

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kajian tentang konsep fungsi, limit, turunan, kontinuitas, dan integral telah dikenal luas sebagai konsep matematika tingkat tinggi yang membutuhkan pemahaman yang komprehensif (Bezuidenhout, 2001; Vinner, 1987; Cornu, 1991; Aspinwall, 1997; Duru, 2010). Konsep fungsi digunakan untuk merepresentasikan bagaimana sesuatu berubah dalam hubungannya satu sama lain, sementara konsep turunan terkait dengan seberapa cepat perubahannya, dan konsep integral menyangkut bagaimana sesuatu tersebut terakumulasi (Tall, 1996). Secara umum, pembahasan tentang konsep-konsep matematika seperti yang telah disebutkan, termasuk ke dalam domain kalkulus yang mempelajari tentang perubahan sebagaimana geometri yang mempelajari bentuk ataupun aljabar yang mempelajari operasi dan penerapannya untuk menyelesaikan masalah pada berbagai macam persamaan (Lattore, 2007).

Kalkulus merupakan salah satu pencapaian terbesar dan terpenting dari kecerdasan manusia. Kekuatan dan fleksibilitasnya ditunjukkan dengan reduksi masalah yang rumit menjadi aturan dan prosedur yang lebih sederhana dalam keragaman bidang pengetahuan seperti: matematika, fisika, teknik, ilmu sosial dan biologi, antara lain (Hughes-Hallett et al, 1994; Barry & Nyman, 2003; Kleiner, 2001; Fuentealba, 2019). Konsep dasar kalkulus seperti fungsi, limit, turunan dan integral diajarkan di tingkat sekolah menengah dan konsep fundamental kalkulus secara umum diajarkan di tingkat universitas. Terdapat empat kategori studi yang berkaitan dengan pengajaran dan pembelajaran konsep-konsep esensial yang dikaji dalam bidang kalkulus. Kategori pertama berisi kajian tentang konsep limit dan konsep tak hingga (Bezuidenhout, 2001; Dubinsky, Weller, McDonald, & Brown, 2005a, 2005b; Sierpinska, 1987). Kategori kedua menyangkut studi tentang konsep

turunan (Likwambe & Christiansen, 2008; Ndlovu, Wessels, De Villiers, 2011; Orton, 1983a; Zandieh, 2000). Kategori ketiga berkaitan dengan studi tentang konsep integral. Kategori ini dapat dibagi lagi menjadi tiga subkategori, yaitu studi tentang konsep integral tertentu (Burn, 1999; Delice & Sevimli 2010; Nguyen & Rebero, 2011; Orton, 1983b; Rasslan & Tall, 2002; Rosken & Rolka, 2007; Sevimli & Delice, 2011) dan studi tentang konsep integral tak tentu (Koepf & Ben-Israel, 1994), serta studi tentang Teorema Dasar Kalkulus (Thompson, 1994). Kategori keempat terdiri dari studi yang berhubungan dengan seluruh konsep penting kalkulus (Artigue, 1991, 1996; Carlson, Oehrtman & Engelke, 2010; Ferrini-Mundy & Gaudard, 1992; Lam, 2009; Naidoo & Naidoo, 2007; Tinggi, 1992, 1996). Namun, batas-batas kategori di atas tidak terlihat secara jelas karena studi konsep yang diberikan dapat menyentuh konsep lain demi koherensi di antara konsep kalkulus. Selain itu, mengingat bahwa gagasan fungsi mendasari hampir di semua konsep kalkulus, penting untuk disebutkan kategori yang secara khusus membahas tentang konsep fungsi (Aspinwal, Shaw, & Presmeg, 1997; Breidenbach, Dubinsky, Hawks, Nichols, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989).

Realita yang terjadi dalam praktik pengajaran menunjukkan bahwa kalkulus masih cukup sulit untuk dipahami oleh sebagian besar peserta didik dan juga pendidik. Salah satu masalah penting yang masih perlu mendapat perhatian adalah bagaimana peserta didik dan pendidik dapat memahami konsep-konsep dasar kalkulus (Ferrini-Mundy & Graham, 1991; 1994; Orton, 1983; Tall & Vinner, 1981; Zandieh & Knapp, 2006; White & Mithcelmore, 1996). Moru (2006) menjelaskan bahwa terdapat pokok-pokok permasalahan dalam memahami konsep dasar kalkulus oleh di level sekolah maupun di perguruan tinggi yang juga ditunjukkan oleh badan penelitian yang dilakukan di berbagai negara, misalnya Inggris (Tall & Schwarzenberger, 1978), Amerika Serikat (Davis & Vinner, 1986; Aspinwall & Miller, 2001), Polandia (Sierpinska, 1987), Swedia (Juter, 2005), dan Afrika Selatan (Bezuidenhout, 2001; Kannemeyer, 2003). Senada dengan hasil penelitian Orton (1983) yang menunjukkan bahwa peserta didik berhasil

mengerjakan soal turunan dan integral yang bersifat rutin, namun mengalami kesulitan dalam pemahaman konseptual. Demikian pula, Selden, Selden, Hauk, dan Mason (1999) melaporkan bahwa dalam pengajaran kalkulus, sebagian besar peserta didik tidak dapat mencapai tingkat pemahaman konseptual dan kemampuan memecahkan masalah yang bersifat non-rutin. Tall (1992) juga menyebutkan tentang serangkaian hambatan yang dihadapi oleh peserta didik dalam pemahaman konseptual konsep kalkulus, diantaranya yaitu: 1) kesulitan dengan proses limit dan tak hingga, 2) kesulitan dengan notasi Leibniz; 3) pemahaman yang lemah tentang konsep fungsi; 4) kesulitan dalam menerjemahkan masalah dunia nyata ke dalam kalkulus formal; 5) kesulitan dalam memilih dan menggunakan representasi sesuai; 6) manipulasi aljabar; 7) dan kecenderungan peserta didik terhadap pemahaman prosedural daripada pemahaman konseptual. Hambatan tersebut diakibatkan karena kecenderungan pendekatan simbolik yang berorientasi pada aturan baku sehingga tidak mendorong pemahaman konseptual peserta didik tentang kalkulus (Bezuidenhout, 1998; Orton, 1983). Selain itu, hambatan yang terjadi juga diakibatkan karena kesenjangan konsep yang telampau jauh dari konsep sebelumnya seperti; fungsi dan terutama kurangnya pandangan dinamis dari ketergantungan fungsional (Carlson, 1998; Hoffkamp, 2011; Monk, 1992), kemiringan (Stump, 1999), tingkat dan rasio (Herbert & Pierce, 2012a; Thompson & Thompson, 1994), tingkat perubahan (Bezuidenhout, 1998; Confrey & Smith, 1994; Orton, 1983; Thompson, 1994a; White & Mitchelmore, 1996; Zandieh, 2000), dan limit (Hahkiöniemi, 2006; Tall & Vinner, 1981).

Meskipun peserta didik dapat melakukan berbagai aplikasi berorientasi aturan, hambatan dalam memberi makna pada ekspresi simbolik yang digunakan untuk turunan juga masih ditemukan (Santos & Thomas, 2001; White & Mitchelmore, 1996). Hambatan lain yang kerap terjadi di antaranya adalah: 1) mengkonseptualisasikan turunan dengan semua pasangan proses-objeknya (Habre & Abboud, 2006; Zandieh, 2000); 2) membentuk hubungan antara representasi turunan yang berbeda (Herbert & Pierce, 2012b; Zandieh, 2000; Zandieh & Knapp,

2006); 3) pemahaman yang lemah tentang laju perubahan (Orton, 1983; Putih & Mitchelmore, 1996).

Pemahaman fungsi yang lemah merupakan salah satu kemungkinan dari sumber hambatan peserta didik dalam pemahaman konseptual turunan dan konsep kalkulus lainnya (Carlson, 1998; Confrey & Smith, 1994; Monk, 1992; Tall, 1992, 1996). Pendekatan korespondensi dan aplikasi berbasis rumus merupakan orientasi umum dalam pengajaran konsep fungsi. Namun, pendekatan korespondensi menumbuhkan gagasan fungsi sebagai aturan aljabar statis, digunakan untuk memperoleh nilai keluaran dengan mensubstitusi nilai masukan, dan tidak mendukung gagasan variasi kuantitas simultan yang dinamis (Confrey & Smith, 1994; Monk, 1992; Tinggi, 1996; Thompson, 1994b). Pandangan dinamis fungsi memerlukan koordinasi perubahan kecil secara simultan dalam variabel input dan output, dan itu adalah ide sentral untuk pemahaman yang berarti dari tingkat perubahan (Confrey & Smith, 1994; Monk, 1992).

Oleh karena itu, tampilan dinamis dari fungsi terkait erat dengan pengertian kovariasi dan penalaran kovariasi. Gagasan kovariasi dan penalaran kovariasi telah diidentifikasi sebagai ide mendasar yang harus dimiliki peserta didik untuk memahami fungsi, laju perubahan, dan akumulasi perubahan (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Cooney, Beckman & Lloyd, 2010; Saldanha & Thomson, 1998; Thompson & Thompson, 1992; Thompson, 1994b; Zandieh, 2000). Studi tentang penalaran kovariasi membuktikan bahwa peserta didik dan pendidik tidak menunjukkan hasil yang baik dalam tugas penalaran kovariasional, dan dibutuhkan studi lebih lanjut berfokus pada cara mengembangkan kemampuan penalaran kovariasi peserta didik (Carlson et al., 2002; Carlson; Larsen & Lesh, 2003; Zeytun, Etinkaya & Erbaş, 2010).

Kelemahan dalam pemahaman peserta didik tentang konsep turunan juga ditunjukkan dalam laju perubahan (Bezuidenhout, 1998; Bingolbali, 2008; Coe, 2007; Confrey & Smith, 1994, 1995; Herbert & Pierce, 2012; Orton, 1983; Rowland & Javanoski, 2004; Stroup, 2002; Tall, 1992; Teuscher & Reys, 2012;

Thompson, 1994a, 1994b; White & Mitchelmore, 1996; Wilhelm & Confrey, 2004). Peserta didik dari berbagai tingkatan kelas memiliki hambatan dan miskonsepsi yang beragam terkait dengan laju perubahan. Salah satunya adalah hambatan dalam memberi makna pada laju perubahan atau menafsirkan seolah-olah itu adalah rata-rata aritmatika (Bezuidenhout, 1998; Orton, 1983). Tingkat perubahan dengan jumlah perubahan dalam variabel dependen adalah kesalahpahaman umum yang dimiliki peserta didik (Rowland & Javanoski, 2004; Zandieh & Knapp, 2006). Selain itu, peserta didik memiliki kecenderungan untuk menganggap laju perubahan sebagai kemiringan hanya dalam situasi fungsional linier, dan mereka mengalami kesulitan dalam menafsirkannya dalam situasi non-linier (Stroup, 2002; Teuscher & Reys, 2012). Selain itu, interpretasi kehidupan nyata dari turunan umumnya diperkenalkan dalam konteks gerak. Namun, dalam proses pengajaran hanya digunakan konteks gerak yang terbatas pada gagasan umum tentang laju perubahan dengan dengan konsep-konsep Fisika seperti kecepatan, kecepatan sesaat dan percepatan (Herbert & Pierce, 2008, 2012; Wilhelm & Confrey, 2003; Gravemeijer & Doorman, 1999; Zandieh & Knapp, 2006; Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010). Hasil studi menunjukkan hasil yang relevan bahwa tingkat perubahan adalah dimensi yang paling bermasalah pada pemahaman konseptual turunan peserta didik, dan dimensi tersebut tidak begitu dipertimbangkan dalam banyak kurikulum pendidikan (Bingolbali, 2008).

