BAB III

INTEGRAL HENSTOCK DAN SIFAT-SIFATNYA

Sifat-sifat yang dipelajari pada bab ini sebagian sudah sering dijumpai pada pembahasan tentang integral Riemann. Dalam pembahasan integral Henstock ini, mula-mula diberikan definisi integral Henstock dan nilai ketunggalannya. Sifat-sifat lain yang akan dibahas adalah sifat ketunggalan, kelinieran, kriteria Cauchy, teorema apit, teorema konsistensi dan teorema apit. Selain itu integral Henstock pun dapat didefinisikan pada perluasan bilangan real.

3.1 Definisi dan Ketunggalan

Pada pasal 2.3 telah dibahas definisi gauge dan $\delta - fine$, konsep gauge dan $\delta - fine$ ini akan digunakan pada definisi integral Henstock. Berikut ini adalah definisi dari integral Henstock.

Definisi 3.1.1

Sebuah fungsi bernilai real f *dikatakan terintegral Henstock ke* A *pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *ada gauge* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga untuk sebarang partisi* $\delta - fine$ $\dot{P}$ *pada* $[a,b]$ *berlaku* $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$

Selanjutnya, ditulis:

$\int_a^b f(x)\,dx = A$ *atau* $\int_a^b f = A$.

Sebagaimana diketahui nilai integral Riemann adalah tunggal, demikian pula halnya dengan nilai dari integral Henstock. Adapun ketunggalan nilai dari integral Henstock dijamin oleh teorema berikut.

Teorema 3.1.2

Jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal.

Bukti.

Misalkan nilai integral dari f tidak tunggal sebutlah A' dan A'' yang memenuhi definisi di atas. Diberikan $\varepsilon > 0$ ada sebarang bilangan $\delta' > 0$ sedemikian sehingga $\dot{P}_1$ adalah sebarang partisi $\delta' - \mathit{fine}$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i' - x_{i-1}') - A'\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan ada juga $\delta'' > 0$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}_2$ sebarang partisi $\delta'' - \mathit{fine}$ lainnya maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')(x_i'' - x_{i-1}'') - A''\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan gauge $\delta > 0$ dengan $\delta(\xi) = \min\{\delta'(\xi), \delta''(\xi)\}$ untuk $\xi \in [a,b]$. Karena $\delta > 0$ *adalah gauge maka ada partisi* $\dot{P}$ yang $\delta - \mathit{fine}$.

Karena $0 < \delta(\xi) \le \delta_1(\xi)$ *dan* $0 < \delta(\xi) \le \delta_1(\xi)$ maka partisi $\dot{P}$ juga merupakan $\delta' - \mathit{fine}$ dan $\delta'' - \mathit{fine}$ sehingga

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A'\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A''\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dari sini berakibat,

$$\begin{aligned}
|A' - A''| &= \left|A' - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A''\right| \\
&\le \left|A' - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A''\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang ini menyebabkan $A' = A''$. ▲

3.2 Sifat-Sifat Dasar

Sifat-sifat dasar pada integral Riemann telah sering dibahas pada kajian bidang Analisis Real. Berikut ini akan dipelajari pada teorema 3.2.1 apakah sifat-sifat kelinieran berlaku pada integral Henstock.

Teorema 3.2.1

Diberikan f dan g fungsi yang terintegral Henstock pada $[a,b]$

a. *Fungsi αf terintegral Henstock pada $[a,b]$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ dan berlaku*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

b. *Fungsi $f + g$ terintegral Henstock dan*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

c. *Jika $f(x) \le g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Bukti.

a. Diketahui f terintegral Henstock ke A pada $[a,b]$, sehingga diberikan $\varepsilon > 0$ maka ada gauge $\delta > 0$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}$ adalah sebarang partisi $\delta - fine$ pada $[a,b]$ maka $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$ sehingga $\int_a^b f = A$.

   Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \int_a^b f = \alpha A$ artinya $\left|\alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \alpha A\right| < \varepsilon$ dan $\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \alpha A\right| < \varepsilon$. Dari sini terbukti $\int_a^b \alpha f = \alpha A = \alpha \int_a^b f$. ▲

b. Diketahui f terintegral Henstock ke A pada $[a,b]$, dan g terintegral Henstock ke B pada $[a,b]$. Diberikan $\varepsilon > 0$, ada gauge $\delta_1(\xi) > 0$ dan $\delta_2(\xi) > 0$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}$ adalah sebarang partisi $\delta_1 - fine$ dan $\delta_2 - fine$ pada $[a,b]$ sehingga berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Dipilih $\delta(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}$. Karena $\delta_1(\xi) > 0$ dan $\delta_2(\xi) > 0$ adalah gauge pada $[a,b]$ maka $\delta(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}$ juga merupakan gauge pada $[a,b]$, sehingga sebarang partisi $\dot{P}$ yang $\delta - fine$ pada $[a,b]$

berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)+g(\xi_i))(x_i-x_{i-1})-(A+B)\right|=\left|(\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}))-(A+B)\right|$$

$$\leq\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-B\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Terbukti bahwa $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$. ▲

c. Diketahui f terintegral Henstock ke A pada $[a,b]$, dan g terintegral Henstock ke B pada $[a,b]$. Diberikan $\varepsilon>0$, ada gauge $\delta_1(\xi)>0$ dan $\delta_2(\xi)>0$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}$ adalah sebarang partisi δ_1-*fine* dan δ_2-*fine* pada $[a,b]$ sehingga berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon$ dan $\left|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-B\right|<\varepsilon$.

Dipilih $\delta(\xi)=\min\{\delta_1(\xi),\delta_2(\xi)\}$. Karena $\delta_1(\xi)>0$ dan $\delta_2(\xi)>0$ adalah gauge pada $[a,b]$ maka $\delta(\xi)=\min\{\delta_1(\xi),\delta_2(\xi)\}$ juga merupakan gauge pada $[a,b]$, sehingga sebarang partisi $\dot{P}$ yang $\delta-$*fine* pada $[a,b]$ berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon$ dan $\left|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-B\right|<\varepsilon$.

$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon$ artinya

$$-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A<\varepsilon \text{ dan } A-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - B\right| < \varepsilon \text{ artinya}$$

$$-\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - B < \varepsilon \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon + B .$$

Karena $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

dan

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < B + \varepsilon$$

sehingga $A \leq B + 2\varepsilon$ atau $\int_a^b f \leq \int_a^b g + 2\varepsilon$ karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka

terbukti $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. ▲

Selanjutnya di bawah ini akan dibuktikan fungsi kontinu selalu terintegral Henstock.

Teorema 3.2.2

Jika f kontinu pada [a,b] *maka f terintegral Henstock pada* [a,b].

Bukti.

Misalkan ε_n monoton turun ke 0 dan $\delta_n(\xi) > 0$ sedemikian sehingga jika $|x - \xi| < \delta_n(\xi)$ berlaku $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon_n$. Anggap $\delta_{n+1}(\xi) \leq \delta_n(\xi)$ untuk setiap n bilangan asli. Misalkan s_n menyatakan sebuah jumlah Riemann pada partisi

$\delta - \mathit{fine}$. Disini s_n, n = 1, 2, 3..., ditentukan. Ambil $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ partisi

$\delta_m - \mathit{fine}$ dan $\dot{P}_1 = \{([x'_{i-1}, x_i'], \xi'_i)\}_{i=1}^{n}$.

Jika $[x_{i-1}, x_i] \cap [x'_{i-1}, x'_i]$ adalah tak kosong dan memuat t kemudian

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi')| &= |f(x) - f(t) + f(t) - f(\xi')| \\ &\le |f(x) - f(t)| + |f(t) - f(\xi')| \\ &< \varepsilon_m + \varepsilon_n = \varepsilon \end{aligned}$$

Ini berakibat bahwa

$|s_m - s_n| < (\varepsilon_m + \varepsilon_n)(b - a)$, artinya $A = \lim_{n \to \infty} s_n$ ada.

Oleh karena itu, diberikan $\varepsilon > 0$ ada $\delta_n(\xi) > 0$ dengan $\varepsilon_n < \varepsilon$ dan $|s_n - A| < \varepsilon$ sedemikian sehingga pada sebarang $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ partisi $\delta_n - \mathit{fine}$ berlaku

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - s_n + s_n - A \right| \\ &\le \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - s_n \right| + |s_n - A| \\ &< 2\varepsilon(b - a) + \varepsilon \end{aligned}$$

Itu artinya f terintegral Henstock pada $[a, b]$. ▲

Pada teorema selanjutnya dipaparkan keterkaitan fungsi yang terintegral Riemann dengan fungsi yang terintegral Henstock.

