BAB III

ANALISIS FAKTOR

3.1 Model Faktor Ortogonal

Analisis faktor adalah suatu teknik dalam statistika multivariat untuk menganalisis hubungan internal antara variabel-variabel. Menurut Johnson (1956), hubungan antar variabel ini dapat dianggap sebagai hubungan linier dari parameter yang terdapat dalam analisis faktor. Tujuan utama analisis faktor adalah menggambarkan hubungan antara variabel-variabel yang tidak teramati kuantitasnya yang disebut sebagai faktor umum. Analisis faktor dapat diterapkan dalam berbagai bidang, di antaranya: sosial, ekonomi, kesehatan, dan lain sebagainya.

Analisis faktor menyatakan setiap variabel random $X_1, X_2, ..., X_p$ sebagai kombinasi linier dari faktor umum (*common factor*) $F_1, F_2, ..., F_m$ dan faktor khusus (*specific factor*) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p$. Dengan model faktornya adalah

$$\begin{aligned}
X_1 - \mu_1 &= l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \ldots + l_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\
X_2 - \mu_2 &= l_{21}F_2 + l_{22}F_2 + \ldots + l_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \\
X_p - \mu_p &= l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \ldots + l_{pm}F_m + \varepsilon_p.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Misalkan $\mathbf{X}$ adalah vektor random yang teramati dengan p komponen berasal dari populasi homogen, mempunyai vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks varians kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$, sehingga model analisis faktor dengan m faktor umum ($m < p$) pada persamaan (3.2.1) dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut (Johnson, 1956):

$$\underset{(p\times 1)}{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{L}}\ \underset{(m\times 1)}{\mathbf{F}} + \underset{(p\times 1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.2.2}$$

dengan

X_i = variabel random ke-i yang teramati

μ_i = rata-rata variabel ke-i

ε_i= faktor khusus ke-i

F_j = faktor umum ke-j

l_{ij} = *loading* dari variabel ke-i pada faktor ke-j.

Untuk vektor random $\mathbf{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ dipenuhi asumsi berikut ini:

1. $E[\mathbf{F}] = \mathbf{0}_{m\times 1}$, $\quad Cov(\mathbf{F}) = E[\mathbf{F}\mathbf{F}'] = \mathbf{I}_{m\times m}$.

2. $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}_{p\times 1}$, $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] = \boldsymbol{\Psi}_{p\times p} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \ \psi_p \end{bmatrix}$, $\quad i = 1,2,\ldots,p$

   dengan $\boldsymbol{\Psi}$ adalah matriks diagonal dan ψ_i adalah variansi khusus ke-i. (3.2.3)

3. $\mathbf{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ saling bebas (independen), sehingga $Cov(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{F}) = E[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}'] = \mathbf{0}_{p\times m}$.

Dari uraian-uraian diatas, terlihat bahwa faktor-faktor umum tidak saling berkorelasi sehingga model analisis faktor ini disebut model faktor ortogonal. Sedangkan jika faktor-faktor umumnya tidak saling ortogonal disebut model faktor *oblique*. Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas mengenai model faktor ortogonal.

Dari model faktor ortogonal, dihasilkan struktur kovarians untuk variabel random $\mathbf{X}$, yaitu:

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' = (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})'$$
$$= \left(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)((\mathbf{LF})'+\boldsymbol{\varepsilon}')$$
$$= \mathbf{LF}(\mathbf{LF})'+\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})'+\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}'+\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'$$

sehingga

$$\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'$$
$$= E\left[\mathbf{LF}(\mathbf{LF})'+\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})'+\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}'+\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]$$
$$= E\left[\mathbf{LF}(\mathbf{LF})'\right]+E\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})'\right]+E\left[\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}'\right]+E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]$$
$$= E\left[\mathbf{LFF}'\mathbf{L}'\right]+E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{L}'\mathbf{F}'\right]+E\left[\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}'\right]+E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]$$
$$= \mathbf{L}E[\mathbf{FF}']\mathbf{L}'+E[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}']\mathbf{L}'+\mathbf{L}E[\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}']+E[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}']$$
$$= \mathbf{LIL}'+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\boldsymbol{\Psi}$$
$$= \mathbf{LL}'+\boldsymbol{\Psi} \qquad (3.2.4)$$

$$Cov(X_i,X_j) = E[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)']$$
$$= E[(l_{ij}F_i-\varepsilon_i)(l_{ji}F_j-\varepsilon_j)']$$
$$= E[l_{ij}l_{ji}{}'F_iF_j{}'-\varepsilon_i l_{ji}{}'F_j{}'-l_{ij}F_i\varepsilon_j{}'-\varepsilon_i\varepsilon_j{}']$$
$$= l_{i1}^2+l_{i2}^2+\ldots+l_{im}^2+\psi_i \qquad , i=j$$
$$= l_{i1}l_{j1}+l_{i2}l_{j2}+\ldots+l_{im}l_{jm} \qquad , i\neq j.$$