Di sisi lain, interpretasi grafik memberikan peran penting dalam pemahaman konseptual turunan. Namun banyak dari peserta didik yang mengalami kesulitan dalam menafsirkan titik puncak, garis singgung vertikal, diskontinuitas, titik belok, dan turunan kedua untuk menentukan kecekungan (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley, & Trigueros, 2000; Ubuz, 2007). Hal tersebut menunjukkan pemahaman terkait grafik turunan dan fungsi antiturunan tanpa adanya rumus aljabar atau menggambar grafik antiturunan hanya dengan menggunakan sifat analitik (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Haciomeroglu, Aspinwall, Presmeg, 2010). Studi demikian membuktikan bahwa

aplikasi standar yang digunakan untuk menghubungkan grafik fungsi dan turunannya tidak mendorong pemahaman peserta didik tentang ide-ide yang mendasari hanya dengan berdasarkan permasalahan rutin. Selain itu, peserta didik tidak dapat memanfaatkan pengetahuan prosedural untuk membuat sketsa grafik saat menyelesaikan tugas kontekstual (Berry & Nyman, 2003; Yoon et al, 2010). Tinjauan tentang konsep turunan diperkenalkan dengan sub bagian yang berfokus pada studi yang menunjukkan kesalahpahaman dan hambatan peserta didik dalam mempelajari konsep turunan disertai dengan argumen teoritis untuk mengatasi hambatan tersebut serta cara memperkenalkan turunan dalam dokumen kurikulum (Nyman, 2003; Habre & Abboud, 2006; Orton, 1983; Tinggi, 1992; Putih & Mitchelmore, 1996).

Penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Orton (1983) mengungkapkan bahwa pemahaman partisipan yang lemah tentang diferensiasi. Penelitian tersebut melibatkan 110 partisipan yang terdiri dari 60 peserta didik SMA dan 50 mahasiswa calon guru matematika di Inggris. Sebagian besar partisipan berhasil membedakan fungsi polinomial dengan tepat yang melibatkan aspek rutin dari diferensiasi. Namun, partisipan mengalami kendala dalam memperkirakan kemiringan pada suatu titik (turunan) dari suatu fungsi yang direpresentasikan dalam bentuk grafik serta terkendala ketika menafsirkan dan menghitung laju perubahan. Ketika partisipan diminta untuk menentukan laju perubahan fungsi linier pada suatu titik, di antara banyak jawaban tidak relevan lainnya, sebanyak 22 partisipan menjawab dengan koordinat y sebagai jawaban yang sesuai. Namun terkait dengan pertanyaan tentang laju perubahan fungsi kuadrat di suatu titik tidak dapat dijawab oleh partisipan. Hasil umum dari penelitian ini menunjukkan bahwa peserta didik mengalami kesulitan dengan konsep turunan dan interpretasi laju perubahannya, dan mereka tidak dapat menginterpretasikannya ketika dikaitkan dengan konsep limit dan hasil bagi selisih. Orton (1983) menyarankan pendekatan informal yang melibatkan eksplorasi numerik dan grafis dengan menggunakan pendekatan kontekstual sebagai awal untuk pengajaran kalkulus. Penelitian ini merupakan

pijakan studi yang menempatkan hambatan dan lemahnya pemahaman peserta didik tentang turunan ke dalam kata-kata dari berbagai aspek.

Penelitian lain yang dilakukan oleh White & Mitchelmore (1996) dan Santos & Thomas (2001) menunjukkan kondisi lain bahwa pemahaman peserta didik terbatas pada makna representasi simbolis. Hasil penelitian White dan Mitchelmore (1996) membuktikan bahwa konsep variabel yang kurang berkembang menjadi salah satu hambatan dalam pemahaman konseptual turunan. Partisipan yang terlibat pada penelitian tersebut adalah 40 mahasiswa tahun pertama yang mengambil mata kuliah kalkulus. White dan Mitchelmore (1996) memperoleh hasil bahwa peserta didik lebih berhasil dalam menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan dalam konteks simbolik murni dan mereka menunjukkan perkembangan penting dalam domain itu, tetapi mereka tidak dapat memecahkan dan perkembangan apapun tidak diamati selama periode pengajaran terkait dengan tugas yang ditanyakan dalam ekspresi verbal. Penelitian ini menunjukkan lemahnya pemahaman peserta didik tentang turunan dalam konteks nyata dan menyimpulkan bahwa peserta didik tidak dapat melambangkan tingkat perubahan yang ditunjukkan secara verbal sebagai turunan di mana pemodelan situasi tersebut diperlukan. Selain itu, beberapa peserta didik tidak bisa menafsirkan ekspresi simbolik seperti $\frac{dm}{dv}$ karena tidak melihat simbol m atau v sebagai variabel, melainkan sebagai simbol yang mewakili besaran tertentu. Temuan tersebut disebabkan karena konsepsi peserta didik yang dominan tentang variabel sebagai simbol untuk dimanipulasi dan ketidakmampuan dalam menafsirkan turunan sebagai laju perubahan antara dua variabel yang berubah secara bersamaan.

Demikian juga penelitian yang dilakukan oleh Santos dan Thomas (2001) terhadap peserta didik SMA yang telah diajarkan konsep turunan dengan menghubungkan makna yang berbeda dari simbol $\frac{dy}{dx}$ tergantung pada konteks yang digunakan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa partisipan tidak dapat membentuk hubungan antara konsep yang berbeda terkait dengan simbol $\frac{dy}{dx}$. Misalnya, saat

partisipan menafsirkan simbol turunan dalam ekspresi $\frac{dy}{dx} = 4$ sebagai suatu gradien, tidak ada satupun partisipan yang menginterpretasikan $\frac{dy}{dx}$ sebagai gradien pada persamaan $2x + \frac{dy}{dx} = 1$. Partisipan pada umumnya menafsirkan simbol sebagai gradien, tetapi terdapat beberapa hambatan yang diamati berupa terjemahan antara representasi yang berbeda seperti kata ke simbol atau simbol ke kata.

Penelitian yang dilakukan oleh White dan Mitchelmore (1996) dan Santos dan Thomas (2001) menunjukkan bahwa partisipan mengalami hambatan dalam menafsirkan representasi simbolis turunan berdasarkan interpretasi yang dilakukan. Kesimpulan tersebut sejalan dengan penelitian yang dilakukan oleh Habre dan Abboud (2006) yang menyatakan bahwa penguasaan prosedur dalam mempelajari konsep turunan tidak menjamin untuk dapat memahami ide-ide yang menjadi dasar dalam ekspresi simbolik. Penelitian tersebut dilakukan terhadap 56 mahasiswa calon guru matematika yang mengambil mata kuliah kalkulus yang menunjukkan bahwa partisipan tidak dapat menginterpretasikan secara geometris atau analitis serta tidak dapat memberikan rasionalisasi dari pertanyaan yang diberikan, yaitu “mengapa turunan pertama dari fungsi $g(x) = x^2 + 1$ harus menjadi $2x$?” Pertanyaan tersebut merupakan lanjutan dari penjelasan konsep turunan secara geometri dari $f(x) = x^2$ sebagai $f(x) = 2x$.

Dari beberapa hasil penelitian sebagaimana telah dijelaskan, diperoleh suatu gambaran bahwa terdapat hambatan-hambatan yang terjadi pada peserta didik untuk memahami konsep turunan. Berdasarkan hambatan tersebut, kerangka komprehensif dikembangkan oleh Zandieh (2000) untuk menjelaskan konsep turunan. Kerangka kerja yang dikembangkan oleh Zandieh (2000) memiliki dua komponen utama yaitu representasi ganda atau konteks (kemiringan, laju, kecepatan, dan hasil bagi perbedaan) dan lapisan pasangan proses-objek (rasio, batas, fungsi). Menurut Zandieh (2000), konsep turunan dapat direpresentasikan secara grafis (kemiringan, garis singgung), verbal (laju perubahan sesaat), fisik (kecepatan atau percepatan) dan simbolis (limit hasil bagi perbedaan). Kerangka

tersebut melibatkan dimensi dari beberapa komponen representasi. Di sisi lain, konsep turunan secara matematis melibatkan rasio, limit dan fungsi sebagai pembentuk dimensi komponen pasangan proses-objek.

Ungkapan berikut menunjukkan pemahaman representasi hasil bagi perbedaan turunan pada lapisan rasio, limit, dan fungsi. Pada ekspresi pertama, rasio antara selisih variabel terikat dan selisih variabel bebas diperoleh tanpa proses pembatasan. Pada ekspresi kedua, proses limit melibatkan dan ekspresi memberikan nilai fungsi turunan pada titik tertentu (x_0). Di lapisan fungsi, ide tersebut adalah kemungkinan menerapkan rumus untuk banyak nilai x . Sementara hanya turunan pada titik tertentu yang diperoleh dalam pemahaman lapisan batas, turunan sebagai fungsi adalah ide sentral dalam pemahaman lapisan fungsi. Secara rinci, Zandieh (2000) menjelaskan makna memahami representasi lain dari turunan pada rasio, batas, atau lapisan fungsi. Berdasarkan kerangka kerja, Zandieh (2000) menyelidiki pemahaman sembilan peserta didik di sekolah menengah yang mempelajari konsep turunan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa interpretasi kemiringan dan laju perubahan sesaat adalah representasi yang paling disukai oleh peserta didik untuk menjelaskan konsep turunan. Sebaliknya, definisi konsep formal turunan kurang digunakan dan pemahaman partisipan kurang terintegrasi. Meskipun kecepatan tidak begitu disukai untuk menjelaskan konsep turunan, namun tetap digunakan oleh partisipan sebagai representasi untuk menjelaskan makna kontekstual turunan.

Selain itu, hasil penelitian menunjukkan bahwa seorang partisipan dapat menjelaskan turunan dengan mendemonstrasikan ketiga lapisan proses-objek dalam representasi tertentu (misalnya, kemiringan, kecepatan), tetapi partisipan yang sama tidak dapat menjelaskan turunan lagi dengan menunjukkan semua lapisan proses-objek dalam representasi lain. Menurut Zandieh (2000), sulit untuk menyebutkan pemahaman yang lengkap tentang turunan bagi seorang partisipan, ketika tidak dapat berpikir dengan masing-masing proses rasio, limit dan fungsi pada setiap representasi turunan. Pemahaman turunan pada tingkat proses tertentu

pada satu konteks tidak berarti memahaminya pada tingkat proses yang sama dalam konteks lain. Terkait dengan pemahaman konseptual turunan, Zandieh menekankan perlunya memahami representasi yang berbeda dari turunan dengan mengonsepkannya pada setiap lapisan proses-objek.

