BAB III

RUANG HAUSDORFF

Pada bab ini akan dibahas mengenai ruang Hausdorff, kekompakan pada ruang Hausdorff dan ruang regular lengkap. Pembahasan diawali dengan mendefinisikan Ruang Hausdorff dan beberapa sifatnya kemudian dilanjutkan dengan kekompakkan dari ruang Hausdorff, diantaranya jika suatu ruang Hausdorff X adalah kompak, maka ruang X juga normal. Pembahasan diakhiri dengan mengkaji ruang reguler lengkap, yaitu membuktikan bahwa ruang normal adalah ruang regular lengkap.

3.1 Ruang Hausdorff

Ruang Hausdorff adalah ruang dimana setiap dua buah elemen yang berbeda dapat dipisahkan oleh dua buah persekitaran yang *disjoint*. Berikut adalah definisi dari ruang Hausdorff.

Definisi 3.1.1 Ruang Hausdorff

Diberikan ruang topologi (X,τ). Ruang X dikatakan ruang Hausdroff jika dan hanya jika untuk setiap pasangan $x,y \in X$ ada persekitaran $U,V \subset X$ sedemikian sehingga $x \in U$, $y \in V$ dan $U \cap V = \phi$.

Berikut beberapa contoh ruang topologi yang merupakan ruang Hausdorff dan ruang yang bukan ruang Hausdorff

Contoh 3.1.2

Diberikan ruang topologi (X,τ), dengan $X=\{a,b,c,d\}$ dan $\tau=2^X$. Ruang topologi X adalah ruang Hausdorff, karena untuk setiap $x,y\in X$ ada $U=\{x\},V=\{y\}\subset X$ sedemikian sehingga $x\in U$, $y\in V$ dan $U\cap V=\phi$.

Maka X adalah Ruang Hausdorff ■

Contoh 3.1.3

Diberikan ruang topologi (M,τ), dengan $M=\{a,b,c,d\}$ dan $\tau=\{\{a,b\},\{c,d\},X,\phi\}$. Ruang topologi M bukan ruang Hausdorff, karena ada $a,b\in M$ sedemikian sehingga untuk setiap persekitaran $U,V\subset X$ $a\in U,b\in V$ tetapi $U\cap V=\{a,b\}\neq\phi$

Maka X bukan Ruang Hausdorff ■

Ruang Hausdorff memiliki sifat diantaranya: setiap subruangnya adalah juga Hausdorff; hasil jumlah dan hasil kali dari anggota-anggota koleksi ruang Hausdorff yang disjoin adalah juga Hausdorff. Dibawah ini akan ditunjukkan beberapa sifat dari ruang Hausdorff

Teorema 3.1.4 Setiap subruang E dari ruang Hausdorff X adalah ruang Hausdorff.

Bukti :

Misal $a,b \in E$. Karena X ruang Hausdorff, maka ada himpunan buka U dan V di X sedemikian sehingga $a \in U$, $b \in V$ dan $U \cap V = \phi$. Misal $U^* = E \cap U$ dan $V^* = E \cap V$. Karena $E, U, V,$ himpunan buka, maka U^* dan V^* juga himpunan buka dari subruang E. Karena $a \in U^*$, $b \in V^*$ dan $U^* \cap V^* = \phi$. Dari definsi ruang Hausdorff maka E dalah Ruang Hausdorff. ■

Teorema 3.1.5 Jumlah topologi X dari sebarang *disjoint* koleksi $\{X_\mu | \mu \in M\}$ dari ruang Hausdorff adalah ruang Hausdorff.

Bukti :

Misalkan $\overline{X} = \{X_\mu | \mu \in M\}$ dan $a,b \in X$, $a \neq b$ sembarang. Dari definisi jumlah topologi X maka ada $z, v \in M$ sedemikian sehingga $a \in X_z$ dan $b \in X_v$, dimana $X_z, X_v \in \overline{X}$. Terdapat dua kasus

Kasus 1 : $z \neq v$,

Ambil $U = X_z$ dan $V = X_v$, Karena $X_z, X_v \in \overline{X}$ maka $X_z \cap X_v = \phi$.

Kasus 2 : $z = v$

Ini berarti $a,b \in X_z$ dengan $a \neq b$. Karena X_z ruang Hausdorff maka terdapat himpunan buka U dan V di X_z sedemikian sehingga $a \in U$ dan $b \in V$ dan $U \cap V = \phi$.

Dari kedua kasus diatas dapat disimpulkan bahwa X adalah Ruang Hausdorff. ■

Teorema 3.1.6

Hasil kali topologi X dari sebarang koleksi $\{X_\mu | \mu \in M\}$ dari ruang Hausdorff adalah ruang Hausdorff.