Dengan model (3.2.2), kovarians untuk $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{F}$ juga dapat diperoleh, yaitu:

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{F}' = (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}'$$
$$= \mathbf{LFF}'+\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}'$$

sehingga kovarians dari $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{F}$ diperoleh dari nilai ekspektasinya:

$$
\begin{aligned}
Cov(\mathbf{X},\mathbf{F}) &= E[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{F}'] \\
&= E[(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}'] \\
&= \mathbf{L}E[\mathbf{FF}'] + E[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}'] \\
&= \mathbf{LI}+\mathbf{0} \\
&= \mathbf{L}
\end{aligned}
$$

atau
$$
\begin{aligned}
Cov(X_i,F_j) &= E(X_i-\mu_i)F_j' \\
&= E\left(l_{ij}F_iF_j'\right)+E\left(\varepsilon_iF_j'\right) \\
&= l_{ij}
\end{aligned}
\qquad (3.2.5)
$$

dengan l_{ij} adalah elemen ke-ij dari matriks *loading* **L**.

Loading atau bobot l_{ij} menggambarkan bagaimana setiap variabel random X_i berpengaruh terhadap faktor umum F_j. Bagian dari varians variabel ke-i yang diberikan oleh faktor umum dinamakan komunalitas ke-i. Sedangkan varians X_i yang berasal dari faktor khusus disebut 'keunikan' atau 'variansi khusus' sehingga dapat dituliskan:

$$
\begin{aligned}
Var(X_i) = \sigma_{ii} &= \text{komunalitas + variansi khusus} \\
&= \left(l_{i\,1}^2+l_{i\,2}^2+\ldots+l_{i\,m}^2\right)+\psi_i.
\end{aligned}
$$

Jika komunalitas ke-i dinotasikan dengan h_i^2, maka

$$
h_i^2 = l_{i1}^2+l_{i2}^2+\ldots+l_{im}^2. \qquad (3.2.6)
$$

Jadi, $\sigma_{ii}=h_i^2+\psi_i \quad ,i=1,2,\ldots,p$. Komunalitas ke-$i$ merupakan jumlah kuadrat *loading* dari varibel ke-i pada m faktor umum.

Jika terdapat variabel dengan varians terlampau besar yang dapat mempengaruhi penentuan faktor *loading* maka untuk menghindari masalah tersebut dapat dilakukan pembakuan. Jika setiap variabel random X_i dibakukan sehingga membentuk variabel

$$z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}, \qquad \text{untuk setiap } i = 1,2,\ldots,p$$

Maka diperoleh vektor variabel random yang dibakukan, yaitu:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}.$$

Matriks varians kovarians dari variabel yang dibakukan, yaitu:

$$\mathbf{\Sigma} = E\left(\frac{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\left(\frac{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^t$$

$$= E\left(\begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}\right)$$

$$= E\begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & & \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}}\sqrt{\sigma_{12}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{1p}}\sqrt{\sigma_{1p}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$Cov(\mathbf{z}) = Cor(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\rho}. \tag{3.2.7}$$

Jika variabel yang dibakukan digunakan pada model faktor maka persamaan (3.2.4) menjadi

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\Psi} \tag{3.2.8}$$

dan matriks *loading* menjadi korelasi **X** dan **F** adalah

$$Cor(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \mathbf{L}. \tag{3.2.9}$$

Para ilmuwan analisis faktor merasa kesulitan dalam memfaktorkan matriks varians kovarians ke bentuk $\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\Psi}$, pada saat m (banyaknya faktor) kurang dari p (banyaknya variabel). Ketika $m < 1$, akan terdapat hubungan yang membingungkan pada analisis faktor. Untuk melihat hal tersebut, misalkan ada matriks ortogonal **T** berukuran $m \times m$ sedemikian sehingga $\mathbf{TT}' = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Selanjutnya, persamaan (3.2.2) dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{LTT}'\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}^*\mathbf{F}^* + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.2.10}$$

dengan

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{LT} \qquad dan \qquad \mathbf{F}^* = \mathbf{T}'\mathbf{F}$$

sehingga

$$E(\mathbf{F}^*) = \mathbf{T}' \, E(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

dan $$Cov(\mathbf{F}^*) = \mathbf{T}' \, Cov(\mathbf{F}) \, \mathbf{T} = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}.$$