Pada gagasan tersebut, limit tampaknya menjadi salah satu ide kritis dalam pemahaman konseptual turunan (Orton, 1983; Tall, 1992; Hahkiöniemi, 2006). Orton (1983) dan Zandieh (2000) menunjukkan bahwa meskipun peserta didik secara prosedural melakukan limit hasil bagi selisih, partisipan memiliki banyak kesulitan dalam pemahaman konseptual tentang proses limit pada turunan. Meskipun peserta didik dapat mendefinisikan turunan, misalnya sebagai kemiringan garis singgung, pemahamannya dapat berupa konsepsi pseudo-struktural yang berarti tidak adanya proses penalaran yang mendasari di belakangnya seperti batas kemiringan garis potong. Hahkiöniemi (2006), di sisi lain, membuktikan bahwa peserta didik memiliki ide-ide yang diperlukan untuk membatasi proses, tetapi mengalami kesulitan dalam menghubungkan ide-ide dengan representasi matematis formal.

Konstruksi hubungan antara representasi yang berbeda dan lapisan proses-objek yang berbeda telah diindikasikan sebagai komponen penting untuk pemahaman konseptual turunan namun melibatkan banyak kesulitan yang berasal baik dari individu atau dari sifat konsep itu sendiri (Herbert & Pierce, 2012; Santos & Thomas, 2001; White & Mithcelmore, 1996; Zandieh, 2000). Hal ini ditunjukkan oleh Herbert dan Pierce (2012) sebagai pemahaman tingkat dalam satu representasi atau konteks belum tentu ditransfer ke representasi atau konteks lain. Kelemahan individu dalam membentuk hubungan antara representasi yang berbeda dari turunan diamati dalam penelitian oleh Zandieh dan Knapp (2006). Hasil penelitian menunjukkan bahwa partisipan lebih menyukai konteks seperti kemiringan pada grafik atau kecepatan untuk menjelaskan turunan, tetapi menggunakan representasi tertentu tidak menunjukkan pemahamannya dalam representasi lain. Penggunaan rata-rata laju perubahan (rasio-lapisan) atau ekspresi individu tentang turunan

sebagai kecepatan sesaat tidak mewakili pemahaman mereka tentang konsep turunan secara keseluruhan. Kesulitan partisipan dalam membentuk hubungan antara interpretasi turunan yang berbeda begitu tampak jelas (Herbert & Pierce, 2012; Orton, 1983; White & Mithcelmore, 1996; Zandieh, 2000; Zandieh & Knapp, 2006). Namun, pilihan partisipan untuk berpikir dengan representasi tertentu atau ketidakmampuan mereka untuk membentuk hubungan antara representasi lain dapat menjadi hasil dari orientasi pengajaran.

Berdasarkan penelitian Bingolbali, Monaghan dan Roper (2007), telah diamati bahwa pemahaman mahasiswa calon guru matematika tentang turunan dari departemen yang berbeda memiliki orientasi yang berbeda, yaitu proses berpikir mahasiswa teknik dalam hal laju perubahan dan proses berpikir mahasiswa matematika dalam hal laju perubahan dan garis singgung. Hal ini ditafsirkan oleh peneliti sebagai aspek kontekstual dari *concept image* dan *concept definition* (Bingolbali & Monaghan, 2008). Hasil penelitian ini menunjukkan bagaimana orientasi instruksional yang berbeda dapat menghasilkan pemahaman turunan yang kurang berkembang. Orientasi instruksional yang berbeda mungkin terkait dengan buku teks atau kurikulum.

Kesulitan yang dihadapi banyak peserta didik terkait dengan konsep turunan dapat diakibatkan karena cara mengajarnya (Bingolbali, 2008; Bingolbali et al., 2007). Setelah memeriksa tujuh buku teks kalkulus, Berry dan Neyman (2003) menentukan bahwa turunan umumnya diperkenalkan dengan interpretasi geometris sebagai kemiringan garis singgung yang diperoleh dengan pendekatan garis sekan. Berdasarkan gagasan bahwa garis sekan mendekati garis singgung, diperkenalkan definisi konsep formal turunan dengan hasil bagi perbedaan dan proses limit. Selanjutnya diikuti oleh aturan algoritmik diferensiasi dan penerapannya dalam beberapa situasi nyata. Hanya beberapa buku teks yang dimulai dengan tingkat perubahan rata-rata sesaat dengan menggunakan konteks gerak (Berry & Neyman, 2003).

Selanjutnya, Teuscher dan Reys (2012) dan Stroup (2002) menunjukkan bahwa buku teks memperkenalkan konsep kemiringan dan laju perubahan dalam situasi linier, dan kemiringan tidak dibahas selama pengenalan fungsi lain seperti kuadrat, polinomial dan eksponensial. Menurut Stroup (2002), hal ini mungkin menjadi penyebab hambatan peserta didik dalam memahami turunan dan laju perubahan fungsi non-linier. Ketika melihat buku teks dan kurikulum di Turki, Bingolbali (2008) meneliti beberapa buku teks tingkat sekolah menengah dan universitas yang membahas topik turunan dan menetapkan bahwa banyak dari buku teks dimulai dengan definisi formal turunan yang melibatkan hasil bagi perbedaan dengan proses limit. Setelah memperkenalkan definisi konsep formal turunan dan aturan diferensiasi umum, hubungan turunan dengan kurva diperkenalkan di bawah bagian interpretasi geometris turunan. Pada buku teks yang diteliti oleh Bingolbali (2008), interpretasi konsep turunan ditinjau dari tingkat perubahan berdasarkan kecepatan dan percepatan interpretasi turunan tidak begitu dijelaskan secara rinci.

Bingolbali (2008) juga meneliti tujuan yang dinyatakan untuk pengajaran turunan dalam kurikulum nasional Turki dengan menentukan bahwa ide-ide kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat dari konteks gerak telah digunakan sebagai pengenalan turunan, dan diikuti oleh interpretasi kemiringan. Hanya konteks gerak yang digunakan untuk gagasan tentang laju perubahan. Namun, telah diketahui dari banyak penelitian bahwa hanya menggunakan konteks gerak tidak mendukung pemahaman yang lebih umum tentang laju perubahan (Gravemeijer & Doorman, 1999; Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010; Zandieh & Knapp, 2006).

Bingolbali (2008) juga mengkritik kurikulum yang hanya menggunakan konteks gerak untuk memperjelas tingkat perubahan interpretasi turunan. Menurutnya, laju perubahan merupakan konsep yang lebih inklusif dan kecepatan hanyalah salah satu interpretasinya. Bingolbali (2008) menyimpulkan bahwa tingkat perubahan interpretasi turunan sebagai aspek yang hilang pada buku teks internasional. Ketika melihat kurikulum pendidikan nasional yang lebih menekankan pada konsep tingkat perubahan yang dapat diamati, konsep turunan

pertama kali diperkenalkan dengan tujuan pembelajaran bahwa konsep laju perubahan dijelaskan dengan memanfaatkan model fisik dan geometris. Selain itu, laju perubahan terbatas pada konsep kecepatan dan akselerasi.

Pada penelitian yang dilaksanakan, peneliti juga memeriksa buku teks yang digunakan oleh Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Pendidikan Tinggi (KEMENDIKBUDRISTEK) dan memperoleh temuan yang sama. Pada buku teks Matematika untuk kelas 11 yang digunakan, konsep turunan dimulai dengan contoh mencari kecepatan rata-rata. Kecepatan sesaat disebut sebagai interpretasi fisik dari turunan yang kemudian diikuti oleh definisi konsep formal dan interpretasi geometris turunan. Setelah pengenalan aturan diferensiasi untuk mengambil turunan dari fungsi aljabar, aplikasi turunan diperkenalkan dengan masalah fungsi maksimum dan minimum. Istilah laju perubahan merupakan istilah baru yang disebutkan dalam buku ini.

Pada pertengahan 1990-an, standar kurikulum kalkulus di seluruh dunia merekomendasikan metode yang melibatkan penguasaan aturan simbolik dan aljabar serta penerapan aturan untuk memecahkan masalah (Tall, 1996). Namun, sebagai akibat dari ketidakpuasan terhadap tingkat hasil belajar peserta didik, Gerakan Reformasi Kalkulus pada pengajaran kalkulus berlangsung di Amerika Serikat dan diikuti oleh beberapa negara lain di dunia (Garner & Garner, 2001; Habre & Abboud, 2006; Tall, 1992). Sebuah proses paralel telah diamati antara pengembangan grafik berbasis komputer, simulasi, dan program aljabar dan gerakan reformasi dalam pendidikan matematika. Kalkulus yang direformasi lebih menekankan pada pembelajaran bermakna dengan beberapa representasi konsep dalam berbagai konteks, visualisasi, dan penggunaan teknologi (Berry & Neyman, 2003; Garner & Garner, 2001; Tinggi, 1996; Teuscher & Reys, 2012).

Studi yang berfokus pada pengajaran konsep kalkulus yang bermakna dan kontekstual umumnya dilakukan dalam lingkungan belajar yang didukung oleh teknologi. Studi penelitian yang menyelidiki pemahaman peserta didik tentang konsep kalkulus dilakukan dalam lingkungan belajar yang didukung teknologi telah

membawa ide-ide pedagogis inovatif terhadap pengajaran dan pembelajaran kalkulus yang menekankan pentingnya menggunakan konteks kehidupan nyata dalam mengajar matematika (Berry & Nyman, 2003; Stroup, 2002; Tall, 1996; Doerr & O'Neill, 2010; Doorman & Gravemeijer, 2008; Herbert & Pierce, 2008; Hoffkamp, 2011; Stroup, 2002). Meskipun perubahan ekstensif terjadi dalam kurikulum matematika di beberapa negara, masih cukup sulit untuk menyebutkan tentang gerakan reformasi di Indonesia sehubungan dengan pengajaran kalkulus di tingkat sekolah dan universitas.

Dari penelitian-penelitian tersebut dilakukan identifikasi dan analisis terhadap masalah-masalah ditinjau dari perspektif teori sejarah, epistemologis, serta pembelajaran. Tinjauan terhadap perspektif sejarah dilakukan karena konsep matematika adalah hasil dari perkembangan masa lalu. Oleh karena itu, ketiga perspektif ini penting dilakukan agar memenuhi syarat untuk digunakan sebagai lensa dalam memahami masalah yang dihadapi oleh subjek dalam situasi belajar (Moru, 2006). Bila ditinjau dari aspek sejarah, meskipun beberapa konsep kalkulus telah dikembangkan terlebih dahulu di Mesir, Yunani, Tiongkok, India, Iraq, Persia, dan Jepang, namun penggunaan kalkulus modern baru dimulai pada abad ke-17 di Eropa ketika Issac Newton orang berkebangsaan Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz orang berkebangsaan Jerman mengembangkan prinsip dasar dari kalkulus. Newton mengaplikasikan kalkulus secara umum ke bidang fisika dalam kajian tentang kinematika sementara Leibniz mengembangkan notasi-notasi kalkulus yang sampai saat ini telah banyak digunakan (Simmons, 2007).