Bukti :

Misal a, b sebarang dua titik yang berbeda di X. Dari hasil kali Cartesian (2.2.1), $a \neq b$ mengakibatkan keberadaan dari $v \in M$ sedemikian sehingga $a(v)$ dan $b(v)$ adalah dua elemen yang berbeda di X_v. Karena X_v adalah ruang Hausdorff, maka ada himpunan buka U dan V di X_v sedemikian sehingga $a(v) \in U$ dan $b(v) \in V$ dan $U \cap V = \phi$. Misal U^* dan V^* dinotasikan sebagai subbasis himpunan buka di X yang didefinisikan oleh

$$U^* = \{x \in X | x(v) \in U\}$$

$$V^* = \{x \in X | x(v) \in V\}$$

Karena $a(v) \in U, b(v) \in V$ maka $a \in U^*$, $b \in V^*$ dan $U^* \cap V^* = \phi$. Akibatnya X adalah Ruang Hausdorff ■

3.2 Kekompakan pada ruang Hausdorff

Pada pasal ini akan dibahas sifat kekompakan pada ruang Hausdorff. Sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu suatu ruang dikatakan kompak dan beberapa sifat yang dipenuhi oleh sebuah ruang yang kompak.

Pada teorema 3.2.3 dibahas sifat suatu himpunan kompak pada suatu ruang Hausdorff. Sifat ini penting untuk menunjukkan bahwa ruang Hausdorff yang kompak adalah ruang normal

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa hasil kali topologi X dari ruang Hausdorff yang kompak adalah juga kompak. Untuk membuktikannya diperlukan teorema Tychonoff dan teorema Heine Borel.

Berikut pembahasan di mulai dengan definisi ruang yang kompak.

Definisi 3.2.1

Sebuah ruang X dikatakan ruang yang kompak jika dan hanya jika setiap *cover* buka dari X mempunyai sebuah sub*cover* hingga.

Teorema 3.2.2

Setiap himpunan tutup K di dalam sebuah ruang X yang kompak adalah kompak.

Bukti:

Diberikan C adalah *cover* dari K oleh himpunan-himpunan buka dari X. Karena K tutup, maka komplemen $X \setminus K$ adalah buka. Anggota-anggota dari C dengan himpunan buka $X \setminus K$ membentuk sebuah *cover* buka dari X. Karena X adalah kompak, cover buka dari X mengandung sebuah subcover hingga dari X. Dengan kata lain, ada sebuah bilangan batas dari himpunan-himpunan buka $U_1, U_2, ..., U_n$ di dalam C sedemikian sehingga $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n \cup X \setminus K = X$.

Akibatnya $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ adalah cover dari K. Karena C memiliki subcover hingga maka K kompak. ■

Teorema 3.2.3

Jika K adalah sebuah himpunan yang kompak di dalam sebuah ruang Hausdorff X dan p adalah sebuah titik di dalam $X \setminus K$, maka ada himpunan-himpunan buka U dan V yang saling lepas dari X sedemikian sehingga $K \subset U$ dan $p \in V$.

Bukti:

Ambil $a \in K$ sembarang $K \subset X$, dan diketahui $p \in X \setminus K$. Karena X ruang Hausdorff maka ada himpunan-himpunan buka U_a dan V_a dari X sedemikian sehingga $a \in U_a$ dan $p \in V_a$. Misal $F = \{U_a | a \in K\}$ dengan U_a himpunan buka dari X, maka F adalah sebuah cover dari K. Karena K kompak, maka F memiliki sebuah subcover hingga dari K, yaitu ada berhingga titik $a_1, a_1, ..., a_n$ dari K sedemikian sehingga K terkandung di dalam U yaitu

$U = U_{n_1} \cup ... \cup U_{n_n}$.

Di lain pihak, misalkan

$V = V_{n_1} \cap ... \cap V_{n_n}$.

Diperoleh U dan V adalah himpunan-himpunan buka dari X, sedemikian sehingga $K \subset U$, $p \in V$, dan $U \cap V = \phi$. Terbukti teorema diatas ■

Akibat 3.2.4

Setiap himpunan K yang kompak pada ruang Hausdorff X adalah tutup.

Bukti:

Untuk setiap $p \in X \setminus K$, berdasarkan teorema 3.2.3 terdapat himpunan-himpunan buka U dan V yang saling lepas dari X sedemikian sehingga $K \subset U$ dan $p \in V$. Selanjutnya diperoleh $V \subset X \setminus U \subset X \setminus K$. Karena untuk setiap $p \in X \setminus K$, ada persekitaran V sedemikian sehingga $p \in V \subset X \setminus K$. Dengan demikian, $X \setminus K$ buka dan K tutup. ■

Akan ditunjukkan bahwa ruang Hausdorff yang kompak adalah ruang normal, sebelumnya berikut ini adalah definisi dari ruang normal.

