

## BAB III PEMBAHASAN

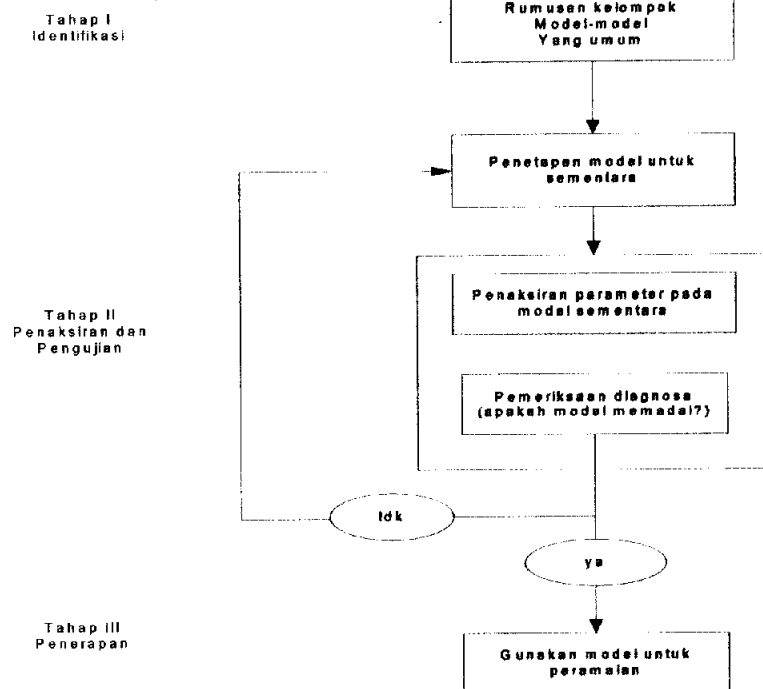
### 3.1 Pendahuluan

Terdapat lima tahap dalam pembentukan model menggunakan metode Box-Jenkins yaitu :

1. Pemeriksaan kestasioneran data
2. Identifikasi model
3. Penaksiran parameter pada model
4. Pengujian
5. Penggunaan model untuk peramalan

Berikut ini merupakan skema umum dalam pendekatan Box-Jenkins

(Makridakis:1983):



Gambar 3.1 Skema Pendekatan Box-Jenkins

### 3.2 Pemeriksaan Kestasioneran Data

Data runtun waktu dikatakan stasioner jika tidak terdapat kecenderungan peningkatan atau penurunan pada data tersebut, atau dengan kata lain fluktuasi data berada di sekitar nilai rata-rata dan varians yang konstan serta tidak bergantung pada waktu.

Stasioneritas dapat dilihat salah satunya adalah melalui plot dari data runtun waktu dan plot autokorelasinya. Autokorelasi dari data yang nonstasioner membentuk suatu trend searah diagonal dari kanan ke kiri bersama dengan meningkatnya jumlah *time-lag* (selisih waktu).

Pengujian stasioneritas data runtun waktu juga dapat dilakukan melalui *Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test* (Gujarati, 2003). Langkah-langkah pengujiannya adalah sebagai berikut :

1) Hipotesis

$$H_0 : \delta = 0 \quad (\text{data deret waktu tidak stasioner})$$

$$H_1 : \delta < 0 \quad (\text{data deret waktu stasioner})$$

2) Statistik Uji :

$$\tau_{\delta} = \hat{\delta} / (se(\hat{\delta})) \quad (3.1)$$

3) Kriteria Pengujian

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika } |\tau_{\delta}| \geq |\tau_{(n,\alpha)}| \text{ Dickey-Fuller}$$

dengan :  $\rho, \delta$  = parameter yang ditaksir

$\varepsilon_t$  = diasumsikan mengikuti proses white noise

Jika hasil pengujian menunjukkan bahwa data runtun waktu tidak stasioner maka untuk menanggulangnya dilakukan dengan transformasi data dan atau pembedaan.

