elemen dari $U \otimes V$ berbentuk

$$\sum r_i (u_i, v_i) + T$$

tetapi biasanya koset $(u,v)+T$ dinotasikan oleh $u\otimes v$, oleh karena itu setiap elemen dari $U\otimes V$ ditulis dalam bentuk $\sum u_i\otimes v_i$ di mana

$$r(u\otimes v)+s(u'\otimes v)=(ru+su')\otimes v \text{ .... (III.5.1.3)}$$

$$\text{dan } r(u\otimes v)+s(u\otimes v')=u\otimes(rv+sv') \text{ ....(III.5.1.4)}$$

selanjutnya,

$$\sum_{finite} u_i\otimes v_i=\sum_{finite} x_i\otimes y_i$$

jika dan hanya jika kita dapat menemukan elemen yang sama dalam bentuk jumlah berhingga lain.

III.6 Konstruksi Hasilkali Tensor

Misalkan U dan V merupakan ruang vektor atas lapangan F, kemudian kita konstruksi suatu ruang vektor bebas atas lapangan F dengan $U\times V$ sebagai generator. Berdasarkan definisi ruang vektor bebas, kita dapatkan $F_{U\times V}:=\left\{\sum_{finite}\lambda_i(u_i,v_i):\lambda_i\in F,(u_i,v_i)\in U\times V\right\}$ yang merupakan kombinasi linear berhingga dari elemen-elemen di $U\times V$.

Selanjutnya pilih subruang dari $F_{U\times V}$, misalkan T yang dibangun oleh vektor-vektor berbentuk (III.5.1.1) dan (III.5.1.2). Kemudian akan dibuktikan bahwa pemetaan kanonik

$\pi : F_{U\times V} \to F_{U\times V}/T$ di mana $\pi\left(\sum r_i(u_i,v_i)\right) = \pi((u,v)) = (u,v)+T$ untuk setiap $\sum r_i(u_i,v_i) = (u,v) \in F_{U\times V}$, merupakan suatu fungsi bilinear. Artinya:

$\pi(ru+su',v) = r\pi(u,v)+s\pi(u',v)$........(linear kiri)

dan

$\pi(u,rv+sv') = r\pi(u,v)+s\pi(u,v')$........(linear kanan)

$\forall r,s \in F\,; v,v' \in V$ dan $u,u' \in U$.

<u>Bukti:</u>

1) Linear kiri

   Akan dibuktikan $\pi(ru+su',v) = r\pi(u,v)+s\pi(u',v)$, $\forall r,s \in F\,; v,v' \in V$ dan $u,u' \in U$.

   Ambil sembarang $u,u' \in U\,; v,v' \in V$ dan skalar $r,s \in F$,

   selanjutnya $\pi(ru+su',v) = (ru+su',v)+T$ ....i)

   sedangkan $r\pi(u,v)+s\pi(u',v) = r((u,v)+T)+s((u',v)+T)$

   $= (r(u,v)+s(u',v))+T$ ....ii)

   Dari i) dan ii), berdasarkan teorema pada grup kosien:

   $(ru+su',v)+T = (r(u,v)+s(u',v))+T \Leftrightarrow (ru+su',v)-(r(u,v)+s(u',v)) \in T$

   Sedangkan $(r(u,v)+s(u',v))-(ru+su',v) = r(u,v)+s(u',v)-(ru+su',v) \in T$

maka $(ru+su',v)+T=(r(u,v)+s(u',v))+T$,

artinya $\pi(ru+su',v)=r\pi(u,v)+s\pi(u',v)$.

Jadi pemetaan kanonik $\pi: F_{U\times V} \rightarrow F_{U\times V}/T$ linear kiri.

2) Linear kanan

Akan dibuktikan $\pi(u,rv+sv')=r\pi(u,v)+s\pi(u,v')$, $\forall r,s\in F; v,v'\in V$ dan $u,u'\in U$.

Ambil sembarang $u,u'\in U; v,v'\in V$ dan skalar $r,s\in F$

Selanjutnya $\pi(u,rv+sv')=(u,rv+sv')+T$ ....i)

Sedangkan $r\pi(u,v)+s\pi(u,v')=r((u,v)+T)+s((u,v')+T)$

$$=(r(u,v)+s(u,v'))+T \text{ ....ii)}$$

Dari i) dan ii), berdasarkan teorema pada grup kosien:

$$(r(u,v)+s(u,v'))+T=(u,rv+sv')+T \Leftrightarrow (r(u,v)+s(u,v'))-(u,rv+sv')\in T$$

Sedangkan $(r(u,v)+s(u,v'))-(u,rv+sv')=r(u,v)+s(u,v')-(u,rv+sv')\in T$,

maka $(r(u,v)+s(u,v'))+T=(u,rv+sv')+T$,

sehingga $\pi(u,rv+sv')=r\pi(u,v)+s\pi(u,v')$.