Definisi 3.2.5

Ruang normal X adalah ruang yang untuk setiap himpunan tutup A, B yang *disjoint* terdapat himpunan buka F, G sedemikian sehingga $A \subset F$, $B \subset G$ dan $G \cap F = \phi$.

Teorema 3.2.6

Setiap ruang Hausdorff yang kompak adalah normal.

Bukti:

Diberikan A dan B sebarang dua himpunan-himpunan tutup yang *disjoint* pada ruang Hausdorff X yang kompak. Berdasarkan teorema 3.2.2, maka A dan B adalah himpunan kompak. Selanjutnya berdasarkan 3.2.3 untuk setiap $b \in B$

terdapat dua himpunan buka yang saling lepas U_b dan V_b dari X sedemikian sehingga $A \subset U_b$ dan $b \in V_b$. Misalkan $F = \{V_b | b \in B\}$ adalah koleksi dari himpunan-himpunan buka dari X, maka F adalah cover dari B. Karena B kompak, maka F mempunyai sebuah subcover hingga dari B. Dengan kata lain, ada elemen $b_1, b_2, ..., b_n$ dari B sedemikian sehingga B termuat di dalam V dimana $V = V_{b_1} \cup ... \cup V_{b_n}$.

Di lain pihak, misalkan $U = U_{b_1} \cap ... \cap U_{b_n}$, maka U dan V adalah himpunan-himpunan buka dari X, sedemikian sehingga $A \subset U$, $B \subset V$ dan $U \cap V = \phi$. Dengan demikian, X adalah normal. ■

Berikut akan ditunjukkan bahwa jika X adalah ruang Hausdorff yang kompak maka hasil kali X juga ruang Hausdorff yang kompak. Namun terlebih dahulu akan dibuktikan hasil kali Topologi dari keluarga ruang yang kompak adalah kompak.

Definisi 3.2.7 Keluarga himpunan F dikatakan memiliki *finite intersection property* jika dan hanya jika irisan berhingga subkeluarga dari F adalah tidak kosong

Teorema 3.2.8

Ruang X kompak jika dan hanya jika setiap keluarga dari himpunan tutup di X yang memiliki *finite intersection property* memiliki irisan yang tidak kosong

Bukti:

($\Rightarrow$)Misal $\mathscr{F}$ sebarang keluarga himpunan tutup di ruang kompak X. Asumsikan irisan dari seluruh anggota $\mathscr{F}$ adalah kosong. Akan ditunjukkan bahwa $\mathscr{F}$ tidak memiliki *finite intersection property.*

Misal $G=\{X\setminus A \mid A\in\mathscr{F}\}$. Karena irisan dari elemen $\mathscr{F}$ adalah kosong, berdasarkan dalil De Morgan (Teorema 2.1.7), maka G adalah cover buka pada ruang X. Karena X kompak, maka G memiliki subcover hingga. Dengan kata lain terdapat himpunan $A_1, A_2, ..., A_n$ di $\mathscr{F}$ sedemikian sehingga $\{X\setminus A_1, X\setminus A_2, ..., X\setminus A_n\}$ adalah cover di X. Berdasarkan dalil De Morgan maka $A_1\cap A_2\cap...\cap A_n=\phi$. Artinya $\mathscr{F}$ tidak memiliki *finite intersection property.*

($\Leftarrow$) Misal B sebarang cover buka dari X dan $F=\{X\setminus U \mid U\in B\}$ adalah keluarga himpunan tutup dari X. Karena B cover dari X, maka berdasarkan dalil De Morgan diperoleh bahwa irisan dari seluruh anggota $\mathscr{F}$ adalah kosong. Ini berarti $\mathscr{F}$ tidak memiliki *finite intersection property* . Dengan kata lain ada himpunan buka $U_1, U_2, ..., U_n$ di B sedemikian sehingga $(X\setminus U_1)\cap(X\setminus U_2)\cap...\cap(X\setminus U_n)=\phi$. Berdasarkan dalil De Morgan diperoleh $(U_1)\cup(U_2)\cup...\cup(U_n)=X$. Dengan kata lain B memiliki subcover hingga di X, selanjutnya terbukti bahwa X kompak ■

Teorema 3.2.9 Teorema Tychonoff

Hasil Kali Topologi dari keluarga ruang kompak adalah kompak.