Perbedaan cara pandang yang ditunjukkan oleh Newton dan Leibniz dalam menemukan teori dasar kalkulus pada waktu yang hampir bersamaan memberikan inspirasi dalam pembelajaran matematika. Pandangan yang berbeda dari kedua tokoh tersebut semakin memperkaya pemikiran dalam upaya untuk mempelajari dan memahami kalkulus secara lebih bermakna. Secara khusus, penelitian yang dilakukan berfokus pada kajian terhadap pemahaman konsep turunan yang merupakan alat mendasar dalam studi dan pemahaman fenomena yang melibatkan

perubahan atau variasi besaran (Tall, 1996). Berdasarkan essensinya, turunan telah dimasukkan dalam kurikulum universitas baik di bidang pendidikan matematika maupun di bidang matematika ilmiah dan teknologi (Vrancken, 2014). Terlepas dari kepentingan kontribusinya, pemahaman mendalam tentang konsep turunan di tingkat sekolah dan universitas ternyata menunjukkan permasalahan yang kompleks. Peserta didik masih memperlihatkan kecenderungan penyelesaian tugas dengan berfokus pada praktik algoritmik dan prosedur sederhana berdasarkan keterampilan yang telah diperoleh dalam pembelajaran sehingga tidak banyak membantu ketika dihadapkan pada tugas-tugas yang membutuhkan pemahaman yang lebih mendalam tentang makna turunan (Artigue, 1995; Sanchez-Matamoros, dkk., 2008).

Terdapat banyak definisi yang berbeda-beda untuk menjelaskan makna dari konsep turunan. Berdasarkan tinjauan konsep limit, turunan adalah batas rasio untuk meningkatkan variabel independen dari peningkatan fungsi sementara pada perubahan variabel dependen yang mendekati nol (Balci, 2012). Dari tinjauan geometris, turunan dari suatu fungsi sama dengan garis singgung sudut antara titik fungsi yang ditunjukkan dengan sumbu-x sebagai gradien dari garis singgung tersebut (Karadeniz, 2003). Selain itu Hugges dan Hallet (1996) mendefinisikan turunan dengan menggunakan hubungan antara kecepatan dan tingkat perubahan rata-rata. Dengan demikian, pembelajaran turunan konsep turunan ternyata masih menjadi tantangan kognitif bagi peserta didik meskipun konsep tersebut dapat diterapkan dalam berbagai aplikasi di berbagai disiplin ilmu. Hasil studi menunjukkan bahwa indeks keberhasilan peserta didik di sebagian besar mata kuliah yang menyertakan turunan masih rendah dengan tingkat pengabaian yang tinggi (Hillock, dkk., 2013). Mengingat pentingnya konsep turunan disertai kesulitan yang terlibat dalam pemahamannya, banyak penelitian telah dilakukan untuk mengatasi masalah dari sudut pandang pada berbagai kerangka teoritis yang berbeda (Asiala, dkk., 1996; Zandieh, 2000).

Menurut Sánchez-Matamoros dkk. (2008), penelitian-penelitian tersebut memberikan informasi tentang aspek-aspek yang sangat penting tentang pembelajaran turunan, seperti: kesalahan dan kesulitan dalam pemahamannya; hubungan antara tingkat perubahan dan hasil bagi tambahan; sistem representasi sebagai alat untuk berpikir tentang turunan; hubungan antara turunan pada suatu titik dan fungsi turunan; pengembangan skema turunan; penerapan konsep dalam masalah lain (misalnya, pengembangan pemahaman aturan rantai). Hasil penyelidikan tersebut memiliki implikasi langsung pada pengembangan kurikulum kalkulus dan pengajaran konsep turunan (Artigue, 1998). Namun, peneliti di bidang pendidikan matematika terus melaporkan masalah dan kesulitan yang sama terkait dengan pemahaman kalkulus, khususnya konsep (Reinholz, 2015). Oleh karena itu, perlu untuk menggali lebih dalam penelitian tentang pemahaman peserta didik dengan tujuan mengembangkan lintasan belajar yang berkontribusi secara efektif dalam konstruksi konsep turunan.

Mengacu pada kurikulum pendidikan, konsep turunan menjadi bagian dari objek matematika yang penting untuk dipelajari (Kemdikbud, 2013). Sementara itu, beberapa implementasi pembelajaran konsep turunan masih belum sampai kepada pemahaman konseptual dan masih berujung pada pemahaman prosedural (Juter, 2006; Moru, 2006; Klisinska, 2009; Prihandhika, 2018). Selanjutnya studi pendahuluan yang dilakukan oleh Prihandhika (2019) terhadap beberapa mahasiswa calon guru matematika menunjukkan bahwa pengajaran konsep dasar turunan di tingkat universitas masih belum sampai pada pemahaman yang bermakna. Hal tersebut terlihat ketika beberapa subjek dapat menggunakan persamaan turunan berdasarkan konsep limit, namun tidak dapat menjelaskan dari mana persamaan tersebut didapatkan.

Sejalan dengan hasil penelitian tersebut, Ernest (1991) menyatakan bahwa subjek harus memahami suatu konsep matematika secara bermakna. Kajian tentang interpretasi makna serta pemaknaan terhadap objek erat kaitannya dengan hermeneutik sebagai pendekatan untuk memahami esensi yang tersembunyi

(Grbich, 2007; Ricoeur, 1985). Menurut Ricoeur (1985), matematika sering dijadikan sebagai mata pelajaran yang terdiri dari pernyataan-pernyataan yang hanya menemukan ekspresinya dalam aktivitas manusia. Dengan demikian matematika dapat dilihat sebagai subjek pemahaman hermeneutik jika penekanan ditempatkan dengan penafsiran aktivitas matematika sehingga dengan sendirinya dapat merangkul pernyataan matematika. Namun, pernyataan tersebut dapat menyebabkan perubahan persepsi tentang konteks yang dikaji. Sirkularitas seperti itu menekankan hubungan peserta didik dengan matematika di mana peserta didik hanya dapat melihat fenomena matematika dari perspektif individu. Pandangan individu tentang konten matematis, seperti yang direpresentasikan dalam pernyataan yang dibuat, perlu mempertahankan residu dari proses yang telah dilaluinya. Setiap gagasan tentang makna universal yang benar tidak muncul dalam pemahaman hermeneutik. Cara ekspresi dilihat dan digunakan selalu berubah-ubah, dimodifikasi saat pengalaman hidup individu memengaruhi konteks di mana ekspresi itu dianggap relevan. Tinjauan terhadap aktivitas matematika dapat dipilih untuk membuat pernyataan tetapi mungkin tidak dapat mengklaim bahwa itu adalah representasi yang tepat dari fenomena yang dijelaskan. Ekspresi yang ditawarkan oleh seorang individu adalah perkiraan yang diperlukan untuk apa yang dimaksudkan dan tergantung dari perspektif konteks kehidupan individunya. Habermas (1982) mengemukakan bahwa kesenjangan antara ekspresi semacam itu dan apa yang dimaksud hanya dapat dijelaskan dengan interpretasi. Pembahasan antara pernyataan dan makna yang diberikan merupakan penempatan lingkaran hermeneutik. Lingkaran tersebut bergerak menjauh dari pengertian dan pemahaman yang berkembang dalam pikiran seperti yang mungkin ditawarkan oleh murid-murid Piaget (Beilin, H., & Pufall, P. B, 2013). Walkerdine (1989), lebih berfokus pada pemahaman yang timbul dalam penggunaan sosial dalam bentuk linguistik atau matematika untuk menandakan fenomena. Namun masalahnya tidak begitu banyak sampai pada konsep-konsep di dunia yang dapat diketahui melainkan konvergen ke penggunaan ekspresi linguistik konvensional.

Lebih lanjut kajian tentang hermeneutik termasuk kedalam unsur filosofis yang sering dibahas dalam filsafat matematika. Filsafat matematika adalah cabang dari filsafat yang mengkaji tentang perenungan dan penjelasan tentang sifat matematika yang menjadi kasus khusus dari tugas epistemologi yang bertanggung jawab atas pengetahuan manusia secara umum (Ernest, 1991). Kajian pada filsafat matematika memiliki hasil yang sangat berbeda dalam praktik pendidikan sehingga penyelidikan terhadap filosofi yang mendukung pengajaran matematika dan kurikulum matematika yang dilakukan peneliti dan praktisi harus juga mempertimbangkan nilai-nilai, ideologi, dan kelompok sosial yang mematuhinya (Ernest, 1991; Brousseau, 2002). Menurut Ernest (1991), filosofi mengenai matematika salah satunya didasarkan pada pandangan *problem solving* yang memandang bahwa matematika sebagai sesuatu yang dinamik, yaitu ruang penciptaan dan penemuan manusia yang berkembang secara terus menerus di mana pola-pola dimunculkan dan kemudian disaring menjadi pengetahuan.

Pengetahuan yang telah terbentuk tersebut memiliki karakteristik yang khas, yaitu memiliki sifat hierarkis yang saling berkaitan antara satu konsep dengan konsep yang lain atau satu istilah dengan istilah yang lain sehingga dibutuhkan kemampuan koneksi yang baik dalam menghubungkan objek-objek mental berupa konsep-konsep yang ada pada struktur kognitif untuk mengkonstruksi pemahaman secara utuh dalam mempelajari matematika ditinjau dari aspek ontologi, epistemologi, serta aksiologi (Asiala, 1990; Popper, 1979; Hempel, 1966; Barker, 1964). Aspek ontologi adalah sebuah cabang filsafat mengenai asumsi-asumsi yang dibuat dan mengkaji eksistensi atau realitas tentang *being* (ada) atau *becoming* (menjadi) untuk meyakini bahwa sesuatu masuk akal atau nyata (Scott & Usher, 2004; Scotland, 2012). Sementara itu, aspek epistemologi berfokus pada sifat dan pokok pengetahuan, bentuk-bentuk pemahaman yang digunakan untuk menjelaskan bagaimana suatu kebenaran atau realitas itu diketahui serta bagaimana pengetahuan itu dapat dikomunikasikan kepada manusia-manusia yang lain (Schwandt, 1997; Cooksey & McDonald, 2011). Selanjutnya, aspek aksiologi

menelaah pendekatan secara filosofis dalam mendefinisikan, mengevaluasi, serta memahami konsep-konsep untuk membuat keputusan terkait nilai yang benar (Finnis, 1980).

Sebagai pembelajar, ketidakmampuan untuk berada pada pijakan filosofis tersebut dapat menjadi hambatan-hambatan dalam proses pembelajaran. Brousseau (2002) mendefinisikan hambatan-hambatan dalam pembelajaran sebagai kumpulan dari kesalahan-kesalahan yang berhubungan erat dengan pengetahuan sebelumnya. Hal ini terjadi karena kesalahan tersebut muncul pada pemahaman awal subjek mengenai suatu hal, kemudian kesalahan tersebut terus diulang sehingga tertanam di dalam sistem memori jangka panjang sebagai pengetahuan. Brousseau (2002) mendefinisikan *learning obstacle* ke dalam tiga jenis yaitu *ontogenic obstacle*, *didactical obstacle*, dan *epistemological obstacle*. *Ontogenic obstacle* atau hambatan ontogenik berkaitan dengan tingkat kesulitan situasi didaktis yang dapat mengakibatkan terhambatnya proses belajar. *Didactical obstacle* atau hambatan didaktis berkaitan dengan urutan atau tahapan serta penyajian materi kurikulum yang berdampak pada terhambatnya kesinambungan proses berpikir peserta didik atau tidak akuratnya konsepsi yang terbentuk pada peserta didik. Sementara *epistemological obstacle* atau hambatan epistemologis berkaitan dengan keterbatasan pemahaman seseorang tentang sesuatu yang hanya dikaitkan dengan konteks tertentu sesuai pengalaman belajarnya.