3.3 Kriteria Cauchy

Teorema yang cukup terkenal pada teori integral yaitu kriteria Cauchy. Teorema ini banyak digunakan untuk membuktikan sifat-sifat lain dari integral yang dibahas. Pada teorema ini dijelaskan fungsi yang selisih jumlah Riemannnya pada dua partisi yang $\eta - fine$ kecil maka fungsi itu terintegral Henstock.

Teorema 3.3.1(Kriteria Cauchy)

Sebuah fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Henstock pada* [a,b] *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *ada gauge* η *pada* [a,b] *sedemikian sehingga jika* $\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ *dan* $\dot{Q}=\{([r_{i-1},r_i],t_i)\}_{i=1}^{n}$ *sebarang partisi yang* $\eta - fine$ *maka* $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right| < \varepsilon$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui f terintegral Henstock pada [a,b] dengan nilai A. Misal δ adalah gauge pada [a,b] sedemikian sehingga jika $\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{Q}=\{([r_{i-1},r_i],t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi $\delta - fine$ pada [a,b] maka berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dan} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $\eta(t) = \delta(t)$ untuk $t \in [a,b]$ juga jika $\dot{P}$ dan $\dot{Q}$ partisi $\eta - fine$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) - A\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada gauge η pada [a,b] sedemikian sehingga jika $\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{Q}=\{([r_{i-1},r_i],t_i)\}_{i=1}^{n}$ sebarang partisi yang $\eta - fine$ maka $\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) \right| < \varepsilon$ maka fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada [a,b].

Misalkan δ_n adalah gauge pada [a,b] untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{Q} = \{([r_{i-1}, r_i], t_i)\}_{i-1}^{n}$ sebarang partisi yang $\delta_n - fine$ maka $\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) \right| < \frac{1}{n}$ untuk $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Anggap bahwa $\delta_n(\xi) \geq \delta_{n+1}(\xi)$ untuk setiap $\xi \in [a,b]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Definisikan gauge $\delta'_n(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi) ..., \delta_n(\xi)\}$ untuk setiap $\xi \in [a,b]$.

Misalkan $\dot{P}_n = \{([x'_{i-1}, x'_i], \xi'_i)\}_{i=1}^{n}$ partisi yang $\delta_n - fine$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tentu saja jika $m > n$ maka $\dot{P}_m = \{([x''_{i-1}, x''_i], \xi''_i)\}_{i=1}^{n}$ dan $\dot{P}_n$ adalah partisi $\delta_n - fine$ yang berarti $| S(f; \dot{P}_n) - S(f; \dot{P}_m) | < \frac{1}{n}$ untuk $m > n$.

Dari sini didapat barisan $(S(f; \dot{P}_m))_{m=1}^{\infty}$ adalah barisan cauchy pada $\mathbb{R}$ dan konvergen ke suatu bilangan A. Karena $| S(f; \dot{P}_n) - S(f; \dot{P}_m) | < \frac{1}{n}$ untuk $m > n$ untuk $m \to \infty$ didapat $| S(f; \dot{P}_n) - A | \leq \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Agar dapat terlihat f terintegral Henstock ke A, diberikan $\varepsilon > 0$, misalkan $K \in \mathbb{N}$ memenuhi $K > \frac{2}{\varepsilon}$. Jika $\dot{Q}$ adalah partisi yang $\delta_K - fine$ maka

$$\begin{aligned}|S(f;\dot{Q})-A| &= |S(f;\dot{Q})-S(f;\dot{P}_K)+S(f;\dot{P}_K)-A| \\ &\leq |S(f;\dot{Q})-S(f;\dot{P}_K)| + |S(f;\dot{P}_K)-A| \\ &\leq \frac{1}{K}+\frac{1}{K}<\varepsilon\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, terbukti f terintegral Henstock ke A pada [a,b]. ▲

Berikut ini akan disajikan teorema yang menjelaskan sebuah fungsi f terintegral Henstock pada selang tertutup yang kemudian selang tersebut dibagi menjadi dua buah selang tertutup yang tidak perlu sama panjangnya ternyata f terintegral Henstock pada masing-masing selang bagian tersebut.

