

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu ruang yang banyak dikaji oleh matematikawan adalah ruang Lebesgue L_p . Banyak peneliti tertarik mengkaji tentang ruang Lebesgue L_p . Salah satu hasilnya adalah tentang ruang Orlicz L_Φ yang merupakan ruang perumuman dari ruang Lebesgue L_p untuk $1 \leq p < \infty$ (Orlicz, 1992, hlm. 203). Hasil tersebut dilakukan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pada tahun 1931. Hal yang erat kaitannya dengan ruang Orlicz adalah fungsi Φ yang merupakan fungsi Young. Sehingga salah satu dasar mengkonstruksi ruang Orlicz adalah fungsi Young. Suatu fungsi $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dikatakan fungsi Young jika Φ fungsi konveks, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ dan Φ kontinu (Masta, 2018).

Para peneliti mengkaji bagaimana sifat-sifat fungsi Young yang dimanfaatkan untuk membuktikan beberapa sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz. Pada tahun 1991 M. Rao dan Z. Ren mendefinisikan invers dari fungsi Young yang disimbolkan oleh Φ^{-1} dimana untuk sembarang $s \geq 0$ didefinisikan $\Phi^{-1}(s) = \inf \{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}$. Pembahasan terus berlanjut, pada tahun 2011 Sawano membuktikan bahwa fungsi Young merupakan fungsi monoton naik. Selanjutnya pada tahun 2016 A. A. Masta dkk. membuktikan bahwa invers fungsi Young Φ^{-1} merupakan fungsi monoton naik.

Berdasarkan sifat-sifat fungsi Young telah diperoleh, para peneliti mengembangkan sifat-sifat inklusi pada ruang Orlicz. Pada tahun 1966, Welland mengkaji sifat inklusi pada ruang Orlicz dengan memberikan syarat cukup sifat inklusi pada ruang Orlicz (Welland, 1966). Selanjutnya pada tahun 1977 Kufner, John, dan Fučík mengembangkan hasil yang diperoleh Welland dengan

memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz. Kajian yang dilakukan Kufner dkk hanya berlaku untuk domain fungsi berukuran hingga (Kufner dkk., 1977). Lalu penelitian yang dilakukan oleh Maligandra pada tahun 1989 dengan memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz untuk domain fungsi berukuran tak hingga (Maligandra, 1989). Kajian yang dilakukan Maligandra merupakan pengembangan hasil yang telah diperoleh Welland dan Kufner dkk dengan cara pembuktian tidak langsung. Pada tahun 2018, Masta melakukan penelitian syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz dengan cara pembuktian yang berbeda dengan Maligandra yaitu dengan pembuktian langsung. Cara pembuktian yang dilakukan Masta dipandang lebih singkat dibandingkan pembuktian yang dilakukan oleh Maligandra.

Selain mengkaji sifat inklusi pada ruang Orlicz, banyak para peneliti mengkaji tentang ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz. Pada tahun 1965 O'Neil mengkaji tentang ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz dengan memberikan syarat cukup dan perlunya (O'Neil, 1965). Kemudian pada tahun 2018 Ifronika dkk. mengembangkan hasil yang telah diperoleh oleh O'Neil dengan memberikan syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz. Ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz menjadi jalan untuk memperoleh sifat inklusi pada ruang Orlicz untuk domain fungsi berukuran hingga, hasil tersebut diperoleh Masta pada tahun 2018 (Masta, 2018). Selanjutnya dari hasil tersebut diperoleh sifat inklusi pada ruang Lebesgue untuk domain fungsi berukuran hingga.

Hal yang menarik untuk ditelusuri adalah mengkaji ruang yang lebih umum daripada ruang Orlicz. Kajian tentang perumuman ruang Orlicz pernah dilakukan oleh M.Rao dan Z.Ren pada tahun 1991 (Rao dan Ren, 1991). Metode yang dilakukan oleh Rao dan Ren adalah memodifikasi norma Luxemburg yang diperkenalkan oleh W. A. J. Luxemburg pada tahun 1955 (Luxemburg, 1955). Berdasarkan kajian tentang ruang Orlicz diperumum penulis termotivasi untuk mengkaji ruang Orlicz diperumum dengan versi yang lain. Metode kajian yang

dilakukan penulis adalah dengan modifikasi fungsi Young dengan fungsi Young diperluas yang didefinisikan oleh Dermawan pada tahun 2022 (Dermawan, 2022).

Dalam mendefinisikan fungsi Young diperluas, penulis akan mengkaji keterkaitan fungsi konveks, fungsi konveks- m dan fungsi konveks- s yang didefinisikan oleh (Dragomir, 2002) dan (Kuei Lin Tseng, 2007). Lebih jauh, penulis telah mengkaji sifat-sifat fungsi Young diperluas. Hasil tersebut dapat digunakan untuk mengkontruksi ruang Orlicz diperumum, yaitu dengan cara mengganti fungsi Young dengan fungsi Young diperluas pada ruang Orlicz. Hal tersebut memungkinkan merubah sifat-sifat asli yang terdapat pada ruang Orlicz, bisa dilihat pada (Lèonardo, 2007). Oleh karena itu, penulis mengkaji bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ruang Orlicz yang telah diganti fungsi Young menjadi fungsi Young diperluas.