Bukti :

Misal $\mathscr{F} = \{X_\mu \mid \mu \in M\}$ adalah sebuah keluarga dari ruang kompak dan misalkan X merupakan hasil kali topologi dari keluarga $\mathscr{F}$. Akan dibuktikan kekompakan dari X, dengan membuktikan jika $\mathscr{B}$ adalah sebuah keluarga dari himpunan-himpunan bagian dari X yang memiliki *finite intersection property*, maka $\bigcap\{Cl(B) \mid B \in \mathscr{B}\} \neq \phi$ (Teorema 3.2.7).

Misal $\mathscr{C}$ kelas dari semua keluarga dari himpunan-himpunan bagian dari X yang mempunyai *finite intersection property*, maka berdasarkan definisi 2.1.9 kelas $\mathscr{C}$ ini adalah *finite character*. Berdasarkan Lemma Tukey (Lemma 2.1.10) ada sebuah anggota maksimal dari $\mathscr{C}$ yang memuat keluarga $\mathscr{B}$ yang diberikan. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa $\mathscr{B}$ itu sendiri adalah anggota maksimal dari kelas $\mathscr{C}$.

Dari kemaksimalan $\mathscr{B}$, itu berarti bahwa irisan dari anggota-anggota setiap keluarga-keluarga bagian hingga dari $\mathscr{B}$ adalah anggota $\mathscr{B}$. Selain itu, jika sebuah himpunan bagian E dari X beririsan dengan setiap anggota dari $\mathscr{B}$, maka E juga merupakan anggota dari $\mathscr{B}$.

Sekarang, diberikan $\mu \in M$ dan proyeksi

$p_\mu : X \to X_\mu$,

misalkan keluarga $\mathscr{B}_\mu = \{p_\mu(B) \mid B \in \mathscr{B}\}$ adalah himpunan bagian dari X_μ, maka $\mathscr{B}_\mu$ memiliki *finite intersection property*. Karena X_μ kompak, maka berdasarkan teorema 3.2.7, $H_\mu = \bigcap\{Cl[p_\mu(B)] \mid B \in \mathscr{B}\} \neq \phi$.

Pilih sebuah elemen $x_\mu \in H_\mu$ untuk setiap $\mu \in M$.

Misalkan x adalah elemen dari hasil kali topologi X yang koordinat ke-μ-nya $x(\mu)$ adalah $x_\mu \in X_\mu$.

Akan dibuktikan bahwa $x \in Cl(B)$ untuk setiap $B \in \mathscr{B}$.

Untuk tujuan ini, anggap sebarang subbasic himpunan buka U_μ^* dari X yang memuat titik x, dengan $\mu \in M$ dan U_μ adalah sebuah himpunan buka dari X_μ memuat titik x_μ. Karena $x_\mu \in Cl\left[p_\mu(B)\right]$ untuk setiap $B \in \mathscr{B}$, ini berarti bahwa U_μ beririsan $p_\mu(B)$ untuk setiap $B \in \mathscr{B}$. Dengan demikian, himpunan $U_\mu^* = p_\mu^{-1}(U_\mu)$ beririsan setiap anggota B dari $\mathscr{B}$. Dari kemaksimalan $\mathscr{B}$ bahwa U_μ^* termasuk $\mathscr{B}$, dan irisan dari sebarang berhingga subbasic himpunan buka yang memuat x adalah anggota dari $\mathscr{B}$. Akibatnya setiap persekitaran dari x di X beririsan dengan setiap anggota $B \in \mathscr{B}$. Konsekuensinya, $x \in Cl(B)$ untuk setiap persekitaran dari x di X beririsan dengan B, untuk setiap $B \in \mathscr{B}$. Dengan kata lain $x \in Cls(B), B \in \mathscr{B}$. Akibatnya $\bigcap\{Cl(B) | B \in \mathscr{B}\} \neq \phi$. Berdasarkan teorema 3.2.7 diperoleh hasil kali topologi dari keluarga dari ruang yang kompak adalah kompak.■

Teorema 3.2.10 Teorema Heine Borel

Misalkan K himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. K adalah kompak jika dan hanya jika K tutup dan terbatas

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Akan ditunjukkan K tutup dan terbatas

Misalkan K kompak, artinya untuk setiap cover buka $\mathscr{C}$ dari K, maka ada sub cover hingga $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ sedemikian sehingga $\mathscr{D}$ cover dari K.