Untuk dapat membedakan matriks faktor *loading* $\mathbf{L}$ dengan $\mathbf{L}^*$ adalah hal yang sulit. Faktor $\mathbf{F}$ dan $\mathbf{F}^* = \mathbf{T}'\mathbf{F}$ memiliki sifat statistik yang sama, walaupun pada dasarnya $\mathbf{L}$ dan $\mathbf{L}^*$ berbeda. Keduanya memiliki matriks varians dan kovarians yang sama, yaitu $\mathbf{\Sigma}$. Sehingga dapat ditulis:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{LL}' + \mathbf{\Psi} = \mathbf{LTT}'\mathbf{L}' + \mathbf{\Psi} = (\mathbf{L}^*)(\mathbf{L}^*)' + \mathbf{\Psi}. \qquad (3.2.11)$$

Masalah tersebut menimbulkan suatu usulan untuk melakukan rotasi faktor, karena matriks ortogonal berkorespondensi dengan rotasi dari sistem koordinat $\mathbf{X}$.

Analisis faktor dilanjutkan dengan kondisi yang memenuhi hasil penaksiran $\mathbf{L}$ dan $\mathbf{\Psi}$ yang unik. Matriks faktor *loading* kemudian dirotasikan (dikalikan dengan matriks ortogonal), di mana perotasian ditentukan oleh beberapa kriteria penginterpretasian yang mudah/sederhana. Untuk penjelasan lebih lanjut mengenai rotasi faktor akan dibahas pada sub bab selanjutnya.

3.2 Metode Komponen Utama

Metode komponen utama akan digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter yang digunakan dalam analisis faktor. Parameter-parameter yang akan diestimasi adalah variansi khusus, komunalitas, dan matriks faktor *loading*.

Misalkan **X** adalah vektor random yang teramati dengan p komponen yang berasal dari populasi homogen, mempunyai rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks varians kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$. Kemudian, diambil sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan matriks varians kovarians sampel **S**. Untuk mencari penaksir $\hat{\mathbf{L}}$, substitusikan $\boldsymbol{\Sigma}$ dengan S pada persamaan (3.2.4) sehingga diperoleh :

$$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\Psi}}. \tag{3.3.1}$$

Dalam pendekatan analisis komponen utama, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ diabaikan dan **S** dapat difaktorkan menjadi $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$. Untuk memfaktorkan **S** dapat juga digunakan **definisi (2.17)**, sehingga

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}' \tag{3.3.2}$$

dengan **E** adalah matriks ortogonal yang terdiri dari vektor eigen yang telah dinormalisasi $(\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_i = 1)$ untuk matriks S dan

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ adalah nilai eigen untuk S dan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p > 0$.

Untuk menyelesaikan pemfaktoran $\mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}'$ ke dalam bentuk $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, $\boldsymbol{\Lambda}$ difaktorkan menjadi $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ (3.3.4)

dengan

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_p}\end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

sehingga persamaan (3.3.2) dapat menjadi

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}'\\ &=\mathbf{E}\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}'\\ &=\left(\mathbf{E}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{E}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)'.\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Persamaan (3.3.6) merupakan bentuk lain dari $\mathbf{S}=\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, tetapi $\hat{\mathbf{L}}$ tidak dapat didefinisikan sebagai $\mathbf{E}\Lambda^{\frac{1}{2}}$ karena $\mathbf{E}\Lambda^{\frac{1}{2}}$ adalah matriks berukuran $p\times p$ sedangkan $\hat{\mathbf{L}}$ adalah matriks berukuran $p\times m$ dengan $m<p$. Oleh karena itu, diambil Λ_1 yang memuat m nilai eigen terbesar $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_m$ dan $\mathbf{E}_1$ terdiri dari vektor eigen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_m$ yang bersesuaian dengan Λ_1, maka akan diperoleh nilai dari $\hat{\mathbf{L}}$, yaitu:

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}}=\underset{(p\times m)}{\mathbf{E}_1}\,\underset{(m\times m)}{\Lambda_1^{\frac{1}{2}}} \tag{3.3.7}$$

atau

$$\begin{aligned}\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}}&=\underset{(p\times m)}{\left[\mathbf{e}_1\sqrt{\lambda_1}\ \vdots\ \mathbf{e}_2\sqrt{\lambda_2}\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ \mathbf{e}_m\sqrt{\lambda_m}\right]}\\ &=\underset{(p\times m)}{\left[\sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1\ \vdots\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2\ \vdots\ \ldots\ \vdots\ \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m\right]}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{12} & \cdots & \hat{l}_{1m} \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & \cdots & \hat{l}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{l}_{p1} & \hat{l}_{p2} & \cdots & \hat{l}_{pm} \end{bmatrix} \\
&= \left[\hat{l}_{i1}, \hat{l}_{i2}, \ldots, \hat{l}_{im}\right], \qquad i = 1,2,\ldots,p.
\end{aligned} \tag{3.3.8}
$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3.8) maka persamaan (3.2.4) akan menjadi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma} &= \mathbf{LL'} + \mathbf{\Psi} \\
&= \left[\sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1 \vdots \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \vdots \ldots \vdots \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \psi_p \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.3.9}
$$

Representasi dari persamaan (3.3.9) ketika diterapkan pada matriks varians kovarians sampel **S** atau pada matriks korelasi sampel **R** diketahui sebagai solusi komponen utama.

Solusi komponen utama pada model faktor adalah sebagai berikut:

Komponen utama dapat didefinisikan sebagai transformasi dari p variabel asal $X_1, X_2, \ldots, X_p$ yang berkorelasi menjadi p variabel baru $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ yang tidak berkorelasi (Jackson, 1991). Komponen utama pada analisis faktor untuk matriks varians kovarians sampel **S** memiliki pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\hat{\lambda}_1, \hat{\mathbf{e}}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{\mathbf{e}}_2), \ldots, (\hat{\lambda}_p, \hat{\mathbf{e}}_p)$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$. Jika $m < p$ merupakan banyaknya faktor umum, maka matriks yang dihasilkan dari estimasi faktor *loading* $\{\hat{l}_{ij}\}$ didefinisikan sebagai:

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}} = \left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{\mathbf{e}}_1 \ \vdots \ \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{\mathbf{e}}_2 \ \vdots \ \ldots \ \vdots \ \sqrt{\hat{\lambda}_m}\hat{\mathbf{e}}_m \right]. \tag{3.3.10}$$

Estimasi variansi khusus diberikan oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S}-\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, yaitu:

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\psi}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\psi}_p \end{bmatrix} \text{ dengan } \hat{\psi}_i = s_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_{ij}^2 . \tag{3.3.11}$$

Sedangkan estimasi variansi khusus oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{R}-\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, yaitu:

$$\hat{\psi}_i = 1 - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_{ij}^2 . \tag{3.3.12}$$

Komunalitas diestimasi sebagai:

$$\begin{aligned} \hat{h}_i^2 &= \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + \ldots + \hat{l}_{i1}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_{ij}^2 . \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Jika banyaknya faktor umum tidak ditentukan atau tidak diketahui, maka kita dapat mencarinya berdasarkan taksiran nilai eigen sama seperti pada analisis komponen utama. Misalkan matriks sisa $\mathbf{S}\text{-}\left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}\right)$ atau $\mathbf{R}\text{-}\left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}\right)$ merupakan hasil dari pendekatan matriks **S** atau matriks **R** dengan solusi komponen utama. Elemen diagonal pada matriks sisa adalah nol dan jika elemen yang lainnya bernilai kecil maka banyaknya m faktor umum pada model faktor adalah sesuai.

Seharusnya kontribusi beberapa faktor awal pada varians sampel cukup besar. Kontribusi dari varians sampel s_{ii} dari faktor umum pertama adalah $\hat{l}_{i1}$. Varians sampel total didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}) = s_{11} + s_{22} + \ldots + s_{pp}.$$

Kontribusi dari faktor umum pertama adalah

$$\hat{l}_{11}^{\,2} + \hat{l}_{21}^{\,2} + \ldots + \hat{l}_{p1}^{\,2} = \sum_{i=1}^{p} \hat{l}_{i1}^{\,2} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\mathbf{e}}_{i1} \right)^2 = \hat{\lambda}_1 \sum_{i=1}^{p} \hat{\mathbf{e}}_{i1}^{\,2} = \hat{\lambda}_1$$

dengan $\hat{\mathbf{e}}_1$ adalah vektor eigen satuan, artinya memiliki panjang 1. Sehingga, secara umum dapat juga ditulis kontribusi dari faktor ke-j pada varians sampel total adalah

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{l}_{i1}^{\,2} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\mathbf{e}}_{i1} \right)^2 = \hat{\lambda}_j \sum_{i=1}^{p} \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{\,2} = \hat{\lambda}_j . \qquad (3.3.14)$$