Teorema 3.3.2

Misal $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *dan* $c\in(a,b)$, *maka* f *terintegral Henstock pada* [a,b] *jika dan hanya jika* f *terintegral Henstock pada* [a,c] *dan pada* $[c,b]$ *sehingga berlaku* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Misal f terintegral Henstock pada [a,b] dan diberika $\varepsilon > 0$. Misal gauge η memenuhi kriteria cauchy. Misal f_1 restriksi f pada [a,c] dan $\dot{P}_1$, $\dot{Q}_1$ merupakan partisi $\eta-fine$ dari [a,c]. Dengan menambahkan titik-titik partisi tambahan dan label pada [c,b], dapat diperluas $\dot{P}_1$ dan $\dot{Q}_1$ ke partisi yang

$\eta - fine$ $\dot{P}$ dan $\dot{Q}$ pada $[a,b]$. Jika digunakan titik-titik tambahan yang sama dan label pada [c,b] pada keduanya $\dot{P}_1$ dan $\dot{Q}_1$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)(x'_i - x'_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1})\right|$$

Karena keduanya $\eta - fine$ maka berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)(x'_i - x'_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right|$$
$$< \varepsilon$$

Karena kondisi cauchy terpenuhi yaitu f_1 restriksi f pada [a,c] terintegral Henstock pada $[a,c]$.

Untuk restriksi f_2, misal f terintegral Henstock pada [a,b] dan diberikan $\varepsilon > 0$. Misal gauge δ memenuhi kriteria cauchy. Misal f_2 restriksi f pada [c,b] dan $\dot{P}_2$, $\dot{Q}_2$ merupakan partisi $\delta - fine$ dari $[c,b]$. Dengan menambahkan titik-titik partisi tambahan dan label pada $[a,c]$, dapat diperluas $\dot{P}_2$ dan $\dot{Q}_2$ ke partisi yang $\delta - fine$ $\dot{P}$ dan $\dot{Q}$ pada $[a,b]$. Jika digunakan titik-titik tambahan yang sama dan label pada [a,c] pada keduanya $\dot{P}_2$ dan $\dot{Q}_2$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi''_i)(x''_i - x''_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1})\right|$$

Karena keduanya $\eta - fine$ maka berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi''_i)(x''_i - x''_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right|$$
$$< \varepsilon$$

Karena kondisi cauchy terpenuhi yaitu f_2 restriksi f pada [c,b] terintegral Henstock pada [c,b].

($\Leftarrow$) Misalkan pembagian f_1 dari f pada [a,c] terintegral Henstock ke A' dan f_2 dari f pada $[c,b]$ terintegral Henstock ke A''. Diberikan $\varepsilon > 0$ ada gauge $\delta' > 0$ pada [a,c] sedemikian sehingga jika $\dot{P}_1 = \{([x'_{i-1}, x_i'], \xi'_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi $\delta' -$ *fine* pada [a,c] maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i' - x_{i-1}') - A'\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan juga ada gauge $\delta'' > 0$ pada $[c,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}_2 = \{([x''_{i-1}, x''_i], \xi''_i)\}_{i=1}^{n}$ sebarang partisi $\delta'' -$ *fine* pada $[c,b]$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi''_i)(x''_i - x''_{i-1}) - A''\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sekarang didefinisikan gauge $\delta > 0$ pada [a,b] oleh

$$\delta(t) = \begin{cases} \min\{\delta'(t), \frac{1}{2}(c-t)\} & untuk\, t \in [a,c) \\ \min\{\delta'(c), \delta''(c)\} & untuk\, t = c \\ \min\{\delta''(t), \frac{1}{2}(t-c)\} & untuk\, t \in (c,b] \end{cases}$$

Gauge ini mempunyai sifat bahwa sebarang partisi $\delta -$ *fine* harus mempunyai c sebagai label dari sebarang subinterval memuat titik c. Akan menunjukkan bahwa jika $\dot{Q} = \{([r_{i-1}, r_i], t_i)\}_{i-1}^{n}$ adalah sebarang partisi $\delta -$ *fine* pada [a,b] maka ada sebuah partisi $\dot{Q}_1 = \{([r'_{i-1}, r'_i], t'_i)\}_{i-1}^{n}$ pada $[a,c]$ dan sebuah partisi $\dot{Q}_2 = \{([r''_{i-1}, r''_i], t''_i)\}_{i-1}^{n}$ pada $[c,b]$ sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1})$$

Kasus 1

Jika c titik partisi dari $\dot{Q}$, maka ini terdapat pada dua sub interval dari $\dot{Q}$ dan c dipilih sebagai label dari kedua sub interval ini. Jika $\dot{Q}_1$ memuat bagian $\dot{Q}$ yang mempunyai sub interval pada $[a,c]$ maka $\dot{Q}_1$ $\delta' - fine$. Dengan cara yang sama jika $\dot{Q}_2$ memuat bagian $\dot{Q}$ mempunyai sub interval pada $[c,b]$ maka $\dot{Q}_2$ merupakan $\delta'' - fine$, sehingga kondisi di bawah ini terpenuhi.