### 3.3 Transformasi Data

Terdapat dua jenis ketidakstasioneran dalam data runtun waktu yaitu tidak stasioner dalam rata-rata dan tidak stasioner dalam varians. Untuk menghilangkan ketidakstasioneran dalam varians, maka dapat digunakan power transformasi (Wei, 1994) berikut ini :

**Tabel 3.1 Power Transformasi**

Nilai $\lambda$	Transformasi
-1,0	$1/z_t$
-0,5	$1/\sqrt{z_t}$
0,0	$\ln z_t$
0,5	$\sqrt{z_t}$
1,0	Tidak ada

dengan  $\lambda$  adalah parameter transformasi yang dapat ditaksir dari data runtun waktu dan  $t = 1, 2, \dots, n$ . Untuk mengetahui apakah data memerlukan transformasi atau tidak, maka digunakan analisis dengan menggunakan *Box-Cox Plot* (dengan menggunakan program minitab14). Bentuk transformasinya bisa dilihat pada tabel 3.1. Jika diperlukan, sebaiknya transformasi ini dilakukan sebelum pembedaan (*differencing*).

### 3.4 Pembedaan (*Differencing*)

Data runtun waktu yang tidak stasioner dalam rata-ratanya dapat distasionerkan dengan melakukan proses pembedaan (*differencing*) orde ke-d. Proses pembedaan ini dilakukan dengan menggunakan operator differensi, yaitu:

$$\nabla Z_t = Z_t - BZ_t = (1 - B)Z_t.$$

Jika data selisih pertama belum stasioner, maka dilakukan penyelisihan kedua, yaitu:

$$\nabla^2 Z_t = Z_t - 2BZ_t + B^2 Z_t = (1 - B)^2 Z_t$$

dan seterusnya.

Secara umum apabila terdapat pembedaan orde ke-d untuk mencapai stasioneritas data maka ditulis :

$$\nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t. \quad (3.2)$$

Proses pembedaan dilakukan sampai fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsial dari variabel baru  $Z_t$  mempunyai pola proses ARMA.

### 3.5 Faktor Musiman (*Seasonality*)

Musiman didefinisikan sebagai suatu pola yang berulang-ulang dalam selang waktu yang tetap (Makridakis, 1983). Adanya faktor musiman dapat dilihat melalui grafik autokorelasi.

Stasioneritas data runtun waktu yang mengandung faktor musiman dapat dicapai dengan melakukan pembedaan sebesar periode musimannya. Pembedaan musiman dari  $Z_t$  kita tulis dengan  $x_t$ , sehingga

$$x_t = (1 - B^s)z_t \quad (3.3)$$

dengan  $s$  adalah jumlah periode per musim.

### 3.6 Identifikasai Model

Identifikasi model dilakukan terhadap data yang sudah stasioner. Secara umum model ARIMA musiman (Seasonal ARIMA/SARIMA) adalah sebagai berikut :

#### a) Proses AR Musiman (*Seasonal Autoregressiv/SAR*)

Bentuk umum dari proses AR musiman yaitu:

$$Z_t = \phi_s Z_{t-s} + \phi_{2s} Z_{t-2s} + \dots + \phi_{Ps} Z_{t-Ps} + a_t \quad (3.4)$$

dimana  $P$  adalah kelipatan  $s$  terbesar dalam model itu. Untuk membedakan dengan model selain musiman, maka notasi pada persamaan 3.4 diubah, yakni:

$$\phi_{Ps} = \Gamma_P \quad (3.5)$$

sehingga persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai:

$$Z_t = \Gamma_1 Z_{t-s} + \Gamma_2 Z_{t-2s} + \dots + \Gamma_P Z_{t-Ps} + a_t \quad (3.6)$$

yang dikenal sebagai proses AR musiman tingkat  $P$ .

#### b) Proses MA Musiman (*Seasonal Moving Average/SMA*)

Proses MA mempunyai spesifikasi sebagai berikut:

1. Jika  $s$  adalah banyak observasi per periode musim, maka tingkat proses MA merupakan kelipatan dari  $s$ .
  2. Koefisien yang tidak nol hanyalah koefisien yang subskripnya kelipatan  $s$ .
- bentuk umumnya yaitu :

$$Z_t = a_t + \theta_s a_{t-s} + \theta_{2s} a_{t-2s} + \dots + \theta_{Qs} a_{t-Qs} \quad (3.7)$$

dimana  $Q$  adalah kelipatan  $s$  terbesar dalam model itu. Jadi tingkat proses itu adalah  $Qs$ . Untuk membedakan dengan model selain musiman, maka notasi pada persamaan (3.7) diubah, yakni:

$$\Delta_Q = \theta_{Qs} \quad (3.8)$$

sehingga persamaan (3.7) dapat ditulis sebagai

$$Z_t = a_t + \Delta_1 a_{t-s} + \Delta_2 a_{t-2s} + \dots + \Delta_Q a_{t-Qs} \quad (3.9)$$