Secara umum proporsi dari varians sampel total yang berasal dari faktor umum ke-j adalah

$$\frac{\hat{\lambda}_j}{s_{11} + s_{22} + \ldots + s_{pp}} \quad \text{untuk analisis faktor dari } \mathbf{S}$$

$$\text{atau} \quad \frac{\hat{\lambda}_j}{p} \quad \text{untuk analisis faktor dari } \mathbf{R}. \qquad (3.3.15)$$

Kriteria dari persamaan (3.3.15), seringkali digunakan untuk menentukan banyaknya faktor umum yang sesuai. Banyaknya faktor umum yang ditetapkan pada model akan terus bertambah hingga dicapai proporsi yang sesuai dari varians sampel total yang telah dijelaskan. Penentuan banyaknya faktor umum dapat juga menggunakan bantuan *software* komputer, dengan melihat banyaknya nilai eigen dari matriks korelasi **R** yang lebih besar dari 1 atau dari matriks varians kovarians **S** yang lebih dari rata-rata nilai eigen.

Untuk mengetahui apakah nilai taksiran parameter yang telah diperoleh merupakan solusi yang tepat, maka perlu dihitung nilai RMSR (*Root Mean Square Residual*) dari matriks sisa (Sharma, 1996). RMSR didefinisikan sebagai:

$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} res^2_{ij}}{p(p-1)/2}} \qquad (3.3.16)$$

dengan

res_{ij} = elemen-elemen matriks sisa selain elemen diagonal utama pada variabel ke-i dan variabel ke-j

p = banyaknya variabel.

Semakin kecil nilai RMSR yang diperoleh maka semakin baik metode yang digunakan tersebut.

3.3 Metode Maksimum Likelihood

Selain metode komponen utama, dalam tugas akhir ini akan dipergunakan juga metode maksimum likelihood untuk mengestimasi parameter-parameter dalam analisis faktor. Parameter-parameter yang akan diestimasi adalah variansi khusus dan matriks faktor *loading*.

Misalkan **X** adalah vektor random yang teramati dengan p komponen yang berasal dari populasi homogen, mempunyai mean $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks varians kovarians Σ. Jika masing-masing variabel random X_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ diambil sebanyak n

buah pengamatan dan diasumsikan $\mathbf{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ masing-masing berdistribusi normal maka model faktornya adalah sebagai berikut:

$$\underset{(p\times 1)}{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{L}}\ \underset{(m\times 1)}{\mathbf{F}} + \underset{(p\times 1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}\ .$$

Selanjutnya, dapat ditulis

$$\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}_j = \mathbf{L}\mathbf{F}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j \qquad , j = 1,2,\ldots,n. \tag{3.4.1}$$

Karena $\mathbf{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ masing-masing berdistribusi normal maka fungsi likelihood untuk $\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}_j$ adalah

$$L(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j-\bar{\mathbf{x}})'\right)\right]+n(\bar{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\right]$$

$$\tag{3.4.2}$$

Teorema berikut mengenai penaksir maksimum likelihood untuk komunalitas h_i^2.

Teorema 3.1:

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari $N_p(\mu,\Sigma)$ dengan $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\Psi}$ adalah matriks kovarians dari faktor umum (m), sehingga diperoleh penaksir maksimum likelihood $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$, $\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{X}}$ dengan memaksimumkan persamaan (3.4.2) terhadap matriks diagonal $\mathbf{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{L} = \boldsymbol{\Delta}$. Dengan demikian, maka diperoleh penaksir maksimum likelihood untuk komunalitas h_i^2 , yaitu:

$$\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + \ldots + \hat{l}_{im}^2 \qquad , i = 1,2,\ldots,p \tag{3.4.4}$$

dan proporsi ke-j terhadap variansi sampel total $\xi^{(j)}$, yaitu:

$$\xi^{(j)} = \frac{\hat{l}_{1j}^2 + \hat{l}_{2j}^2 + \ldots + \hat{l}_{pj}^2}{s_{11} + s_{22} + \ldots + s_{pp}}. \tag{3.4.5}$$

Bukti:

Dengan menggunakan sifat invarian dari penaksir maksimum likelihood, fungsi **L** dan $\mathbf{\Psi}$ mempunyai penaksir dengan fungsi yang sama yaitu $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$. Sama halnya dengan komunalitas $h^2_i = l^2_{i1} + l^2_{i2} + \ldots + l^2_{im}$, yang mempunyai penaksir maksimum likelihoodnya $\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + \ldots + \hat{l}_{im}^2$. □

Penaksir maksimum likelihood dari $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$ diperoleh dengan memaksimumkan persamaan (3.4.2). $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$ juga dapat dengan mudah diperoleh menggunakan bantuan *software* komputer. Adapun langkah-langkah perhitungannya, sebagai berikut (Ningrum, 2004):

1. Masukkan seluruh data sampel dengan p variabel dan n pengamatan.
2. Hitung matriks varians kovarians sampel **S**,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{2p} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

3. Hitung nilai eigen dan vektor eigen dari matriks varians kovarians sampel, buat *scree plot* nilai eigen dan tentukan m faktor umum berdasarkan hasil *scree plot* tersebut.
4. Bentuk matriks invers varians kovarians sampel $\mathbf{S}^{-1}$ dengan konstrain $\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$.