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1})$$

Kasus 2

Jika c bukan titik partisi pada $\dot{Q} = \{([r_{i-1}, r_i], t_i)\}_{i-1}^{n}$ maka c ini dipilih sebagai label untuk sub interval katakan $[x_{k-1}, x_k]$. Kemudian pasangan $([x_{k-1}, x_k], c)$ diganti dengan dua pasangan yaitu $([x_{k-1}, c], c)$ dan $([c, x_k], c)$ dan misalkan $\dot{Q}_1$ dan $\dot{Q}_2$ menjadi partisi berlabel dari $[a,c]$ dan $[c,b]$.

Karena

$$f(c)(x_k - x_{k-1}) = f(c)(c - x_{k-1}) + f(c)(x_k - c)$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1})$$

Persamaan ini dan kedua kasus di atas juga ketaksamaan segitiga mengakibatkan

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1}) - A_1\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1}) - A_2\right|\end{aligned}$$

karena $\dot{Q}_1$ dan $\dot{Q}_2$ menjadi partisi berlabel dari $[a,c]$ dan $[c,b]$ yang masing-masing $\delta' - fine$ dan $\delta'' - fine$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t'_i)(r'_i - r'_{i-1}) - A_1\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(t''_i)(r''_i - r''_{i-1}) - A_2\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang terbukti f terintegral Henstock pada [a,b] dan berlaku persamaan $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. ▲

Teorema apit yang sering dijumpai pada limit, kini diberikan pula dalam bahasan integral Henstock. Dalam pembuktian fungsi terintegral Henstock, dibutuhkan teorema yang bisa mempercepat proses pembuktian. Terkadang ada beberapa soal yang dapat dengan mudah diselesaikan dengan teorema apit. Sebagai alternatif di bawah ini akan dibahas teorema apit untuk integral.

Teorema apit 3.3.3

Sebuah fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Henstock pada* [a,b] *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon>0$ *ada fungsi* g *dan* h *yang terintegral Henstock pada* [a,b] *dengan* $g(x)\le f(x)\le h(x)$ *untuk setiap* $x\in[a,b]$,

sedemikian sehingga $\int_a^b h-g\le\varepsilon$.

Bukti.

$(\Rightarrow)$ Ambil fungsi $g=h=f$ maka untuk setiap $\varepsilon>0$ ada fungsi g dan h yang terintegral Henstock pada [a,b] dengan $g(x)\le f(x)\le h(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$, sehingga $\int_a^b g-h=\int_a^b 0=0\le\varepsilon$

$(\Leftarrow)$ Diberikan $\varepsilon>0$ karena g dan h terintegral Henstock pada [a,b] maka ada gauge $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^n$ adalah sebarang partisi yang $\delta-fine$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b g\right|<\varepsilon \text{ dan } \left|\sum_{i=1}^n h(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b h\right|<\varepsilon$$

Sehingga berlaku

$$-\varepsilon<\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b g<\varepsilon \text{ dan } \int_a^b g-\varepsilon<\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

Juga berlaku

$$-\varepsilon<\sum_{i=1}^n h(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b h<\varepsilon \text{ dan } \sum_{i=1}^n h(\xi_i)(x_i-x_{i-1})<\int_a^b h+\varepsilon$$

Diketahui bahwa $g(x)\le f(x)\le h(x)$ maka

$$\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Dari sini didapat

$$\int_a^b g - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \int_a^b h + \varepsilon$$

$$\int_a^b g - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \int_a^b h + \varepsilon \qquad (1)$$

Kemudian jika sehingga jika $\dot{Q} = \{([r_{i-1}, r_i], t_i)\}_{i-1}^{n}$ sebarang partisi lain yang $\delta - \mathit{fine}$ maka $\left|\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(r_i - r_{i-1}) - \int_a^b g\right| < \varepsilon$ dan $\left|\sum_{i=1}^{n} h(t_i)(r_i - r_{i-1}) - \int_a^b h\right| < \varepsilon$