Misal $H_m := (-m, m)$ untuk $m \in \mathbb{N}$, maka H_m buka dan $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R}$. Dengan kata lain $\mathcal{Q} = \{H_m | m \in \mathbb{N}\}$ adalah cover buka dari K. Karena K kompak maka $\mathcal{Q}$ memiliki berhingga subkoleksi sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} H_m = H_M = (-M, M)$ untuk suatu $M \in \mathbb{N}$. Ini berarti K terbatas

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa K tutup dengan menunjukkan $\mathbb{R} \setminus K$ buka. Misalkan $u \in \mathbb{R} \setminus K$, dan didefinisikan himpunan $G_n := \left\{ y \in \mathbb{R} : |y - u| > \frac{1}{n} \right\}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Diperoleh G_n tidak memuat u untuk $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya G_n dapat dibuat menjadi bentuk $G_n = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y > u - \frac{1}{n} \cup y < u + \frac{1}{n} \right\}$, dengan $G_{n_1} = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y > u - \frac{1}{n} \right\}$, $G_{n_2} = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y < u + \frac{1}{n} \right\}$ dan $G_n = G_{n_1} \cup G_{n_2}$. Akan dibuktikan G_n buka dengan membuktikan G_{n_1}, G_{n_2} buka.

1) Untuk $G_{n_1} = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y > u - \frac{1}{n} \right\}$.

   Ambil sebarang $a \in G_{n_1}$, misal $\partial = \dfrac{a - \left(u - \frac{1}{n} \right)}{2}$, maka $(a - \partial, a + \partial)$ adalah persekitaran yang memuat a. Karena $a - \partial > u - \frac{1}{n}$, maka $(a - \partial, a + \partial) \subset G_{n_1}$. Akibatnya $(a - \partial, a + \partial)$ adalah persekitaran dari a.

   Karena untuk sebarang $a \in G_{n_1}$ ada persekitaran $(a - \partial, a + \partial)$ sedemikian sehingga $(a - \partial, a + \partial) \subset G_{n_1}$, maka G_{n_1} buka.

2) Untuk $G_{n_2} = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y < u + \frac{1}{n} \right\}$.

Ambil sebarang $b \in G_{n_2}$, misal $\partial = \dfrac{b - \left(u - \frac{1}{n}\right)}{2}$, maka $(b-\partial, b+\partial)$ adalah persekitaran yang memuat b. Karena $b + \partial < u + \frac{1}{n}$, maka $(b-\partial, b+\partial) \subset G_{n_2}$. Akibatnya $(b-\partial, b+\partial)$ adalah persekitaran dari b.

Karena untuk sebarang $b \in G_{n_2}$ ada persekitaran $(b-\partial, b+\partial)$ sedemikian sehingga $(b-\partial, b+\partial) \subset G_{n_2}$, maka G_{n_2} buka.

Dari 1) dan 2) diperoleh kesimpulan bahwa G_n buka untuk $n \in \mathbb{N}$.

Klaim $\mathbb{R} \setminus \{u\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Karena $u \notin K$ maka $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Selanjutnya karena K kompak akibatnya ada $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m$.

Dari definisi G_n diperoleh bahwa $K \cap \left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right) = \phi$ dan interval $\left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$.

Karena untuk $u \in \mathbb{R} \setminus K$ ada persekitaran $\left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right)$ sedemikian sehingga $\left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$, maka $\mathbb{R} \setminus K$ buka akibatnya K tutup

Terbukti bahwa K terbatas dan tutup.

$(\Leftarrow)$ Akan ditunjukkan bahwa K kompak

Misalkan K tutup dan terbatas dan $G=\{g_a\}$ cover buka dari K.

Akan dibuktikan dengan kontradiksi dengan mengandaikan bahwa K tidak kompak. Artinya untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ maka $K \not\subset \bigcup_{a=1}^{m} g_a$.

Dari pemisalan K terbatas maka ada $r>0$ sedemikian sehingga $K \subseteq [-r,r]$. Misal $I_1 := [-r,r]$, I_1 dibagi menjadi dua sub-interval tutup $I_1' := [-r,0]$ dan $I_1'' := [0,r]$, maka $K \cap I_1' \neq \phi$ atau $K \cap I_1'' \neq \phi$.

