

## **BAB I PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang Penelitian**

Perbedaan yang paling mendasar antara manusia dengan makhluk hidup yang lain adalah manusia dikaruniai akal untuk berpikir. Berpikir biasanya identik dengan aktivitas mental manusia untuk memecahkan suatu masalah. Menurut Ruggiero (2012, hlm. 19) berpikir adalah proses mental yang disadari dengan tujuan untuk memecahkan masalah, membuat keputusan, atau mendapatkan pemahaman. Oleh karena itu, melalui aktifitas berpikir, manusia dapat memperoleh solusi dari suatu masalah, menetapkan suatu keputusan dan memperoleh pemahaman baru.

Secara spesifik, berpikir dalam matematika memiliki beberapa tahapan yang disebut sebagai tahapan berpikir matematis. Tahapan berpikir matematis menurut Mason, *et al.* (2010, hlm. 95) terdiri atas: (1) spesialisasi (*specializing*), (2) generalisasi (*generalizing*), (3) membuat konjektur (*conjecturing*) dan (4) memastikan/meyakinkan (*convincing*). Spesialisasi merupakan tahapan berpikir untuk mendapatkan ide permulaan. Tahapan selanjutnya adalah mendapatkan ide serupa yang lebih umum (generalisasi). Berdasarkan tahap generalisasi kemudian memperoleh dugaan sementara (konjektur). Sebagai tahap akhir dari berpikir matematis yaitu meyakinkan/memastikan kebenaran suatu konjektur.

Konjektur adalah pernyataan yang muncul wajar, tapi kebenarannya belum dibuktikan (belum terbukti benar dan belum terbukti salah). Dalam disiplin matematika, salah satu metode untuk menunjukkan kesahihan suatu dugaan/konjektur adalah dengan melakukan pembuktian (*proving*) secara formal. Hasil dari proses pembuktian yang diterima kesahihannya disebut bukti (*proof*). Pembuktian dan bukti merupakan hal yang fundamental dalam matematika. Hal ini tergambar dalam sebuah ungkapan yang menyatakan bahwa pembuktian dan bukti merupakan jantungnya matematika (Hanna, *et al.*, 2008). Dengan demikian, tahap akhir untuk memastikan kebenaran suatu konjektur adalah pembuktian secara formal.

Dalam literatur penelitian pendidikan matematika tentang bukti dan pembuktian terdapat empat konsep yang saling terkait, yaitu: pemahaman bukti

(*proof comprehension*), konstruksi bukti (*proof construction*), validasi bukti (*proof validation*), dan evaluasi bukti (*proof evaluation*) (Selden & Selden, 2017). Kemampuan pemahaman dan konstruksi bukti penting bagi mahasiswa calon guru matematika sekolah menengah. Kemampuan ini berguna dalam proses pembelajaran dan akan berguna pula jika pada suatu saat mengajar materi yang berkaitan dengan pembuktian (Uğurel, *et al.*, 2015). Hal senada dikemukakan pula oleh Kempen & Biehler (2019) yang menjelaskan bahwa kemampuan untuk memahami dan mengonstruksi bukti matematis merupakan kompetensi utama dalam matematika universitas. Hal ini menunjukkan bahwa kemampuan pemahaman dan konstruksi bukti merupakan hal yang penting untuk terus dikembangkan.

Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis (KPBM) mengacu pada kemampuan seseorang dalam memahami sebuah teks bukti matematis (Selden & Selden, 2017). Sebagai contoh, pada buku teks matematika sering disajikan sebuah teorema disertai dengan buktinya. Mahasiswa dengan KPBM yang baik biasanya mampu menangkap makna dari bukti yang tertulis sehingga dapat memahami mengapa suatu teorema dapat diterima kebenarannya. Sebaliknya, mahasiswa dengan KPBM yang kurang baik mungkin tidak berhasil menangkap makna dari bukti yang telah dibacanya, sehingga mereka menerima begitu saja kebenaran suatu teorema meskipun alasannya belum dipahami.

KPBM ini menjadi hal yang penting bagi mahasiswa sebab sebagian besar literatur matematika biasanya menyajikan bukti matematis untuk menjelaskan konsep yang akan dipelajari. Hal ini didukung oleh pendapat Mejia-Ramos, *et al.* (2012) yang menyatakan bahwa mahasiswa dapat belajar matematika dengan cara memahami bukti matematis. Dengan demikian, KPBM menjadi kunci utama untuk membangun pemahaman matematis.

Sebagai salah satu kemampuan matematis, KPBM seseorang dapat dinilai berdasarkan indikator-indikatornya. Beberapa peneliti pendidikan matematika telah mengembangkan indikator-indikator untuk menilai KPBM seseorang. Misalnya, Mejia-Ramos, *et al.* (2012) dan Yang & Lin (2008) mengembangkan setidaknya empat indikator KPBM, yaitu: (1) Menganalisis istilah-istilah matematis, gambar atau simbol dalam suatu bukti; (2) Menjelaskan status logis

pernyataan-pernyataan dalam bukti dan hubungan logis antara pernyataan; (3) Menjelaskan sifat-sifat yang implisit (tersirat) dalam suatu bukti; dan (4) Menjelaskan hubungan logis antar pernyataan-pernyataan dalam suatu bukti. Keempat indikator ini dapat menggambarkan KPBM yang dicapai oleh seorang mahasiswa.