Salah satu tujuan penting untuk melakukan analisis historis dan epistemologis konsep matematika telah menjadi pencarian paralel dalam pengembangan pengetahuan sepanjang sejarah dan perolehan individu dalam pengetahuan. Apa yang kemudian dikenal sebagai prinsip genetik untuk mengajar, bergantung pada perkembangan sejarah, termasuk masalah sebagai keputusan berkenaan dengan kajian didaktik. Kajian didaktik muncul sebagai alternatif gaya aksiomatik-deduktif dalam pengajaran matematika (Mosvold, 2003). Prinsip genetik pada hakekatnya menuntut penyajian suatu topik harus menyerupai prinsip-prinsip yang telah menentukan perkembangannya ke dalam bentuknya yang

sekarang. Mungkin ada paralelisme positif yang mengatasi konsepsi secara tidak memadai dalam menghadapi masalah baru, serta paralelisme negatif yang mengulang perangkat (Thomaidis & Tzanakis, 2007). Paralelisme negatif mencakup korespondensi antara pandangan peserta didik yang bertindak sebagai hambatan untuk lebih mengembangkan konsep mereka dan pandangan serupa yang dipegang oleh matematikawan di masa lalu. Hal ini menunjukkan bahwa identifikasi hambatan epistemologis dalam sejarah matematika dapat memberikan kontribusi.

Gagasan tentang hambatan epistemologis diperkenalkan oleh Gaston Bachelard (1938) sebagai konsep untuk diterapkan pada sejarah fisika dan kemudian digunakan sebagai konsep dalam pendidikan matematika (Brousseau, 1997). Dalam pandangan ini, pengetahuan ilmiah memberikan solusi untuk masalah, yang tidak tergantung pada individu yang mencoba menyelesaikannya, tetapi diselesaikan dalam batasan yang diberikan. Prinsip dasarnya mengatakan bahwa membangun pengetahuan ilmiah bukanlah proses yang berkesinambungan tetapi melibatkan penolakan terhadap bentuk-bentuk pengetahuan sebelumnya, di mana bentuk-bentuk pengetahuan usang ini disebut hambatan epistemologis. Kesalahpahaman peserta didik terjadi tidak acak, tetapi mungkin terkait dengan serangkaian kendala dalam bidang pengetahuan matematika di mana solusi optimal dapat dipahami. Hambatan epistemologis cenderung dikaji pada konteks tersebut. Pembahasan tentang hambatan mencakup juga hal-hal lain, seperti hambatan budaya dan individu (berasal dari ontogenetik) serta hambatan didaktik yang berhubungan dengan cara mengajar (Brousseau, 1997). Hambatan epistemologis dijelaskan sebagai hambatan yang benar-benar berasal dari aspek epistemologis yang tidak dapat atau harus dihindari oleh seseorang, karena peran formatifnya dalam pencarian pengetahuan. Pengetahuan tersebut dapat ditemukan dalam sejarah konsep itu sendiri. Namun tidak berarti bahwa efek pencarian pengetahuan harus diperkuat atau diproduksi dalam konteks sekolah pada kondisi historis di mana terjadinya atau ditemukannya hambatan.

Sierpinska (1994) melihat hambatan bukan sebagai langkah yang diperlukan dalam pengembangan pengetahuan, tetapi sebagai langkah yang dapat membuat reorganisasi individu dan modifikasi teori tentang konsep matematika yang sulit. Sebuah paralelisme dalam sejarah dan pemahaman peserta didik tidak harus dilihat dalam rekapitulasi filogenesis dan ontogenesis, melainkan dalam perkembangan kesamaan mekanisme. Sierpinska (1994) berpendapat bahwa kesamaan tersebut termasuk pelestarian dalam tradisi linguistik dan penggunaan kata-kata metaforis. Mengidentifikasi hambatan untuk pengembangan lebih lanjut dalam sejarah matematika mungkin membantu untuk membuat hipotesis tentang hambatan yang mungkin dihadapi oleh peserta didik. Hal ini tidak serta merta menyarankan pemodelan pendekatan pengajaran yang sesuai dengan perkembangan sejarah, termasuk hambatannya. Bukan praktik umum, misalnya, untuk memperkenalkan kalkulus tanpa definisi fungsi sebelumnya, tetapi sebaliknya menggunakan istilah kuantitas, laju perubahan dan perbedaannya yang dihubungkan dengan kurva yang diberikan yang dimodelkan dalam cara Newton dan Leibniz untuk memotivasi definisi fungsi yang tepat. Masih sulit untuk mengidentifikasi tahapan yang berbeda secara kualitatif dalam pengembangan matematika dan hambatan yang menyebabkan perubahan perspektif tanpa kerangka teoretis yang mendasari untuk analisis historis. Damerow (2007) menunjukkan bahwa membangun hubungan antara perkembangan sejarah dan kognisi individu tergantung pada seberapa banyak relativisme budaya dikaitkan dengan pengembangan konsep matematika.

Demikian pula Radford, Boero dan Vasco (2003) yang menunjukkan bahwa penafsiran sejarah matematika bertujuan untuk memahami kesulitan peserta didik yang bergantung pada asumsi implisit tentang epistemologi pengetahuan matematika. Fried (2008) memberikan perhatian pada tujuan pendidikan matematika sebagai pengantar ke matematika modern untuk pendidikan matematika. Setidaknya, perhatian tersebut bertujuan untuk memperlakukan matematika sebagaimana adanya. Fried (2008) juga menunjukkan masalah

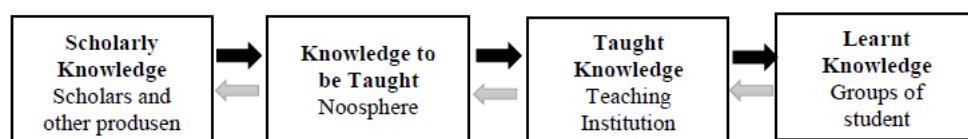
mendasar dalam menulis sejarah matematika dan membandingkannya dengan studi sejarah lainnya. Sejarawan matematika seperti antropolog yang mempelajari budaya matematika sangat berbeda pada komunitas pendidikan matematika. Sejarawan harus mempertimbangkan matematika sebagai kajian yang selalu berubah dan tidak memiliki referensi yang kekal. Berkenaan dengan hal tersebut, sejarawan matematika dengan tekun mencoba untuk menjauhkan gagasan matematika modern dari matematika masa lalu, yaitu untuk menjauhkan anakronisme. Secara umum, meskipun sejarawan matematika tertarik untuk memahami bagaimana masa kini yang telah menjadi apa adanya, praktik sejarah dengan cermat menghindari pengukuran masa lalu menurut konsepsi modern tentang apa itu matematika dan standar modern tentang apa yang signifikan secara matematis.

Artigue (1992) menarik perhatian pada masalah lain bahwa apa yang mungkin telah diidentifikasi oleh peneliti sebagai hambatan epistemologis, seringkali berkaitan erat dengan proses belajar-mengajar, yaitu dengan pilihan dan karakteristik sistem pendidikan. Hambatan itu kemudian bersifat didaktis dan bukan bersifat epistemologis (Artigue 1992). Ini menunjuk pada kerangka kerja yang menetapkan untuk mengkonseptualisasikan bentuk-bentuk pengetahuan matematika yang dilembagakan dan membantu mengidentifikasi perbedaan (sistematis) antara pengetahuan matematika akademik dan pengetahuan yang dikembangkan dalam proses pengajaran, daripada mencari kesejajaran antara dua praktik matematika tersebut.

Skemp (1987) menyatakan bahwa istilah konsep sebetulnya tidak mudah untuk didefinisikan meskipun istilah tersebut telah banyak digunakan. Oleh karena itu sebuah konsep membutuhkan pembentukan dari sejumlah pengalaman yang memiliki kesamaan. Lebih lanjut, Skemp (1987) mengungkapkan bahwa konsep matematika tidak dapat dipelajari secara langsung dari lingkungan sehari-hari, tetapi dapat dipelajari secara tidak langsung melalui proses reflektif dari para matematikawan maupun konsep yang telah didapatkan sehingga pada pembelajaran

matematika, pada tahap awal sangat bergantung pada pengajaran. Polya (1957) yang menyatakan bahwa salah satu tugas penting seorang guru dalam pengajaran adalah membantu peserta didik. Oleh karena itu, agar seorang pendidik dapat membantu peserta didik secara alami, maka pendidik seharusnya dapat mentransposisi pengetahuan dengan menempatkan diri dalam peran sebagai seorang peserta didik agar dapat memahami cara berpikir dan melihat masalah dari sudut pandang peserta didik serta bertanya kepada diri sendiri tentang langkah apa yang akan dipilih oleh peserta didiknya. (Brousseau, 2002; Sbaragli, 2011; Park, 2013). Transisi item pengetahuan dari saat dihasilkan (dibuat) dan digunakan, dipilih dan direncanakan untuk diajarkan, sampai benar-benar diajarkan di lembaga pendidikan tertentu (Chevallard & Bosch, 2014).

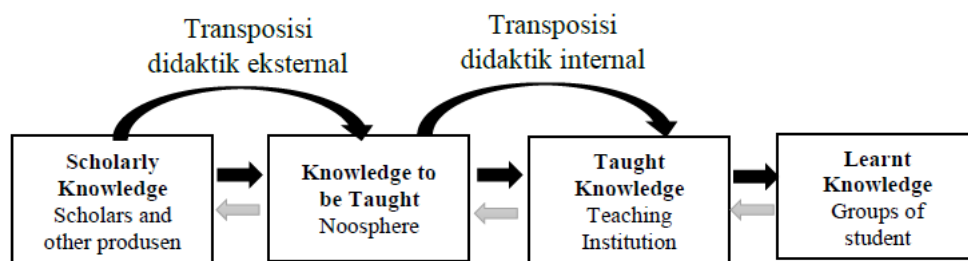
Pengertian ini menunjukkan bahwa objek pengetahuan yang diajarkan di sekolah, dalam hal ini matematika, diturunkan dari matematika ilmiah yang dihasilkan oleh matematikawan dan kemudian diadaptasi oleh perancang kurikulum, diajarkan pendidik, serta dipelajari oleh peserta didik (Chevallard & Bosch, 2014; Bergsten, Jabionka, & Klisinska; 2010). Proses perpindahan dari pengetahuan yang diciptakan dan diterapkan ke pengetahuan yang akan diajarkan ini dikenal sebagai transposisi didaktik (Brousseau, 2002; Chevallard, 1988) yang ditampilkan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Proses Transposisi Didaktik

Proses transposisi didaktik dilakukan dengan transposisi eksternal dan transposisi internal. Transposisi didaktik eksternal menggambarkan pergeseran dari matematika ilmiah ke matematika pendidikan. Transposisi didaktik eksternal ini adalah transformasi, interpretasi, dan elaborasi ulang pengetahuan ilmiah menjadi

objek ajar. Akibat elaborasi ulang ini, tidak semua matematika ilmiah dimasukkan ke dalam kurikulum sekolah sehingga terdapat perbedaan antara literatur ilmiah dan teks didaktik dengan tugas pengajaran yang bersifat khusus. Proses ini dilakukan oleh perancang kurikulum dan penulis buku teks matematika untuk sekolah dasar dan menengah. Selain itu, transfer dari matematika sekolah ke objek pengajaran di kelas dalam konteks proses belajar mengajar dilakukan oleh instruktur sebagai bagian dari proses yang dikenal sebagai transposisi didaktik internal (Paun, 2006).