Sehingga berlaku

$$-\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(r_i - r_{i-1}) - \int_a^b g < \varepsilon \text{ dan } \int_a^b g - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(r_i - r_{i-1})$$

Juga berlaku

$$-\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(r_i - r_{i-1}) - \int_a^b h < \varepsilon \text{ dan } \int_a^b h - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(r_i - r_{i-1})$$

Diketahui bahwa $g(x) \le f(x) \le h(x)$ maka

$$\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(r_i - r_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(r_i - r_{i-1})$$

Dari sini didapat

$$\int_a^b g - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(r_i - r_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(r_i - r_{i-1}) < \int_a^b h + \varepsilon$$

$$\int_a^b g - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1}) < \int_a^b h + \varepsilon \qquad (2)$$

Dari pernyataan (1) dan (2) maka berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right| < \int_a^b h - \int_a^b g + 2\varepsilon$$

Dari sifat kelinieran integral Henstock sehingga berlaku

$$\int_a^b h - \int_a^b g + 2\varepsilon = \int_a^b h - g + 2\varepsilon .$$

Dan karena $\int_a^b h - g \leq \varepsilon$

akibatnya $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(r_i - r_{i-1})\right| < 4\varepsilon$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, menurut kriteria Cauchy f terintegral Henstock pada [a,b]. ▲

Di bawah ini diberikan contoh fungsi yang tidak terintegral Henstock.

Contoh Soal 3.3.4

Diberikan suatu fungsi f sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & untuk\ x \in (0,1] \\ 0 & untuk\ x = 0 \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa f tidak terintegral Henstock pada $[0,1]$

Bukti.

Misal f terintegral Henstock ke A pada $[0,1]$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada gauge $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang partisi $\delta - fine$ $\dot{P}$ pada $[a,b]$ berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$

Dibawah ini berlaku

$$\int_0^1 f \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}(x_i - x_{i-1}) = S(S_n, \dot{P})$$

Sedangkan $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \to \infty$ untuk $n \to \infty$.

Dari sini $A \to \infty$ suatu kontradiksi. Sehingga haruslah f tidak terintegral Henstock pada $[0,1]$.

3.4 Integral Henstock Sebagai Perluasan dari Integral Riemann

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa nilai integral Riemann dan integral Henstock dari fungsi tersebut adalah sama. Kemudian akan ditunjukkan bahwa ada fungsi yang tidak terintegral Riemann tetapi fungsi tersebut terintegral Henstock. Dengan demikian himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann adalah bagian dari himpunan semua fungsi yang terintegral Henstock.

Teorema 3.4.1

Jika f terintegral Riemann ke A pada $[a,b]$ maka f terintegral Henstock ke A pada $[a,b]$.

Bukti.

Diberikan $\varepsilon > 0$, dipilih suatu gauge pada $[a,b]$. Karena f terintegral Riemann pada $[a,b]$, ada bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\dot{P}$ sebarang partisi berlabel dengan $\|\dot{P}\| < \delta$, maka $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$. Didefinisikan sebuah fungsi $\delta^*(\xi) = \frac{1}{4}\delta$ untuk $\xi \in [a,b]$, sehingga δ^* merupakan gauge pada $[a,b]$.

Jika $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi $\delta^* - fine$ maka

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [\xi_i - \delta^*(\xi_i), \xi_i + \delta^*(\xi_i)] = \left[\xi_i - \frac{1}{4}\delta, \xi_i + \frac{1}{4}\delta\right],$$

Ini terlihat bahwa $0 < x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{2}\delta < \delta$ untuk setiap i = 1,2,...,n.

Oleh karena itu partisi ini juga memenuhi $\|\dot{P}\| < \delta$ dan memenuhi

$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$. Kemudian setiap $\dot{P}$ partisi $\delta^* - fine$ juga memenuhi

$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, ini berakibat f terintegral Henstock ke A. ▲

Contoh Soal 3.4.2

Misalkan f fungsi Dirichlet yang didefinisikan oleh $f(x)=1$, jika x bilangan rasional dan $f(x)=0$, jika x bilangan irrasional. Akan dibuktikan fungsi f terintegral Henstock pada $[0,1]$ ke 0.