Jadi pemetaan kanonik $\pi: F_{U\times V} \rightarrow F_{U\times V}/T$ linear kanan.

Dari 1) dan 2) dapat disimpulkan bahwa pemetaan kanonik $\pi : F_{U\times V} \to F_{U\times V}/T$ merupakan suatu fungsi bilinear. $\square$

III.7 Elemen Tensor

Berdasar definisi III.5.1 hasilkali tensor dari ruang vektor U dan V (dinotasikan $U \otimes V$) adalah ruang kosien $F_{U\times V}/T$. Sehingga setiap elemen dari $U \otimes V$ merupakan suatu hasil pemetaan kanonik $\pi : F_{U\times V} \to F_{U\times V}/T$ dengan $\pi((u,v)) = (u,v)+T$, selanjutnya koset $(u,v)+T$ dikatakan elemen tensor dari $U \otimes V$ yang dinotasikan sebagai $u \otimes v$. Berdasarkan III.5.1.3 dan III.5.1.4 elemen tensor tersebut bersifat:

$$r(u\otimes v)+s(u'\otimes v)=(ru+su')\otimes v \quad \text{...........(III.7.1)}$$

$$r(u\otimes v)+s(u\otimes v')=u\otimes(rv+sv') \quad \text{..............(III.7.2)}$$

untuk setiap $u,u' \in U$; $v,v' \in V$ dan skalar $r,s \in F$

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa terbentuknya sifat-sifat elemen tensor sebagai akibat dari pengontruksian hasilkali tensor pada uraian sebelumnya.

Ambil sembarang $u,u' \in U$; $v,v' \in V$ dan skalar $r \in F$.

Perhatikan:

1) Akan ditunjukkan $r(u\otimes v)+s(u'\otimes v)=(ru+su')\otimes v$

$$r(u\otimes v)+s(u'\otimes v)=r\pi(u,v)+s\pi(u',v)$$

$$=\pi(ru+su',v) \quad \text{..... (}\pi\text{ pemetaan bilinear)}$$

$$= (ru + su') \otimes v$$

2) Akan ditunjukkan $r(u \otimes v) + s(u \otimes v') = u \otimes (rv + sv')$

$$r(u \otimes v) + s(u \otimes v') = r\pi(u, v) + s\pi(u, v')$$

$$= \pi(u, rv + sv') \text{ .... (} \pi \text{ pemetaan bilinear)}$$

$$= u \otimes (rv + sv')$$

Jadi terbukti bahwa sifat-sifat elemen tensor merupakan akibat dari pengonstruksian hasilkali tensor pada uraian sebelumnya.

III.8 Sifat Hasilkali Tensor

Teorema III.8.1: Sifat Universal Hasilkali Tensor[10]

Misalkan U dan V merupakan ruang vektor atas lapangan F. Suatu fungsi $t : U \times V \to U \otimes V$ *adalah fungsi bilinear yang didefinisikan oleh*

$$t(u, v) = u \otimes v \text{ ....(III.8.1.1)}$$

Jika $f : U \times V \to W$ *adalah sembarang fungsi bilinear dari* $U \times V$ *pada suatu ruang vektor* W *atas* F, *maka terdapat suatu transformasi linear unik* $\tau : U \otimes V \to W$ *sehingga*

$$\tau \circ t = f \text{ ....(III.8.1.2)}$$

Jika terdapat $s : U \times V \to X$ *fungsi bilinear lain yang memenuhi sifat tersebut, maka* $X \cong U \otimes V$.

Bukti dapat dilihat dalam [10: 299-300].