Gambar 1.2 Internal dan Eksternal dalam Proses Transposisi

Pada saat perancang kurikulum, penulis buku teks matematika sekolah, dan instruktur berusaha mengubah objek matematika ilmiah menjadi objek pengajaran di sekolah, mereka harus mengatur ulang objek matematika tersebut sesuai dengan fungsi yang dimaksudkan sehingga dapat diajarkan kepada peserta didik. Sementara itu, perancang kurikulum dan peserta didik akan menghadapi setidaknya dua tantangan signifikan di kelas: manajemen kurikulum dan masalah manajemen kelas (Paun, 2006). Pengaturan kurikulum terkait dengan pengembangan pengetahuan akademik, khususnya transformasi pengetahuan ilmiah tertentu dikonstruksi menjadi pengetahuan yang dapat diajarkan. Jika pengetahuan ilmiah adalah pengetahuan yang digunakan untuk mengembangkan pengetahuan baru sehingga menghasilkan kumpulan teori yang koheren, maka pengetahuan tersebut berbeda dengan pengetahuan yang akan diajarkan, yaitu pengetahuan yang dibawa ke dalam kerangka pengajaran di lingkungan sekolah (Chevallard, 1988). Pada

proses ini, pengetahuan yang akan diajarkan disusun menjadi satu kesatuan yang utuh (Chevallard, 1988; Kang & Kilpatrick, 1992).

Objek matematis seperti definisi, teorema, bukti, masalah, dan solusi bukanlah objek utama yang harus disediakan dalam proses transfer pengetahuan. Matematika juga harus disajikan sebagai alat konseptual untuk mengkonstruksi objek matematika (Harel, 2008). Jika matematika dipandang sebagai alat konseptual untuk mengkonstruksi objek matematika, maka pembelajaran matematika harus diarahkan pada proses penciptaan hal-hal tersebut agar peserta didik dapat memahami objek matematika tertentu dan menerapkannya dalam pemecahan masalah (Suryadi, 2019a). Selain itu, pengaturan kelas dikaitkan dengan penyajian skenario pembelajaran yang membantu peserta didik agar memperoleh informasi atau mempelajari sesuatu. Pada pengertian ini, pengaturan pembelajaran yang ditawarkan adalah salah satu yang dapat memperkenalkan peserta didik terhadap proses dan tujuan pembelajaran matematika. Berkenaan dengan proses penciptaan objek matematika, lingkungan belajar harus memungkinkan terjadinya aktivitas mental, konstruksi aliran berpikir (cara berpikir) yang berkesinambungan, sehingga pada akhirnya diperoleh aliran berpikir yang mengarah pada metode pemahaman objek matematika. Harel (2008) menyebut lingkaran pembelajaran matematika ini sebagai siklus triadik. Dengan demikian, pembelajaran matematika yang diberikan di kelas dapat dianggap sebagai upaya yang dipimpin oleh pendidik untuk memastikan kelancaran kegiatan siklus pembelajaran matematika (Suryadi, 2019a).

Skenario pembelajaran yang ditawarkan harus dapat mendorong proses pembelajaran yang ideal, dan dalam hal ini, salah satu tanggung jawab utama pendidik adalah membangun situasi didaktik di mana proses belajar peserta didik dapat terjadi (Suryadi, 2010a). Empat situasi yang harus ada dalam situasi didaktik diantaranya adalah situasi tindakan yang memungkinkan tindakan mental dalam pembelajaran matematika, situasi formulasi yang memungkinkan peserta didik untuk merumuskan dugaan tentang pengetahuan mereka, dan situasi validasi yang

memungkinkan peserta didik untuk mengkomunikasikan dugaan tentang pengetahuan yang diperoleh (Brousseau, 2002). Situasi tersebut menjadi cara bagi peserta didik untuk menciptakan pemikiran logis berdasarkan bukti dan keadaan pelemagaan yang memungkinkan peserta didik agar memperoleh informasi baru dari pengetahuan yang ada. Prosedur yang harus dijalankan tidak sederhana melainkan rumit. Karena sudah menjadi rahasia umum bahwa keadaan pedagogik yang tidak sesuai dapat menimbulkan kesulitan belajar bagi peserta didik (Brousseau, 2002; Suryadi, 2019a). Hambatan belajar ini merupakan salah satu kendala yang diciptakan oleh keadaan eksternal, yaitu penyajian desain didaktis (Suryadi, 2019a).

Demikian pula penelitian Septyawan, Suryadi, dan Nurjanah (2019) mengungkapkan bahwa tahapan penyajian dan urutan materi konsep fungsi yang tidak sesuai untuk mendukung proses konseptualisasi konsep fungsi yang menunjukkan hambatan didaktis. Pada penelitian lain, Maulida, Suryadi, dan Rosjanuardi (2019) menemukan bahwa alur pembelajaran atau presentasi instruktur yang tidak tepat menyebabkan hambatan didaktik. Selain menciptakan kesulitan belajar, ini menciptakan kesenjangan konseptual antara representasi mental peserta didik dan gagasan ilmiah. Karena solusi untuk masalah ini, teori transposisi didaktik disajikan, karena ada tahapan yang harus diselesaikan dalam proses transposisi didaktik sebelum menyajikan pengetahuan ilmiah sebagai pengetahuan yang diajarkan (Kang & Kilpatrick, 1992; Suryadi, 2019b). Dengan demikian, diharapkan bahwa proses transposisi didaktik yang dijalankan dengan baik akan menghasilkan pengembangan penuh kurikulum pendidikan matematika, buku teks matematika yang mampu mentransmisikan informasi yang sangat baik, dan pengaturan pembelajaran yang sesuai. Oleh karena itu, keberhasilan atau kegagalan proses pembelajaran dan pengetahuan yang diperoleh peserta didik bergantung pada bagaimana perancang kurikulum, penulis buku teks, dan pendidik melakukan proses transposisi didaktik.

Namun di sisi lain disadari pula bahwa proses transposisi didaktis bukanlah pekerjaan yang sederhana, karena pendidik tidak hanya memikirkan substansi matematika tetapi juga perlu mempertimbangkan keterkaitan struktural konsep dan keterkaitannya. dari garis pemikiran yang mungkin dialami peserta didik (Suryadi, 2019b). Berkaitan dengan hal tersebut, proses transposisi didaktis harus dilakukan secara terus menerus sebagai upaya untuk meningkatkan proses belajar mengajar matematika dari waktu ke waktu. Proses transposisi didaktis dapat dimulai dalam praktik perkuliahan di perguruan tinggi. Tahapan dalam proses transposisi ini dapat dimulai dengan melakukan proses repersonalisasi dan rekontekstualisasi pengetahuan yang dipilih untuk diajarkan, kemudian dilanjutkan dengan mengkaji kurikulum dan buku teks matematika sekolah, hingga menghasilkan desain desain pembelajaran.

Berdasarkan proses transposisi didaktis yang dilakukan, peserta didik akan memperoleh pengetahuan, yaitu pengetahuan diskursif berupa objek matematika sebagai pengetahuan ilmiah yang telah dibangun dan pengetahuan yang diajarkan (*taught knowledge*) sebagai pengetahuan dari hasil proses transposisi yang kemudian disajikan dalam bentuk teks dan implementasi desain pembelajaran. Lebih lanjut Suryadi (2019b) mengidentifikasi dua bentuk pengetahuan yang berasal dari proses transposisi, yaitu pengetahuan transposisi didaktik dan pengetahuan transposisi pedagogik. Pengetahuan transposisi didaktis dihasilkan ketika peserta didik menerapkan pengetahuan akademisnya untuk mengembangkan desain didaktis dan merancang antisipasi didaktis. Sementara itu, pengetahuan transposisi pedagogis terbentuk ketika peserta didik mengevaluasi respon peserta didik berdasarkan pengalaman dan pengetahuan yang beragam sehingga dapat menumbuhkan antisipasi pedagogisnya (Suryadi, 2019b).

Sebelum konsep matematika diajarkan di kelas, definisi dan deskripsi konsep ini mengalami transformasi untuk dapat diajarkan di kelas tertentu. Transformasi ini dijalankan dalam praktik kelas pendidik dan juga oleh aktor lain di bidang yang diajarkan (Chevallard & Bosch, 2014). Transformasi tersebut dapat

diberi label transposisi didaktik (Chevallard, 2006). Penulis buku teks adalah contoh aktor, dan buku teks biasanya merupakan contoh transformasi matematika untuk tujuan pengajaran matematika. Pada penelitian ini, buku teks dieksplorasi dari sudut pandang guru dan pengajaran. Akibatnya, buku teks dilihat sebagai salah satu deskripsi tentang bagaimana matematika dapat diajarkan.

Praktik mengajar guru telah dipelajari dari fokus perspektif individu, misalnya pengambilan keputusan guru tentang praktik mengajar mereka atau pengetahuan individu guru (Bishop & Whitfield, 1972; Borko, Roberts, & Shavelson, 2008; Schoenfeld, 2011). Secara umum, studi dengan perspektif individu adalah fokus individu tanpa atau dengan sedikit memperhitungkan lingkungan sosial dalam tindakan individu tersebut (Lerman, 2000). Lerman (2000) menyarankan giliran di mana individu tidak hanya dipelajari dalam kaitannya dengan praktik. Kaitan tersebut misalnya dengan studi praktik pengajaran dalam sistem pendidikan, di mana konstruksi wacana pedagogik di berbagai tingkat sistem ini diperiksa (Tsatsaroni, Ravanis, & Falaga, 2003), atau bagaimana tingkat yang berbeda dari sistem pendidikan berpartisipasi dalam menentukan kemungkinan praktik pengajaran (Artigue & Winslow, 2010). Dari perspektif sosial-politik, Valero (2004) mengkritik studi sosio-kultural di mana para peneliti menyelesaikan asumsi bahwa peserta didik dan pendidik adalah makhluk sosial. Valero (2004) menyarankan lebih banyak minat pada alasan bagaimana praktik dinilai sebagai cara pengajaran yang benar. Hal itu dapat menyiratkan bahwa memahami konteks seputar praktik pengajaran sebagai hubungan yang saling terkait dan akan lebih kuat dibandingkan dengan memahami konteks ini secara terpisah. Untuk fokus pada perspektif mikro individu guru dan perspektif makro dari konteks sekitarnya telah digambarkan sebagai giliran dari praktik.