5. Hitung nilai awal dari variansi khusus,

$$\hat{\psi}_i = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{p}\right)\left(\frac{1}{s_{ii}}\right)$$

dengan s_{ii} adalah nilai diagonal dari $\mathbf{S}^{-1}$.

6. Bentuk matriks akar kuadrat dari variansi khusus $\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{1/2}$,

$$\text{diag}\left(\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{1/2}\right) = \left(\psi_1^{1/2}, \psi_2^{1/2}, \ldots, \psi_p^{1/2}\right).$$

7. Bentuk matriks invers akar kuadrat variansi khusus $\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1/2}$,

$$\text{diag}\left(\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{1/2}\right) = \left(\psi_1^{-1/2}, \psi_2^{-1/2}, \ldots, \psi_p^{-1/2}\right).$$

8. Bentuk $\mathbf{S}^*$ (matriks varians kovarians *uniqueness-rescaled*),

$$\mathbf{S}^* = \Psi^{-1/2}\mathbf{S}_n\Psi^{-1/2}$$

dengan $\mathbf{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}\right)\left(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}\right)'$.

9. Hitung nilai $\hat{\boldsymbol{\Delta}} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}} - \mathbf{I}$, dimana $\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}\left[\boldsymbol{\lambda}_1^*, \boldsymbol{\lambda}_2^*, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m^*\right]$ adalah nilai eigen dari $\mathbf{S}^*$.

10. Bentuk matriks akar kuadrat dari $\hat{\boldsymbol{\Delta}}$, yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}}^{1/2} = \text{diag}\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1^* - 1}, \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_2^* - 1}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_m^* - 1}\right)$$

11. Hitung nilai penaksir loading $\hat{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\Psi}^{1/2}\hat{\mathbf{E}}^*\hat{\boldsymbol{\Delta}}^{1/2}$, dimana $\hat{\mathbf{E}}^* = \left[\hat{\mathbf{e}}_1^*, \hat{\mathbf{e}}_2^*, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_m^*\right]$ adalah vektor eigen dari $\mathbf{S}^*$.

12. Masukkan $\hat{\mathbf{L}}$ ke dalam fungsi likelihood pada persamaan (3.4.2), iterasikan nilai-nilai $\hat{\psi}_i$ dengan model Newton-Raphson sehingga diperoleh $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_p$ yang meminimumkan fungsi likelihood.
13. Kembali ke langkah 6.
14. Bila nilai $\hat{\mathbf{L}}$ sudah konvergen maka iterasi selesai.

Catatan :

Jika variansi khusus $\hat{\psi}_i$ bernilai negatif maka akan memberikan solusi yang tidak layak. Kasus seperti ini dinamakan kasus *Heywood*. Kasus ini tidak dibahas dalam tugas akhir ini.

Pembakuan vektor random $\boldsymbol{X}$

Variabel random X_i yang dibakukan didefinisikan oleh:

$$z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}, \qquad \text{untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, p$$

atau dalam notasi matriks dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{V}^{1/2})^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \tag{3.4.6}$$

dengan $\mathbf{V}^{1/2}$ adalah matriks standar deviasi berukuran $(p \times p)$. Matriks standar deviasi $\mathbf{V}^{1/2}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}.$$

Representasi dari persamaan (3.4.6) ketika diterapkan pada matriks varians kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ dan matriks korelasi $\boldsymbol{\rho}$ terdapat pada teorema berikut.

Teorema 3.2:

Jika $\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$ maka $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$

Bukti:

$$\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2}\mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\mathbf{I}\ \boldsymbol{\rho}\ \mathbf{I} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$$

Jadi, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2}$ dengan $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$.