Jika $K \cap I_1' \neq \phi$, maka ada $z_1 \in K \cap I_1' \subset I_1$. Karena $K \cap I_1' \not\subset \bigcup_{a=1}^{m} g_a, m \in \mathbb{N}$ maka ambil $I_2 := I_1'$ kemudian I_2 dibagi menjadi dua subinterval tutup I_2' dan I_2''. Jika $K \cap I_2'$ tidak kosong maka ada $z_2 \in K \cap I_2' \subset I_2$. Karena $K \cap I_2' \not\subset \bigcup_{a=1}^{m} g_a$, $m \in \mathbb{N}$ maka ambil $I_3 := I_2''$. Dengan melanjutkan sampai n kali akan diperoleh barisan interval tutup bersarang (I_n). Berdasarkan *Nested Interval Property* (Teorema2.1.8) diperoleh, ada titik z sedemikian sehingga $z \in I_n, n \in \mathbb{N}$. Karena untuk setiap interval I_n ada z_n sedemikian sehingga $z_n \in I_n$ dimana $z_n \neq z$ maka z adalah titik akumulasi dari K. Karena K tutup dari teorema 2.2.15 diperoleh $z \in K$, oleh karena itu ada himpunan g_λ di G dengan $z \in g_\lambda$. Karena g_λ buka, ada $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq g_\lambda$. Dilain pihak karena interval I_n diperoleh dengan membagi dua $I_1 := [-r,r]$ secara berulang-ulang diperoleh panjang dari interval I_n adalah $\frac{r}{2^{n-2}}$, untuk n yang cukup besar, $\frac{r}{2^{n-2}} < \varepsilon$ maka

$I_n \subseteq (z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq g_\lambda$. Artinya jika n cukup besar sedemikian sehingga $\frac{r}{2^{n-2}} < \varepsilon$, maka $K \cap I_n$ termuat di satu himpunan g_λ di G. Kontradiksi dengan pengandaian, maka haruslah K termuat di berhingga gabungan himpunan di G. Dengan kata lain K haruslah kompak ■

Akibat 3.2.11

Setiap hasil kali topologi I^M dari unit interval tutup $I = [0,1]$ adalah ruang Hausdorff yang kompak

Bukti :

Dari Teorema Heine-Borel (Teorema 3.2.10) diperoleh bahwa I kompak, Dari Teorema Tychonoff (Teorema 3.2.9) jika I kompak maka I^M kompak dan dari teorema 3.1.4 diperoleh I ruang Hausdorff. Dari teorema 3.1.6 jika I ruang Hausdorff maka I^M ruang Hausdorff. Artinya hasil kali topologi I^M adalah ruang Hausdorff yang kompak ■

3.3 Ruang Reguler Lengkap

Pada pasal ini akan dibuktikan bahwa ruang normal adalah ruang reguler.

Definisi 3.3.1 Ruang X dikatakan regular lengkap di titik p dari X jika dan hanya jika, untuk setiap lingkugan N dari p di X, ada fungsi kontinu

$$\chi : X \to I$$

Sedemikian sehingga $\chi(p) = 0$ dan $\chi(X \setminus N) = 1$.

Ruang X dikatakan ruang regular jika dan hanya jika regular lengkap di setiap $p \in X$.

Berikut akan dibuktikan Lemma Urysohn yaitu jika X normal maka X adalah reguler lengkap, namun akan dibuktikan beberapa teorema yang akan digunakan pada pembuktian Lemma Urysohn

Teorema 3.3.2

Ruang X normal jika dan hanya jika untuk setiap himpunan tutup F dan himpunan buka H yang memuat F ada himpunan buka G sedemikian sehingga $F \subset G \subset Cls(G) \subset H$

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Misal X normal dan $F \subset H$, dengan F tutup dan H buka. Maka $X \setminus H$ tutup, dan $F \cap X \setminus K = \phi$. Karena X normal maka ada himpunan buka G, G^* sedemikian sehingga $F \subset G, X \setminus H \subset G^*$ dan $G \cap G^* = \phi$. .....(1)

$G \cap G^* = \phi$ maka $G \subset X \setminus G^*$. Dari definisi *closure* diperoleh $G \subset Cls(G) \subset X \setminus G^*$ ...(2)

$X \setminus H \subset G^*$ maka $X \setminus G^* \subset H$ ......(3)

dari (1), (2) dan (3) diperoleh

$$F \subset G \subset Cls(G) \subset X \setminus G^* \subset H \text{ maka } F \subset G \subset Cls(G) \subset H$$

Terbukti Jika X ruang normal maka untuk setiap himpunan tutup F dan himpunan buka H yang memuat F ada himpunan buka G sedemikian sehingga $F \subset G \subset Cls(G) \subset H$.

$(\Leftarrow)$ Misal untuk setiap himpunan tutup F dan himpunan buka H yang memuat F ada himpunan buka G sedemikian sehingga $F \subset G \subset Cls(G) \subset H$. Misal F_1, F_2 himpunan tutup yang *disjoint*, maka $F_1 \subset X \setminus F_2$ dengan $X \setminus F_2$ buka. Dari pemisalan ada himpunan buka G sedemikian sehingga $F_1 \subset G \subset Cls(G) \subset X \setminus F_2$.