Pada studi tersebut, individu dianggap sebagai aktor penting karena keterampilan praktis ketika menghadapi kendala dari konteks sekitar yang membuat suatu perbedaan (Whittington, 2006). Seringkali, buku teks matematika digambarkan sebagai sumber utama untuk pengajaran matematika (Pepin &

Haggerty, 2003). Buku teks dapat menginformasikan organisasi pengajaran matematika, misalnya ketika pendidik mendasarkan pengajaran yang secara garis besar bertumpu pada apa yang disajikan dalam buku teks sembari mengajarkan secara sistematis melalui seluruh isi buku teks (Barr, 1988). Buku teks juga digambarkan sebagai terjemahan kebijakan ke dalam praktik (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002) atau sebagai resep otoritas tentang apa yang diajarkan matematika dan bagaimana melakukannya (Barbé, Bosch, Espinoza, & Gascon, 2005). Pengaruh buku teks pada pengajaran matematika telah digambarkan baik secara tidak langsung, ketika buku teks memfasilitasi pengajaran bagi pendidik (Pepin & Haggerty, 2003), dan secara langsung ketika pendidik memilih untuk mengadopsi buku teks secara eksklusif tanpa bahan tambahan. Pendidik juga dapat memilih konten tambahan atau mengajar menggunakan struktur yang berbeda dari buku teks (Sosniak & Stodolsky, 1993) atau mempertimbangkan lebih banyak faktor, misalnya data penilaian, ketika mempersiapkan pengajaran matematika (Sullivan, Clarke, Clarke, Farrell, & Gerard, 2013). Buku teks matematika digambarkan sebagai artefak yang sampai batas tertentu mencerminkan praktik pengajaran. Dalam penelitian ini, buku teks matematika dikaji sebagai salah satu contoh konteks yang lebih luas untuk praktik pembelajaran.

Ketika fokus yang tertuju adalah pada penggunaan buku teks, pendidik biasanya menjadi pusat kajian dan penggunaan buku teks sering dipelajari melalui wawancara. Pendidik dapat menggambarkan bagaimana mereka menggunakan panduan (Ahl, Gunnarsdóttir, Koljonen, & Pálsdóttir, 2015) atau menggambarkan bagaimana pendidik mengandalkan buku teks karena tekanan waktu (Pepin & Haggarty, 2001) tetapi juga bagaimana pendidik menggunakan teori, contoh, dan latihan untuk mempengaruhi pengajaran (Viholainen, Partanen, Piironen, Asikainen, & Hirvonen, 2015). Pada penelitian yang dilakukan oleh Lepik, Grevholm, & Viholainen (2015) menyatakan bahwa kuesioner telah digunakan untuk mempelajari bagaimana pendidik mengklaim menggunakan buku teks dalam arti yang lebih luas menggambarkan buku teks matematika sebagai sumber

informasi utama bagi pendidik dalam memutuskan bagaimana menyajikan konten. Pada penelitian tersebut, deskripsi pendidik tentang penggunaan buku teks mendasari kesimpulan tentang persepsi buku teks sebagai teks. Senada dengan Sterholm dan Bergqvist (2013) yang melakukan studi linguistik pada buku teks matematika, menunjukkan bahwa teks lebih kompleks dan teknis bila dibandingkan dengan buku-buku dari mata pelajaran lain. Contoh lain adalah Herbel-Eisenmann (2007) yang melakukan analisis wacana pada buku teks matematika dan mempelajari tujuan ideologis yang mendasari materi kurikulum tertentu. Isi buku teks tersebut dapat dipelajari, misalnya dalam perbandingan antara buku teks bahasa Inggris dan Swedia (Löwenhielm, Marschall, Sayers, & Andrews, 2017). Pada studi tersebut, buku teks bahasa Inggris ditunjukkan untuk menekankan prosedur, sedangkan buku teks Swedia menekankan representasi yang berbeda dari angka dan hal-hal konseptual.

Pada sebuah studi tentang buku teks dan praktik guru, Haggarty dan Pepin (2002) membandingkan praktik dalam konteks Prancis, Jerman, dan Inggris. Para penulis mengadopsi skema dengan menggambar literatur yang beragam untuk mempelajari bagaimana matematika disajikan dalam buku teks dari negara yang berbeda. Grave dan Pepin (2015) menunjukkan bagaimana penggunaan buku teks oleh pendidik menjadi berbeda dalam situasi pengajaran yang berbeda. Menggabungkan analisis buku teks dan observasi dengan analisis dokumen kebijakan, Pepin, Gueudet, dan Trouche (2013) menunjukkan bagaimana tradisi pendidikan dan budaya dalam menjalin cara dari tingkat kebijakan melalui buku teks ke dalam kelas. Johansson (2006) menggambarkan kehadiran langsung buku teks matematika di kelas matematika, tidak hanya dalam pekerjaan peserta didik tetapi juga dalam penjelasan atau contoh pendidik untuk mempelajari komunikasi dalam teks, dan menggambarkan dan menjelaskan topik yang berbeda pada lapisan didaktik dari sebuah buku teks,

Jablonka, Ashjari, dan Bergsten (2016) mengadopsi konsep oleh Bernstein (2000) untuk mempelajari tingkat prinsip klasifikasi buku teks dan kaitannya

dengan anggapan peserta didik sebagai matematika yang relevan untuk dipelajari. Selanjutnya, penelitian tersebut juga menunjukkan bagaimana pengakuan peserta didik terhadap prinsip-prinsip klasifikasi dari wacana pedagogik matematika dikaitkan dengan keberhasilan mereka dalam ujian. Studi-studi ini menyiratkan dengan cara yang berbeda bahwa buku teks matematika membawa gambaran khusus tentang matematika, yang dapat dimasukkan oleh pendidik dalam menegosiasi apa yang harus diajarkan dan bagaimana cara untuk mengajarkannya.

Praksiologi oleh Chevallard (2006) telah diadopsi sebagai metodologi untuk melakukan tinjauan tentang bagaimana matematika diatur dalam konteks yang berbeda di mana pengetahuan dilihat sebagai aktivitas manusia yang digambarkan praksis (mengetahui bagaimana) dan logos (mengetahui mengapa). Larson dan Bergsten (2013) membandingkan perubahan dalam komunikasi kelas ketika peserta didik dipindahkan dari sekolah wajib ke sekolah menengah atas di Swedia. Mereka juga menunjukkan bagaimana bahasa instruksional berbeda dalam hal praksis (pendidik memberitahu peserta didik bagaimana melakukan sesuatu) dan logo (pendidik menjelaskan mengapa). Vendiera-Marechal (2011) berfokus terutama pada praksis di mana jenis tugas dan prosedur yang dijelaskan untuk menyelesaikan tugas-tugas ketika membandingkan praktik mengajar di kelas yang berbeda. Vendiera-Marechal (2011) menjelaskan bagaimanaaksiologi bergantung pada kendala dalam konteks kelas yang lebih luas, misalnya, bagaimana buku teks matematika yang digunakan mempengaruhi pengajaran matematika. Wijayanti dan Winsl w (2017) juga berfokus pada tugas dan teknik ketika mereka menunjukkan bagaimana model referensi aksiologis dapat digunakan untuk menganalisis konten matematika dalam buku teks. Mereka menyarankan bahwa ini dapat dilengkapi dengan diskusi tentang lingkungan diskursif dalam buku teks. Klisinska (2009) juga menjelaskan lingkungan diskursif matematika ilmiah menjadi sistem bahasa khusus fungsional untuk matematikawan di mana konsep didefinisikan dengan baik dan dengan bentuk argumen yang deduktif.

Lingkungan diskursif matematika sekolah di sisi lain digambarkan secara kurang formal untuk pembaca dengan pengetahuan yang tidak begitu khusus dan di mana konsep tidak didefinisikan tetapi diterima begitu saja. Penelitian lain juga menunjukkan bahwa buku teks telah mendominasi praktik pengajaran (Johansson, 2006; Skolverket, 2014). Sebagai konsekuensi dari dominasi tersebut, sebagian besar kurikulum dialihkan ke praktik kelas melalui buku teks namun dengan begitu tidak cukup hanya mengatakan bahwa buku teks mendominasi praktik kelas (Jablonka & Johansson, 2010). Sebaliknya, ada lebih banyak nuansa penggunaan buku teks, seperti yang ditunjukkan oleh Boistrup (2017) dalam kaitannya dengan komunikasi pendidik-peserta didik yang menunjukkan jejak pengaruh buku teks. Dominasi buku teks di kelas matematika, bagaimanapun sering dikritik dalam debat publik di Swedia, terutama dari perspektif otoritas sekolah seperti Inspektorat Sekolah Swedia (Skolinspektionen, 2009). Hal tersebut menunjukkan bahwa peserta didik mengerjakan latihan dari buku teks selama pelajaran matematika selama sekitar 70% (Bergqvist et al., 2010). Akibatnya, buku teks secara substansial mempengaruhi kesibukkan peserta didik di kelas matematika. Sebagaimana dilaporkan dalam konteks yang berbeda, baik nasional maupun internasional, penggunaan buku teks matematika sebagai sumber utama dalam kaitannya dengan praktik mengajar pendidik menjadi begitu penting untuk dipelajari, dan metodologi untuk studi semacam itu perlu dikembangkan.

Bergqvist et al., (2010) menyatakan bahwa praktik mengajar pendidik diberlakukan dalam kaitannya dengan sumber di luar praktik kelas secara langsung dengan buku teks sebagai sumber utamanya. Melalui perbandingan observasi kelas dan buku teks, dimungkinkan untuk menafsirkan transformasi konsep matematika dalam hal apa yang dikomunikasikan dan bagaimana caranya. Pada penelitian Bergqvist et al., (2010), buku teks matematika dipandang sebagai teks yang menawarkan serangkaian latihan, prosedur, dan penjelasan untuk memahami praktik mengajar pendidik dalam kaitannya dengan teks yang membutuhkan kerangka kerja. Tujuan dari penelitian tersebut adalah untuk mengeksplorasi

bagaimana praksiologi dapat digunakan dalam metodologi di mana praktik pengajaran matematika dan buku teks ditekankan sebagai dua konteks yang saling terkait. Lebih khusus, penelitian tersebut bertujuan untuk mempelajari kekhasan instruksi matematika di kelas dalam kaitannya dengan instruksi dalam buku teks matematika, sambil mengadopsi praksiologi sebagai kerangka kerja untuk perbandingan. Pada perbandingan tersebut, dilakukan eksplorasi tentang bagaimana praksiologi dalam proses transposisi didaktis dapat digunakan untuk membandingkan praktik pendidik matematika seperti yang diamati di kelas dengan praktik seperti yang disimpulkan dari buku teks.

Berkaitan dengan transposisi didaktis, juga telah banyak penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, antara lain Kang & Kilpatrick (1992) yang mempelajari transposisi didaktis dalam buku teks matematika, Postelnicu (2017) yang meneliti transposisi didaktis pada materi aljabar di sekolah, Putra (2016) yang mengkaji evaluasi pengetahuan guru tentang perkalian pecahan menggunakan teori antropologi didaktik, dan Lundberg & Kilham (2018) yang mengkaji transposisi pengetahuan pada konsep perbandingan. Sebagian besar hasil penelitian transposisi didaktis ini mengkaji fenomena transfer pengetahuan pada bidang-bidang kesulitan tertentu. Berbeda dengan penelitian ini, dimana dalam penelitian ini peneliti tidak hanya melihat dan menganalisis fenomena *transfer of knowledge*, tetapi juga peneliti ingin melihat fenomena yang menunjukkan dampak *transfer of knowledge* dan fenomena proses transposisi didaktis yang dilakukan oleh mahasiswa calon guru matematika. Pada penelitian yang dilaksanakan, sebelum membantu mahasiswa calon guru matematika, peneliti terlebih dahulu berupaya untuk memperoleh pengalaman berpikir dalam memahami konsep dasar turunan secara mendalam dan bermakna melalui kajian literatur dan *Focus Group Discussion* (FGD) dengan matematikawan berdasarkan proses berpikir reflektif maupun dengan pendekatan Zemi, yaitu pendekatan yang menekankan melalui eksposisi secara bertahap dan iteratif (Suryadi, 2019) serta melalui proses aksi mental (Harel, 2008) sebagai landasan untuk melakukan proses transposisional pada

penelitian yang berjudul “Transposisi Konsep Dasar Turunan pada Mahasiswa Calon Guru Matematika” di mana peneliti memposisikan diri sebagai pembelajar kemudian berubah (*transpose*) menjadi seorang pengajar atau sebaliknya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk melakukan tinjauan terhadap proses transposisi eksternal pada pembelajaran konsep turunan di level sekolah dan universitas sehingga menjadi dasar bagi peneliti untuk melakukan transposisi internal kepada mahasiswa calon guru matematika sebagai agen yang akan mengajarkan konsep turunan di level sekolah. Adapun proses transposisi internal yang dilakukan tentang konsep dasar turunan dilakukan pada konteks *knowledge to be taught*, *taught knowledge*, serta *learnt knowledge* terhadap mahasiswa calon guru matematika sehingga mahasiswa calon guru matematika dapat memperoleh pengetahuan transposisional tentang konsep turunan dan dapat merumuskan pengetahuan untuk diajarkan (*knowledge to be taught*) dalam bentuk outline desain pembelajaran konsep turunan yang diajarkan di sekolah.