Jadi $\boldsymbol{\Sigma}$ dapat dihitung dari $\mathbf{V}^{1/2}$ dan $\boldsymbol{\rho}$, sedangkan $\boldsymbol{\rho}$ dapat dihitung dari $\boldsymbol{\Sigma}$. □

Berdasarkan **teorema (3.2)** maka diperoleh :

Akibat:

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})(\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})' + \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}. \quad (3.4.7)$$

Bukti:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2} \text{ dan } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\Psi}$$

maka

$$\mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{L}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\Psi})\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L}\mathbf{L}'\mathbf{V}^{-1/2} + \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})(\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})' + \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}.$$ □

Dari proses pembakuan **X** dan akibat (3.4.7), maka dapat disimpulkan:

i). Matriks *loading* $\mathbf{L}_z = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L}$, $\quad \mathbf{L}_z = (l_{ij}^{*})$.

ii). Matriks variansi khusus $\mathbf{\Psi}_z = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}$.

Sedangkan penaksir likelihood $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{L}})(\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{L}})' + \hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}$$

atau

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{L}}_z\hat{\mathbf{L}}_z{}^{t} + \hat{\mathbf{\Psi}}_z.$$

iii) Proporsi faktor ke-j terhadap varians sampel total yang dibakukan adalah

$$\hat{\xi}_z^{(j)} = \frac{\hat{l}_{1j}^{*2} + \hat{l}_{2j}^{*2} + \ldots + \hat{l}_{pj}^{*2}}{p}.$$

Biasanya, hasil penelitian-penelitian yang dilakukan datanya telah dibakukan dan matriks korelasi sampel **R** dianalisis. Matriks sisa merupakan selisih dari korelasi sampel **R** atau dari matriks **S** dengan nilai-nilai taksiran yang diperoleh. $\text{Matriks sisa} = \mathbf{R} - \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}\right)$ atau $\mathbf{S} - \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}\right)$. (3.4.8)

Sama halnya seperti metode komponen utama, dari matriks sisa yang diperoleh, dapat dihitung nilai RMSR (*Root Mean Square Residual*) untuk mengetahui apakah metode yang digunakan itu sudah memberikan solusi yang tepat atau tidak. RMSR didefinisikan pada persamaan (3.3.16).

3.4 Memilih Jumlah Faktor Umum (m)

Untuk menghasilkan suatu model faktor ortogonal kita harus memilih berapa jumlah faktor umum (m) yang sesuai dengan model tersebut. Dalam analisis faktor terdapat beberapa kriteria untuk menentukan nilai m, yaitu (Rencher, 1934: 464):

1. Banyaknya faktor umum (m) sama dengan banyaknya faktor yang dibutuhkan pada perhitungan varians untuk memperoleh persentase minimal 80% dari varians total tr(**S**) atau tr(**R**).
2. Banyaknya faktor umum (m) sama dengan banyaknya nilai eigen yang lebih besar dari rata-rata nilai eigen. Rata-rata untuk **R** adalah 1 sedangkan rata-rata untuk matriks **S** adalah $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i / \mathbf{p}$.
3. Dengan menggunakan *scree test* berdasarkan pada plot nilai eigen dari **R** atau **S**. Jika grafik turun secara curam diikuti oleh garis lurus dengan beberapa lereng kecil maka pemilihan faktor umum (m) ditentukan oleh banyaknya nilai eigen sebelum garis lurus.
4. Melakukan uji hipotesis bahwa m yang dipilih adalah jumlah faktor umum yang tepat dengan model analisis faktor. Hipotesis yang diuji adalah $H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{LL} + \boldsymbol{\Psi}$ dengan **L** adalah matriks berukuran $p \times m$. Kriteria keempat ini khusus digunakan pada analisis faktor dengan metode maksimum likelihood.

Dengan asumsi populasi berdistribusi normal, maka dapat dilakukan uji model yang sesuai. Metode yang digunakan untuk pengujian jumlah faktor umum dalam model analisis faktor ortogonal adalah Metode Uji Rasio Likelihood. Misalkan terdapat m faktor umum dalam hipotesis, akan dilakukan pengujian:

$$\mathrm{H}_0 : \underset{(p\times m)}{\mathbf{\Sigma}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{L}}\underset{(m\times p)}{\mathbf{L}'} + \underset{(p\times p)}{\mathbf{\Psi}}$$

$$\mathrm{H}_1 : \underset{(p\times m)}{\mathbf{\Sigma}} \neq \underset{(p\times m)}{\mathbf{L}}\underset{(m\times p)}{\mathbf{L}'} + \underset{(p\times p)}{\mathbf{\Psi}}$$