$Cls(G) \subset X \setminus F_2$, maka $F_2 \subset X \setminus Cls(G)$ dan $G \subset Cls(G)$, maka $G \cap X \setminus Cls(G) = \phi$, dengan $X \setminus Cls(G)$ buka.

Diperoleh untuk setiap himpunan tutup F_1, F_2 yang *disjoint* ada himpunan buka G dan $X \setminus Cls(G)$ sedemikian sehingga $G \cap X \setminus Cls(G) = \phi$, akibatnya X normal ■

Teorema 3.3.3

Jika D himpunan bilangan *dyadic* pada unit interval $[0,1]$ yaitu

$D = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{15}{16}, \ldots, 1\right\}$, maka D padat di $[0,1]$

Bukti:

Akan dibuktikan D padat di $[0,1]$ dengan menunjukkan setiap interval buka $(a-\partial, a+\partial)$ dengan pusat di sebarang $a \in [0,1]$ memuat elemen D. Perhatikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, maka ada $q=2^{n_0}$ sedemikian sehingga $0<\frac{1}{q}<\partial$. Kemudian perhatikan interval $\left[0,\frac{1}{q}\right],\left[\frac{1}{q},\frac{2}{q}\right],\left[\frac{2}{q},\frac{3}{q}\right],\ldots,\left[\frac{q-2}{q},\frac{q-1}{q}\right],\left[\frac{q-1}{q},1\right]$, maka $[0,1]=\bigcup_{k=0}^{q-1}\left[\frac{k}{q},\frac{k+1}{q}\right]$. Karena $a\in[0,1]$, a termuat disalah satu interval $\left[\frac{k}{q},\frac{k+1}{q}\right]$, misal $a\in\left[\frac{m}{q},\frac{m+1}{q}\right]$ yaitu $\frac{m}{q}\le a\le\frac{m+1}{q}$, artinya $a=\frac{m+h}{q}, 0\le h\le 1$, dilain pihak $\frac{1}{q}<\partial=\frac{1+l}{q}, 0<l,\ l\in\mathbb{R}$ akibatnya $(m+h)-(1+l)=(m+h-1)-l<m$. Dengan kata lain $a-\partial<\frac{m}{q}$ dan $\frac{m}{q}\le a<a+\partial$. Diperoleh $a-\partial<\frac{m}{q}<a+\partial$, dengan $\frac{m}{q}\in D$. Diperoleh kesimpulan, sebarang interval buka $(a-\partial,a+\partial)$ memuat elemen D yaitu $\frac{m}{q}$, maka D padat di $[0,1]$ ■

Lemma 3.3.4 Lemma Urysohn

Jika A dan B dua buah himpunan tutup yang *disjoint* pada ruang normal X, maka ada fungsi kontinu

$\chi : X \to I$

sedemikian sehingga $\chi(A)=0$ dan $\chi(B)=1$

Bukti :

Dari hipotesis bahwa $A\cap B=\phi$, maka $A\subset X\setminus B$. Karena B tutup maka $X\setminus B$ buka dan $X\setminus B$ memuat A dimana A tutup. Dari teorema 3.3.2

dijamin keberadaan $U_{\frac{1}{2}}$ sedemikian sehingga $A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset Cls\left(U_{\frac{1}{2}}\right) \subset X \setminus B$.

Karena $U_{\frac{1}{2}}$ buka dan $Cls\left(U_{\frac{1}{2}}\right)$ tutup, maka ada $U_{\frac{1}{4}}$, $U_{\frac{3}{4}}$ sedemikian sehingga $A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset Cls\left(U_{\frac{1}{4}}\right) \subset U_{\frac{1}{2}} \subset Cls\left(U_{\frac{1}{2}}\right) \subset U_{\frac{3}{4}} \subset Cls\left(U_{\frac{3}{4}}\right) \subset X \setminus B$. Dengan melanjutkannya, diperoleh himpunan keluarga $F = \{U_t \,|\, t \in D\}$ yang memiliki sifat jika $t_1, t_2 \in D$ dan $t_1 < t_2$ maka $Cls\left(U_{t_1}\right) \subset U_{t_2}$

Didefinisikan fungsi $\chi : X \to I$ yaitu :

$$\chi(x) = \begin{cases} \inf\{t : x \in U_t\} & \textit{untuk}\; x \notin B \\ 1 & \textit{untuk}\; x \in B \end{cases}$$

Karena $A \subset U_t, t \in D$ maka $\chi(A) = 0$. Dari definisi χ diperoleh $\chi(B) = 1$. Selanjutnya akan dibuktikan χ kontinu. Dari teorema 2.3.3 χ kontinu jika invers dari himpunan subbasic $[0,a)$ dan $(b,1]$ adalah himpunan buka di X.