### c) Model ARIMA Musiman (*Seasonal* ARIMA/SARIMA)

Bentuk yang lebih umum dari proses AR dan MA adalah model yang memuat keduanya. Model seperti ini akan berbentuk:

$$Z_t = \Gamma_1 Z_{t-s} + \dots + \Gamma_p Z_{t-ps} + a_t + \Delta_1 a_{t-s} + \dots + \Delta_Q a_{t-Qs} \quad (3.10)$$

Model yang lebih umum lagi adalah yang menampung kemungkinan bahwa runtun waktu musiman itu *nonstasioner*, yang runtun waktu selisih musimannya adalah runtun waktu musiman yang stasioner. Dengan menggunakan persamaan (3.3), maka persamaan (3.10) menjadi

$$x_t = \Gamma_1 x_{t-s} + \dots + \Gamma_p x_{t-ps} + a_t + \Delta_1 a_{t-s} + \dots + \Delta_Q a_{t-Qs} \quad (3.11)$$

kerap kali akan bermanfaat untuk menuliskan persamaan itu dalam operator *back shift*  $B$ . Maka persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai

$$(1 - \Gamma_1 B^s - \dots - \Gamma_p B^{ps})(1 - B^s)^1 Z_t = (1 + \Delta_1 B^s + \dots + \Delta_Q B^{Qs}) a_t \quad (3.12)$$

karena  $(1 - B^s)^1 z_t = x_t$ . Jika runtun waktunya baru stasioner pada selisih musiman ke  $D$ , maka model runtun waktu musimannya dapat ditulis sebagai

$$(1 - \Gamma_1 B^s - \dots - \Gamma_p B^{ps})(1 - B^s)^D Z_t = (1 + \Delta_1 B^s + \dots + \Delta_Q B^{Qs}) a_t \quad (3.13)$$

d) Model Musiman Multiplikatif Umum

Tenyata persamaan (3.13) dipandang masih sangat kurang sempurna untuk menggambarkan berbagai model runtun waktu, karena persamaan tersebut tidak menggambarkan adanya interaksi antara observasi, kecuali observasi pada kelipatan lag musiman. Hal inilah yang menjadi penyebab dikembangkannya model multiplikatif ini.

Untuk model musiman

$$(1 - \Gamma_1 B^s - \dots - \Gamma_p B^{ps})(1 - B^s)^D Z_t = (1 + \Delta_1 B^s + \dots + \Delta_q B^{qs}) \varepsilon_t \quad (3.14)$$

dengan input gerakan  $\varepsilon_t$  dihasilkan dari proses ARIMA

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d \varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) a_t \quad (3.15)$$

dengan menggabungkan persamaan (3.14) dan (3.15) maka diperoleh model multiplikatif umum yaitu

$$(1 - \Gamma_1 B^s - \dots - \Gamma_p B^{ps})(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B^s)^D (1 - B)^d Z_t = (1 + \Delta_1 B^s + \dots + \Delta_q B^{qs})(1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) a_t \quad (3.16)$$

dimana persamaan tersebut mempunyai mean = 0.

Notasi model *Seasonal* ARIMA (SARIMA) untuk menangani aspek musiman multiplikatif adalah

$$ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)^S \quad (3.17)$$

The diagram illustrates the components of the SARIMA notation  $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)^S$ . Three boxes at the bottom are connected by arrows to the corresponding parts of the notation above:

- The first box, labeled "Bagian yang tidak musiman dari model", points to the non-seasonal part  $(p, d, q)$ .
- The second box, labeled "Bagian musiman dari model", points to the seasonal part  $(P, D, Q)$ .
- The third box, labeled "S = Jumlah periode per musim", points to the superscript  $S$ .