Di bawah H_0, dengan fungsi likelihood yang dimaksimumkan diperoleh $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}$ dan $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}$ dengan $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$ adalah penaksir maksimum likelihood dari $\mathbf{L}$ dan $\mathbf{\Psi}$. Statistik uji untuk uji rasio likelihood adalah:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda} &= \frac{\underset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{maks}\, \mathbf{L}_{\mathrm{H}_0}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma})}{\underset{\boldsymbol{\mu},\Sigma}{maks}\, \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma})} \\
&= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{np/2}} e^{-np/2} \frac{1}{|\hat{\mathbf{\Sigma}}|^{n/2}}}{\frac{1}{(2\pi)^{np/2}} e^{-np/2} \frac{1}{|\mathbf{S}_n|^{n/2}}} \\
&= \frac{|\hat{\mathbf{\Sigma}}|^{-n/2}}{|\mathbf{S}_n|^{-n/2}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{\Lambda}^{-2} = \frac{|\hat{\mathbf{\Sigma}}|^{n}}{|\mathbf{S}_n|^{n}}$$

$$-2\ln\mathbf{\Lambda} = n\ln\frac{|\hat{\mathbf{\Sigma}}|}{|\mathbf{S}_n|} \tag{3.5.1}$$

dengan derajat kebebasannya adalah:

$$\begin{aligned}
v - v_0 &= \frac{1}{2}p(p+1) - \left\{p(m+1) - \frac{1}{2}m(m-1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(p-m)^2 - p - m\right\}.
\end{aligned}$$

Bartlett menunjukkan bahwa dapat dilakukan aproksimasi chi-kuadrat terhadap distribusi sampel pada persamaan (3.5.1) dengan menggantikan nilai n dengan faktor koreksi:

$$n-1-(2p+4m+5)/6.$$

Dengan menggunakan faktor koreksi Bartlett, tolak H_0 dengan taraf signifikansi α jika

$$\{n-1-(2p+4m+5)/6\}\ln\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\mathbf{S}_n|} > \chi^2_{(\nu-\nu_0);\alpha}$$

$$\{n-1-(2p+4m+5)/6\}\ln\frac{|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}|}{|\mathbf{S}_n|} > \chi^2_{(\nu-\nu_0);\alpha} \qquad (3.5.2)$$

dengan $\nu-\nu_0 = \frac{1}{2}\{(p-m)^2 - p - m\}$.

Dalam mengimplementasikan pengujian dengan persamaan (3.5.2), untuk menguji faktor umum (m) diperoleh dengan cara membandingkan varians yang diperumum $|\mathbf{LL}' + \mathbf{\Psi}|$ dan $|\mathbf{S}_n|$. Jika n besar dan m relatif kecil daripada p, biasanya hipotesis H_0 akan ditolak maka disarankan untuk melakukan pengujian kembali dengan jumlah faktor umum yang lebih besar.

3.5 Rotasi Faktor

Rotasi faktor bertujuan untuk memperoleh struktur yang sederhana agar dapat memudahkan interpretasi faktor (Sharma, 1996). Perotasian dapat digunakan pada model faktor ortogonal maupun model faktor *oblique*. Hasil interpretasi struktur faktor dari rotasi *oblique* lebih kompleks daripada hasil interpretasi dari rotasi ortogonal. Oleh karena itu, digunakan rotasi ortogonal.

Jika $\hat{\mathbf{L}}$ adalah penaksir faktor *loading* yang diperoleh dari metode komponen utama ataupun metode maksimum likelihood maka

$$\hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}$$

dengan $\mathbf{T}$ adalah matriks transformasi yang memenuhi $\mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Sehingga estimasi dari matriks varians kovarians ataupun matriks korelasi adalah:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}\mathbf{T}'\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}^*\left(\hat{\mathbf{L}}^*\right)' + \hat{\boldsymbol{\Psi}}.$$

3.5.1 Rotasi Ortogonal *Varimax*

Rotasi secara pendekatan geometri terbatas pada faktor umum $m = 2$ karena keterbatasan penglihatan kita. Untuk $m > 2$, tersedia beberapa metode yang dapat digunakan, yang paling terkenal dan sering digunakan adalah teknik *varimax*. Teknik *varimax* adalah suatu teknik untuk merotasikan faktor *loading* dan memaksimumkan varians dari kuadrat faktor *loading* pada setiap kolom $\hat{\mathbf{L}}^*$.

Seiring dengan berkembangnya teknologi, rotasi *varimax* dapat dengan mudah dilakukan dengan bantuan *software* komputer yang menyediakan pengolahan untuk analisis faktor. Output dari rotasi *varimax* biasanya terdapat matriks faktor *loading* yang telah dirotasi, yaitu $\hat{\mathbf{L}}^*$, penjumlahan dari kuadrat tiap kolom $\hat{\mathbf{L}}^*$, komunalitas, dan matriks ortogonal $\mathbf{T}$ yang digunakan untuk memperoleh $\hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}$.