Akan dibuktikan $\chi^{-1}\left[[0,a)\right] = \bigcup\{U_t : t < a\}$

i). Misal $x \in \chi^{-1}\left[[0,a)\right]$, maka $\chi(x) \in [0,a)$ yaitu $0 \le \chi(x) < a$. Karena D padat di $[0,1]$, maka ada $t_x \in D$ sedemikian sehingga $\chi(x) < t_x < a$. Dengan kata lain $\chi(x) = \inf\{t : x \in U_t\} < t_x < a$. Karena $x \in U_{t_x}$ dimana $t_x < a$, maka $x \in \bigcup\{U_t : t < a\}$. Karena x sebarang maka $\chi^{-1}\left[[0,a)\right] \subset \bigcup\{U_t : t < a\}$.

ii). Misal $y \in \bigcup\{U_t : t < a\}$, maka ada $t_y \in D$ sedemikian sehingga $t_y < a$ dan $y \in U_{t_y}$, oleh karena itu $\chi(y) = \inf\{t : y \in U_t\} < t_y < a$. Akibatnya $y \in \chi^{-1}[[0,a)]$. Dengan kata lain $\chi^{-1}[[0,a)] \supset \bigcup\{U_t : t < a\}$

Dari i) dan ii) diperoleh $\chi^{-1}[[0,a)] = \bigcup\{U_t : t < a\}$. Karena U_t buka untuk $t < a$ maka $\chi^{-1}[[0,a)] = \bigcup\{U_t : t < a\}$

Akan dibuktikan $\chi^{-1}[(b,1]] = \bigcup\{X \setminus Cls(U_t) : t > b\}$

iii) Misal $x \in \chi^{-1}[(b,1]]$, maka $\chi(x) \in (b,1]$ yaitu $b < \chi(x) \leq 1$. Karena D padat di $[0,1]$, maka ada $t_1, t_2 \in D$ sedemikian sehingga $b < t_1 < t_2 < \chi(x)$. Dengan kata lain $\chi(x) = \inf\{t : x \in U_t\} > t_2$. Jadi $x \notin G_{t_2}$. Perhatikan jika $t_1 < t_2$ maka $Cls(G_{t_1}) \subset G_{t_2}$. Karena $x \notin G_{t_2}$ maka $x \notin Cls(G_{t_1})$ artinya $x \in X \setminus Cls(G_{t_1})$ dimana $t_1 > b$. Akibatnya $x \in \bigcup\{X \setminus Cls(U_t) : t > b\}$. Karena x sebarang, $\chi^{-1}[(b,1]] \subset \bigcup\{X \setminus Cls(U_t) : t > b\}$

iv). Misal $y \in \bigcup\{X \setminus Cls(U_t) : t > b\}$, maka ada $t_y \in D$ sedemikian sehingga $t_y > b$ dan $y \in X \setminus Cls(U_{t_y})$ atau $y \notin U_{t_y}$. Dilain pihak untuk $t < t_y$ mengakibatkan $U_t \subset U_{t_y} \subset Cls(U_{t_y})$ maka $y \notin U_t$ untuk $t < t_y$. Oleh karena itu $\chi(y) = \inf\{t : y \in U_t\} \geq t_y > b$, mengakibatkan $y \in \chi^{-1}((b,1])$. Karena y sebarang maka $\chi^{-1}[(b,1]] \supset \bigcup\{X \setminus Cls(U_t) : t > b\}$

dari iii) dan iv) diperoleh kesimpulan $\chi^{-1}\left[(b,1]\right]=\bigcup\left\{X\setminus Cls(U_t):t>b\right\}$. Karena $X\setminus Cls(U_t)$ buka untuk $t>b$, maka $\chi^{-1}\left[(b,1]\right]=\bigcup\left\{X\setminus Cls(U_t):t>b\right\}$ buka

Karena gabungan dari setiap himpunan buka adalah buka, maka $\chi^{-1}\left[(b,1]\right]=\bigcup\left\{X\setminus Cls(U_t):t>b\right\}$ gabung $\chi^{-1}\left[[0,a)\right]=\bigcup\left\{U_t:t<a\right\}$ adalah buka. Dari teorema (2.3.3) diperoleh χ kontinu.

Terbukti jika A dan B dua buah himpunan tutup yang *disjoint* pada ruang normal X, maka ada fungsi kontinu

$\chi : X \to I$

Sedemikian sehingga $\chi(A)=0$ dan $\chi(B)=1$ ■