Karena sifat multiplikatif persamaan (3.16),  $Z_t$  dapat dipandang dihasilkan oleh persamaan musiman (3.14) dengan gerakan input runtun waktu tak musiman  $\epsilon_t$  atau dapat dipandang dihasilkan oleh model tak musiman

$$(1 - \phi_1 B^s - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d Z_t = (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) V_t \quad (3.18)$$

dengan  $V_t$  gerakan input musiman yang dihasilkan menurut

$$(1 - \Gamma_1 B^s - \dots - \Gamma_p B^{ps})(1 - B^s)^D V_t = (1 + \Delta_1 B^s + \dots + \Delta_q B^{qs}) a_t \quad (3.19)$$

runtun waktu  $V_t$  dapat dipandang sebagai runtun waktu musiman yang berkaitan dengan  $Z_t$  dan runtun waktu  $\epsilon_t$  sebagai runtun waktu tak musiman.

### 3.7 Penaksiran Parameter

Setelah satu atau beberapa model sementara untuk runtun waktu musiman diidentifikasi, maka selanjutnya adalah mencari penaksir terbaik untuk parameter pada model itu.

Apabila banyak observasi cukup besar, maka penaksiran parameter dilakukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Fungsi logaritma kemungkinan bersama dari distribusi normal adalah:

$$\ln L(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_a^2 - \frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n a_t^2 \quad (3.20)$$

selanjutnya ditaksir nilai  $\phi$  dan  $\theta$  yang memaksimumkan fungsi di atas.

Kemudian menurut Makridakis (1991:406) “terdapat dua cara yang mendasar untuk mendapatkan parameter-parameter tersebut :

1. Dengan cara mencoba-coba (*trial and error*), menguji beberapa nilai yang berbeda dan memilih satu nilai tersebut (atau sekumpulan nilai, apabila



terdapat lebih dari satu parameter yang akan ditaksir) yang meminimumkan jumlah kuadrat nilai sisa (*sum of square residual*).

2. Perbaiki secara iteratif, memilih taksiran awal dan kemudian membiarkan program komputer memperhalus penaksiran tersebut secara iteratif.

Cara kedua lebih disukai karena praktis dan mudah dengan menggunakan program komputer (Makridakis, 1991:406).

### 3.8 Pengujian

Setelah parameter pada model musiman tersebut ditaksir, maka langkah selanjutnya adalah dilakukan pengujian untuk mengetahui apakah model yang ditaksir sesuai dengan data yang ada. Terdapat beberapa langkah atau tahapan yang dapat digunakan dalam pengujian, yaitu :

#### 1 Keberartian Koefisien

Dalam menentukan keberartian koefisien, digunakan kriteria pengujian dimana koefisien dikatakan berarti jika  $|Coef| > 2 SE Coef$ .

#### 2 Uji Kecocokan (*lack of fit*)

- Uji kecocokan atau uji kekurangsesuaian (*lack of fit*) menggunakan uji chi-kuadrat dari statistik Q Box-Pierce untuk memeriksa apakah model sesuai atau tidak dengan data yang ada.

Hipotesis :

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$  (model sesuai)

$H_1 : \text{minimal ada satu } \rho_k \neq 0$  (model tidak sesuai)

Statistik Uji :

$$Q = n \sum_{k=1}^m r_k^2(\hat{a}_i) \quad (3.21)$$

Kriteria Uji :

Tolak  $H_0$  jika nilai  $Q$  lebih besar dari  $\chi^2$  tabel, dengan taraf nyata 5 % dan derajat kebebasan  $(m-p-q)$ .

Dengan,

$m$  = jumlah lag yang diuji

$n$  = jumlah pengamatan

$p$  = jumlah parameter yang ditaksir dari model autoregresif (AR)

$q$  = jumlah parameter yang ditaksir dari model rata-rata bergerak (MA)

$r_k$  = autokorelasi sampel.

- Pengujian hipotesisi diatas dapat juga diuji dengan menggunakan kriteria pengujian tolak  $H_0$  jika  $P\text{-value} < \alpha$ , artinya model diterima jika nilai  $p\text{-value}$  lebih besar dari nilai taraf signifikansi yang diberikan.

### 3 Variansi Sesatan

Langkah yang diambil yaitu dengan membandingkan variansi sesatan setiap model yang ada, kemudian dipilih variansi yang lebih kecil. Adapun rumus untuk mencari variansi model berdasarkan program minitab14, yaitu:

$$\sigma^2 = \frac{SS - MS}{DF} \quad (3.22)$$