1.3 Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan tujuan penelitian yang telah disampaikan, pertanyaan penelitian ini adalah:

1. Bagaimana karakteristik *knowledge to be taught* pada konsep turunan ditinjau dari *concept image* dan *learning obstacles* mahasiswa calon guru matematika pada tahap prospektif?
2. Bagaimana susunan lintasan belajar hipotesis atau *hypothetical learning trajectory* terhadap mahasiswa calon guru matematika?
3. Bagaimana implementasi desain pembelajaran didaktik yang disusun untuk membantu mahasiswa calon guru matematika memperoleh pengetahuan transposisional?

4. Bagaimana hasil implementasi desain pembelajaran didaktik dalam konteks *learnt knowledge* dan *taught knowledge* pada tahap metapedadidaktik?
5. Bagaimana pengetahuan yang dihasilkan mahasiswa dari proses transposisi didaktik yang telah dilakukan ditinjau dari tahap retrospektif?

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan bermanfaat baik dari aspek teoritis, kebijakan, praktis, maupun isu serta aksi sosial bagi praktisi maupun pemangku kebijakan dalam bidang pendidikan. Adapun manfaat dari penelitian yang diharapkan, yaitu:

1. Aspek teoritis

Penelitian yang dilakukan diharapkan dapat memberikan kontribusi secara teoritis bagi perkembangan penelitian pendidikan matematika, khususnya dalam perancangan desain pembelajaran matematika sebagai upaya peningkatan pembelajaran matematika di level sekolah maupun perguruan tinggi.

2. Aspek teoritis

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran pada para pemangku kebijakan untuk menerapkan penelitian transposisi didaktik sebagai salah satu upaya perbaikan pembelajaran matematika, sekaligus sebagai inovasi pembelajaran dalam mengembangkan kemampuan mahasiswa calon guru matematika.

3. Aspek praktis

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan pengetahuan pendidik dalam merencanakan dan melaksanakan serta mengevaluasi pembelajaran matematika yang terjadi pada mahasiswa calon guru matematika. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan pengetahuan dalam melakukan proses transposisi didaktik dengan memperhatikan kesesuaian antara karakteristik dari konsep yang diajarkan, kurikulum pendidikan, dan karakteristik individu.

4. Aspek isu dan aksi sosial

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan masukan bagi perguruan tinggi dan para dosen untuk dapat berperan dalam mengembangkan kemampuan mahasiswanya untuk melakukan proses transposisi didaktik.

1.5 Definisi Operasional

1. Konsep Dasar Turunan

Fungsi $f: x \rightarrow y$ atau $y = f(x)$ mempunyai turunan yang dinotasikan dengan $y' = f'(x)$ atau $dy = df(x)$ di mana turunan tersebut definisikan dengan persamaan $f'(x) = df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Pada penelitian yang dilaksanakan, konsep turunan yang dikaji dibatasi pada definisi konsep turunan dan konsep lain yang berkaitan.

2. Transposisi Didaktis

Pada penelitian ini, transposisi yang dimaksud adalah transformasi objek pengetahuan dari peneliti kepada subjek berdasarkan pengetahuan ilmiah (*scholarly knowledge*) yang dibangun oleh peneliti dari hasil studi literatur dan *Focus Guide Discussion* bersama matematikawan. Selanjutnya *scholarly knowledge* tersebut dirancang dan dipilih (*knowledge to be taught*) dengan mengacu pada hasil analisis *concept image* dan *learning obstacles* untuk menyusun alternatif desain didaktis (*taught knowledge, learnt knowledge*) agar konstruksi pengetahuan konsep dasar turunan menjadi lebih bermakna.

3. *Concept Image* dan *Concep Definition*

Pada penelitian ini, *concept image* diekspresikan sebagai kumpulan citra mental bersama dengan proses dan properti yang terkait dengan suatu konsep yang telah dipelajari. *Concept image* berperan untuk menggambarkan struktur kognitif total yang terkait dengan konsep, karakteristik, dan proses citra mental yang ada

dalam pikiran individu. Selain itu, *concept image* adalah gambar non-verbal dalam pikiran seseorang dan menjadi representasi visual atau gambaran mental dari suatu konsep, kumpulan pengalaman dalam kehidupan sehari-hari. Sedangkan istilah *concept definition* adalah bagian dari gambaran konsep untuk menjelaskan atau mengartikan konsep dalam bentuk kata-kata. *Concept definition* mungkin koheren dengan definisi matematika formal, yaitu definisi konsep yang biasanya diterima oleh komunitas matematika dalam skala besar. Jadi, di satu sisi, *concept image* individu termasuk dalam definisi yang benar secara formal. Di sisi lain, secara intuitif, gagasan utama yang digunakan manusia untuk membangun perkembangan teoretis lebih lanjut seringkali tidak keluar dari definisi formal. Oleh karena itu, kemampuan mengingat definisi formal itu sendiri tidak selalu berkaitan dengan *concept image*. Selama pembentukan konsep, hubungan antara citra konsep dan definisi konsep harus memiliki interaksi yang saling menguntungkan dan saling menguntungkan.

4. *Learning Obstacles*

Hambatan belajar atau *learning obstacle* yang dimaksud adalah hasil dari pengetahuan yang diperoleh sebagian-sebagian dan tidak sesuai dengan fakta yang ada. Terdapat tiga jenis *learning obstacles*, di antaranya *ontogenic obstacle*, *epistemological obstacles*, dan *didactical obstacles*. *Ontogenic obstacles* atau hambatan ontogenik yaitu hambatan yang terjadi karena keterbatasan dari peserta didik dalam suatu pengembangan diri atau berkaitan dengan kesiapan mental belajar peserta didik. Hal tersebut dapat diakibatkan oleh belum cukupnya usia peserta didik dalam mempelajari suatu tingkat belajar tertentu. Hambatan tersebut pada umumnya akan hilang secara alami seiring dengan perkembangan fisik dan mental individu. Hambatan ontogenik juga dapat hilang dengan cara pelatihan terhadap peserta didik untuk menghadapi permasalahan-permasalahan secara bertahap guna meningkatkan kesiapan mental tersebut. Selanjutnya adalah *epistemological obstacles* yaitu hambatan yang terjadi karena keterbatasan

kemampuan peserta didik pada konteks tertentu. Hambatan tersebut mengakibatkan peserta didik mengalami kesulitan dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan nonrutin. Selain itu, hambatan epistemologis juga dapat terjadi karena pada proses pembelajaran ketika peserta didik hanya diberikan konteks yang terbatas oleh guru sehingga kemampuannya tersebut tidak terlatih untuk menghadapi permasalahan baru. Serta yang terakhir adalah *didactical obstacles* yaitu hambatan yang disebabkan karena implementasi dari desain pembelajaran sebelumnya. Hambatan didaktis juga dapat terjadi karena adanya loncatan materi atau pengulangan materi yang tidak efisien. Akibatnya, tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan sebelumnya tidak tercapai dengan baik.

5. *Learning Trajectory*

Lintasan pembelajaran atau *learning trajectory* merupakan alur yang dilalui oleh peserta didik dalam proses belajar. *Learning trajectory* terdiri dari tiga bagian, yaitu: 1) *a mathematical goal* yaitu sebuah tujuan pembelajaran matematika seperti mengelompokkan konsep-konsep dan kemampuan-kemampuan secara matematis merupakan hal yang pokok dan berguna dalam pembelajaran selanjutnya; 2) *a development path along which children develop to reach that goal* yaitu jalur perkembangan yang disesuaikan dengan perkembangan pola pikir peserta didik untuk mencapai tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan yaitu mengembangkan pemahaman dan kemampuan tentang topik matematika; 3) *a set of instructional activities, or task, matched to each of the level of thinking in that path that help children develop ever-higher levels of thinking* yaitu berupa sekumpulan tugas pembelajaran yang sesuai dengan topik yang diajarkan serta cocok untuk tingkat berpikir peserta didik guna mendorong perkembangan berpikir peserta didik dari satu tingkat ke tingkat yang lebih tinggi (Clements & Sarama, 2009). *Learning trajectory* merupakan pijakan dalam pembuatan desain didaktis guna membantu peneliti dalam menjawab pertanyaan mengenai tujuan pembelajaran yang akan

dicapai serta bagaimana langkah-langkah pembelajaran yang harus ditempuh guna mencapai tujuan pembelajaran dengan mempertimbangkan *learning obstacles*.

6. *Didactical Design Research*

Secara singkat, *Didactical Design Research* pada penelitian ini terdiri dari tiga tahapan yaitu: 1) tahap prospektif yaitu analisis situasi didaktis sebelum pembelajaran yang wujudnya berupa disain didaktis hipotesis termasuk antisipasi didaktis pedagogis; 2) analisis metapedadidaktik, yaitu analisis terhadap relasi antara peneliti, subjek dan materi yang terjadi selama pelaksanaan desain didaktis; 3) serta analisis retrospektif yaitu analisis yang mengaitkan hasil analisis situasi didaktis hipotesis dengan hasil analisis metapedadidaktik.

Didactical Design Research (DDR) menggambarkan bahwa hubungan antara guru, peserta didik, dan materi sebagai sebuah segitiga didaktis yang menggambarkan hubungan didaktis (HD) antara peserta didik dan materi, serta hubungan pedagogik (HP) antara guru dan peserta didik. Namun hubungan didaktis dan pedagogis tidak bisa dipandang secara parsial melainkan perlu dipahami secara utuh karena pada kenyataannya kedua hubungan tersebut dapat terjadi secara bersamaan. Berdasarkan hal tersebut, ditambahkan antisipasi didaktis dan pedagogis (ADP) dalam segitiga didaktis di mana peran guru yang paling utama adalah menciptakan situasi didaktis sehingga terjadi proses belajar dalam diri peserta didik. Dengan demikian, seorang pendidik selain perlu menguasai materi ajar, juga perlu memiliki pengetahuan lain yang terkait dengan peserta didik serta mampu menciptakan situasi didaktis yang dapat mendorong proses belajar secara optimal.