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t \text{ bilinear}"] \arrow[dr, "f \text{ bilinear}"'] & U \otimes V \arrow[d, "\tau \text{ linear}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Gambar 3.1
Sifat Universal Hasilkali Tensor

Teorema III.8.2:[10]

Misalkan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *adalah vektor-vektor yang bebas linear pada ruang vektor U dan* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *adalah vektor-vektor sembarang pada ruang vektor V.*

$$\sum u_i \otimes v_i = 0 \Rightarrow v_i = 0, i = 1, \ldots, n$$

<u>Bukti:</u>

Misalkan U^* ruang dual dari U dan $\delta_i \in U^*$ sedemikian sehingga $\forall u_i, i = 1, 2, \ldots, n$ berlaku $\delta_i(u_j) = \delta_{i,j}$ (fungsi *Kronecker-delta,* yaitu dimana $\delta_{i,j} = 1$ untuk $i = j$ dan $\delta_{i,j} = 0$ untuk lainnya). Selanjutnya jika untuk sembarang fungsional linear $\gamma_i : V \to F$ kita definisikan suatu pemetaan bilinear $f : U \times V \to F$ dengan

$$f(u,v) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \delta_j(x)\gamma_j(y) \quad \text{.................................(III.8.2.1)}$$

maka berdasarkan sifat universal hasilkali tensor, terdapat fungsional linear yang unik $\tau : U \otimes V \to F$ sehingga $\tau \circ t = f$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "t \textit{ bilinear}"] \arrow[dr, "f \textit{ bilinear}"'] & U \otimes V \arrow[d, "\tau \textit{ linear}"] \\
 & F
\end{tikzcd}$$

Gambar 3.2
Pengguanaan Teorema III.8.1

Selanjutnya perhatikan:

$$\sum u_i \otimes v_i = 0 \Rightarrow \tau\left(\sum u_i \otimes v_i\right) = 0, \forall i \text{ ....} (\tau \text{ linear})$$

$$\tau\left(\sum u_i \otimes v_i\right) = \sum \tau\left(u_i \otimes v_i\right) \text{........................} (\tau \text{ linear})$$

$$= \sum_i \tau\left(t\left(u_i, v_i\right)\right) \text{ .... (Sifat Universal Hasilkali Tensor)}$$

$$= \sum_i \tau \circ t\left(u_i, v_i\right)$$

$$= \sum_i f\left(u_i, v_i\right) \text{............................(Sifat Universal Hasilkali Tensor)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_j\left(u_i\right) \gamma_j\left(v_i\right) \text{.....................(III.8.2.1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\left(v_i\right)$$

Karena $\gamma_i : V \to F$ adalah sembarang fungsional linear (artinya $\gamma_i\left(v_i\right)$ tidak selalu nol $\forall v_i$) sedangkan $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\left(v_i\right) = 0, \forall i$, jadi $v_i = 0, \forall i$. □

Teorema III.8.3: Hasilkali Tensor Transformasi Linear [10]

Diberikan suatu ruang vektor V, V', W dan W'. *Jika* $\tau : V \to V'$ *dan* $\sigma : W \to W'$ *merupakan transformasi linear, maka terdapat suatu transformasi linear yang unik* $(\tau \otimes \sigma) : V \otimes W \to V' \otimes W'$ *dengan :*

$$(\tau \otimes \sigma)(v \otimes w) = \tau(v) \otimes \sigma(w)$$

pemetaan $(\tau \otimes \sigma)$ *dikatakan sebagai hasilkali tensor dari* τ *dan* σ.

Bukti:

Misalkan $f : V \times W \to V' \otimes W'$ didefinisikan oleh $f(v, w) = \tau(v) \otimes \sigma(w)$. Selanjutnya akan ditunjukkan f bilinear:

Ambil sembarang $r, s \in F$; $v, v' \in V$ dan $w, w' \in W$. Kemudian perhatikan:

1) Linear Kiri

$$f(rv + sv', w) = \tau(rv + sv') \otimes \sigma(w)$$

$$= (r\tau(v) + s\tau(v')) \otimes \sigma(w) \text{ .... (karena } \tau \text{ linear)}$$

$$= r(\tau(v) \otimes \sigma(w)) + s(\tau(v') \otimes \sigma(w)) \text{ .... (sifat III.5.1.3)}$$

$$= rf(v, w) + sf(v', w)$$

2) Linear Kanan

$$f(v, rw + sw') = \tau(v) \otimes \sigma(rw + sw')$$

$$= \tau(v) \otimes (r\sigma(w) + s\sigma(w')) \text{ .... (karena } \tau \text{ linear)}$$

$$= r\left(\tau(v)\otimes\sigma(w)\right)+s\left(\tau(v)\otimes\sigma(w')\right) \text{.................. (sifat III.5.1.4)}$$

$$= rf(v,w)+sf(v,w')$$

Berdasarkan 1) dan 2) dapat disimpulkan $f: V\times W \to V'\otimes W'$ bilinear.

Karena $f: V\times W \to V'\otimes W'$ bilinear (berdasarkan sifat universal hasilkali tensor), maka terdapat suatu transformasi linear unik $(\tau\otimes\sigma): V\otimes W \to V'\otimes W'$. □