Bukti.

Misalkan bilangan-bilangan rasional pada $[0,1]$ disebut sebagai $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Diberikan $\varepsilon > 0$ didefinisikan $\delta(r_k)=\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ dan $\delta(x)=1$, untuk x bilangan irrasional. Diketahui $\delta > 0$ adalah gauge pada $[0,1]$ dan jika partisi $\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah $\delta-fine$, maka $x_i - x_{i-1} \le 2\delta(\xi_i)$. Karena nilai $f(r_k)(x_i - x_{i-1})$ tak nol hanya pada bilangan rasional dengan label $\xi_i = r_k$, maka

$$0 < f(r_k)(x_i - x_{i-1}) = 1.(x_i - x_{i-1}) \le \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Dan karena setiap label dapat terjadi dalam setiap dua subinterval

$$0 < \sum_{k=1}^{n} f(r_k)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Dengan demikian untuk untuk ξ_i bilangan rasional maupun irrasional berlaku

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0\right| < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka f terintegral Henstock pada $[0,1]$ dan $\int_0^1 f = 0$.

3.5 Integral Henstock pada Perluasan Bilangan Real

Integral Henstock dapat didefinisikan pada $\overline{\mathbb{R}}$ yang menyatakan himpunan bilangan real dengan menambahkan titik-titik $+\infty$ dan $-\infty$ pada $\mathbb{R}$. Didefinisikan $\delta(x)>0$ untuk $-\infty< x <+\infty$, $\delta(-\infty) = A>0$ dan $\delta(+\infty) = B>0$. Misalkan sebuah partisi $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ yang $\delta-fine$ pada $\overline{\mathbb{R}}$ sehingga

$$-\infty < \alpha = x_o < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta < +\infty .$$

Sebuah titik ξ_i dipilih dari setiap interval I_i, untuk $i=1,2,...,n$, kemudian titik-titik ξ_i disebut label. Partisi $\dot{P}$ dikatakan $\delta-fine$ jika $\alpha<-A$, $\beta>B$ dan interval terbatas $[\alpha,\beta]$ adalah $\delta-fine$ yaitu: $\xi_i-\delta(\xi_i) \le x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \le \xi_i+\delta(\xi_i)$ untuk $i=1,2,...,n$. Misalkan $-\infty$ sebagai label pada $[-\infty,\alpha]$ dan $+\infty$ label pada $[\beta,+\infty]$. Agar menjadi $\delta-fine$ mengharuskan $[-\infty,\alpha] \subseteq [-\infty, A)$ dan $[\beta,+\infty] \subseteq (B,+\infty]$. Hal ini berarti jika diberikan $\delta(x)>0$ untuk $x \in \overline{\mathbb{R}}$, sebuah partisi $\delta-fine$ dari $\overline{\mathbb{R}}$ ada. Sehingga fungsi f dapat terintegral Henstock pada $\overline{\mathbb{R}}$.

Definisi 3.5.1

Sebuah fungsi bernilai real f dikatakan terintegral Henstock ke A pada $\overline{\mathbb{R}}$ jika untuk setiap $\varepsilon>0$ ada gauge $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk sebarang partisi $\delta-fine$ $\dot{P}$ pada $\overline{\mathbb{R}}$ berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$

Contoh Soal 3.5.2

Misalkan $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *jika* $1 \le x < +\infty$. *Buktikan* f *terintegral Henstock pada* $1 \le x < +\infty$.

Bukti.

Diberikan $\varepsilon > 0$ definisikan $\delta(x) = \varepsilon x$ untuk $1 \le x < +\infty$ dan $\delta(+\infty) = \frac{1}{x}$. Kemudian untuk sebarang partisi $\delta - \mathit{fine}$ yang diberikan di atas pada definisi dengan $x_0 = 1$ dan $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 1\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})}{\xi_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right)\right| + \frac{1}{x_n}$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i x_{i-1}}{\xi_i^2} - 1\right| \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) + \varepsilon$$

untuk $\frac{x_i x_{i-1}}{\xi_i^2} - 1$ positif atau negatif, diperoleh

$$\left|\frac{x_i x_{i-1}}{\xi_i^2} - 1\right| \le \frac{x_i - x_{i-1}}{\xi_i} < 2\varepsilon$$

Sehingga dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan di atas diperoleh bahwa f terintegral Henstock pada $1 \le x < +\infty$.