Berdasarkan uraian di atas, penulis juga termotivasi untuk mengkaji keberlakuan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz diperumum dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz diperumum.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam kajian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana hubungan antara fungsi konveks, fungsi konveks- m dan fungsi konveks- s ?
2. Bagaimana mengkontruksi fungsi Young diperluas?
3. Bagaimana keterkaitan antara sifat-sifat fungsi Young diperluas dan fungsi Young?
4. Bagaimana mendefinisikan ruang Orlicz diperumum?
5. Bagaimana sifat inklusi pada ruang Orlicz diperumum?
6. Bagaimana ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz diperumum?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya berfokus pada fungsi-fungsi yang domain dan range adalah $[0, \infty)$. Setelah itu berdasarkan definisi dari fungsi Young diperluas akan dikonstruksi ruang Orlicz diperumum serta dikaji sifat inklusi dan ketaksamaan Höldernya hanya terkhusus untuk domain himpunan terukur \mathbb{R}^n .

1.4 Tujuan Penelitian

1. Mencari hubungan antara fungsi konveks, fungsi konveks- m dan fungsi konveks- s .
2. Mengkonstruksi fungsi Young diperluas.
3. Memperoleh keterkaitan antara sifat-sifat fungsi Young diperluas dan fungsi Young.
4. Mendefinisikan ruang Orlicz diperumum.
5. Memperoleh sifat inklusi pada ruang Orlicz diperumum.
6. Memperoleh ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz diperumum.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat digunakan oleh pembaca sebagai alternatif bahan rujukan dalam memperluas sekaligus memperdalam penguasaan materi ruang Orlicz, khususnya versi lain dari perumuman ruang Orlicz. Selain itu, dimanfaatkan penulis untuk bahan kajian di studi lanjutan jika penulis akan melanjutkan studi. Hasil penelitian ini juga diharapkan dapat memberikan manfaat bagi peneliti lanjutan yang mengkaji topik penelitian serupa dalam hal memberikan inspirasi untuk mengembangkan penelitian lebih lanjut tentang ruang Orlicz diperumum tipe lemah beserta kajian sifat-sifat lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

1. BAB I: PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan dalam penelitian ini.

2. BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini disajikan teori yang mendukung penelitian yang akan dibahas. Kajian Pustaka ini mengenai definisi fungsi dan beberapa kelas fungsi seperti fungsi kontinu dan fungsi monoton. Selanjutnya dibahas tentang kelas fungsi yang lain yaitu fungsi konveks, fungsi konveks- m dan fungsi konveks- s , serta dibahas pula tentang fungsi Young beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya dibahas tentang ruang Banach dan ruang Lebesgue.

3. BAB III: METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan mengumpulkan, membaca, dan mempelajari secara mendalam referensi terkait fungsi Young dan ruang Orlicz berupa artikel, jurnal, buku, dan informasi yang diperoleh dari internet. Selanjutnya mengkaji kaitan antara fungsi konveks, fungsi konveks- m dan konveks- s . Melalui hasil kajian ketiga fungsi tersebut penulis mendefinisikan fungsi Young diperluas dan akan dikaji keberlakuan sifat-sifatnya. Dengan memanfaatkan fungsi Young diperluas, penulis akan mengkaji ruang Orlicz diperumum beserta sifat inklusi dan ketaksamaan Höldernya.

4. BAB IV: RUANG ORLICZ

Pada bab ini diawali, dengan pembahasan tentang definisi ruang Orlicz dan norma Luxemburg. Selanjutnya dibuktikan bahwa norma Luxemburg merupakan norma yang terdefinisi dengan baik pada ruang Orlicz. Dan ditunjukkan bahwa ruang Orlicz merupakan ruang Banach dengan norma tersebut. Akhir dari bab ini dibahas tentang sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz.

5. BAB V: RUANG ORLICZ DIPERUMUM

Pada bab ini diawali dengan pembahasan keterkaitan antara fungsi konveks, fungsi konveks- m dan konveks- s . Selanjutnya diberikan definisi dari fungsi Young diperluas. Penulis juga memperlihatkan beberapa contoh serta keberlakuan sifat-sifat dari fungsi Young diperluas. Akhir dari bab ini dibahas tentang ruang Orlicz diperumum beserta sifat inklusi dan ketaksamaan Höldernya.

6. BAB VI: PENUTUP

Pada bab ini disampaikan mengenai simpulan dan saran. Simpulan dari penelitian ini merupakan jawaban dari rumusan masalah yang disampaikan pada bab I. Adapun saran penelitian akan disampaikan pada bab ini.