Sebagaimana telah dikemukakan pada paragraf sebelumnya bahwa KPBM berkaitan erat dengan Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis (KKBM). KKBM atau disebut juga kemampuan pembuktian (*proving*) mengacu pada kemampuan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan. Hal ini sejalan dengan pendapat Harel (2008) yang mengemukakan bahwa mengonstruksi bukti adalah aktifitas mental seseorang atau sekelompok orang untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan. Lebih rinci lagi Selden, *et al.* (2010) menjelaskan bahwa proses pembuktian merupakan urutan tindakan mental dan fisik, seperti menulis atau memikirkan sebuah alur dalam sebuah bukti, menggambar atau memvisualisasikan sebuah diagram, yang merefleksikan hasil tindakan sebelumnya atau mencoba mengingat sebuah contoh.

KKBM menjadi hal yang penting dalam pembelajaran matematika terutama di universitas. Hal ini dapat dilihat berdasarkan kajian-kajian para ahli yang menjelaskan bahwa fungsi pembuktian dalam matematika di antaranya untuk: (1) memverifikasi atau menjustifikasi kebenaran suatu pernyataan; (2) menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar; (3) mengorganisir berbagai hasil dari sistem deduksi; (4) menemukan teori baru atau menemukan kembali teori yang sudah ada; (5) mengomunikasikan pengetahuan matematis; (6) mengonstruksi suatu teori dan mengeksplorasi makna suatu definisi atau konsekuensi sebuah asumsi (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna & Jahnke, 1996).

Beberapa peneliti telah menyimpulkan pentingnya KKBM dalam pembelajaran matematika. Hanna (1990) menjelaskan bahwa pentingnya pembuktian dalam pembelajaran matematika adalah untuk membantu menjelaskan ide-ide yang layak disampaikan kepada mahasiswa. Kontribusi signifikan dari pembuktian dalam pembelajaran matematika adalah dalam hal komunikasi pemahaman matematis (Hanna & Jahnke, 1996). Selain itu, penelitian Ko (2010)

menyimpulkan bahwa pembuktian merupakan ranah yang penting ditingkatkan, namun guru masih mengalami kesulitan dalam meningkatkan ranah ini. Penjelasan lain dikemukakan oleh Frasier & Panasuk (2013) yang mengemukakan bahwa guru dan calon guru matematika harus berupaya memupuk kesadaran tentang peran dan pentingnya pembuktian dalam pembelajaran matematika. Beberapa pendapat ahli tersebut, menunjukkan bahwa KKBM memiliki peran yang signifikan pada bidang pendidikan matematika.

Sebagai sebuah kemampuan matematis, KKBM seseorang dapat dinilai berdasarkan indikator-indikator yang dikembangkan. Polya (1973, hlm. 222) mengemukakan lima indikator KKBM, yaitu: (1) Mengidentifikasi hipotesis dan konklusi dari suatu pernyataan; (2) Memobilisasi dan mengorganisasi pengetahuan yang relevan; (3) Membuat rencana pembuktian; (4) Mengaplikasikan rencana (Menuliskan langkah-langkah pembuktian); dan (5) Memeriksa kembali ketepatan hasil dan argumen. Kelima indikator ini dapat dijadikan patokan untuk mengukur capaian KKBM seorang setelah mengikuti suatu proses pembelajaran.

Pada geometri, KPBM dan KKBM merupakan kemampuan yang sangat penting dikuasai dengan baik oleh mahasiswa, sebab geometri pada tingkat perguruan tinggi biasanya dipelajari melalui pendekatan aksiomatik. Mempelajari geometri melalui pendekatan aksiomatik dimulai dengan membangun sistem matematis yang diawali dari konsep-konsep yang tidak didefinisikan, membangun definisi, membuat aksioma/postulat dan mengembangkan teorema. Dalam mengembangkan teorema inilah diperlukan KPBM dan KKBM. Bahkan, sebelum pengembangan teorema yang lebih luas, pada geometri disajikan terlebih dahulu secara eksplisit teori dan prosedur pembuktian.

Berdasarkan penelitian-penelitian pada tingkat sekolah menengah ditemukan fakta bahwa KPBM dan KKBM kebanyakan siswa masih perlu ditingkatkan. Misalnya, hasil penelitian Lin, *et al.* (2004) menunjukkan bahwa siswa masih kesulitan dalam melakukan pembuktian formal, bahkan kebanyakan siswa masih mengalami kesulitan dalam membuat argumen empirik. Hal yang sama ditemukan pula oleh Lin & Yang (2007) yang menyimpulkan bahwa sebagian besar siswa masih mengalami kesulitan dalam memahami dan

mengonstruksi bukti geometri. Penelitian ini menunjukkan bahwa pada kurikulum sekolah menengah di luar negeri yang cukup banyak menyajikan aspek kemampuan pembuktian, kemampuan ini masih dianggap sulit untuk dicapai, apalagi pada kurikulum sekolah menengah di Indonesia yang sangat sedikit memuat kemampuan pembuktian. Kondisi ini berdampak pada kemampuan awal mahasiswa yang masuk ke perguruan tinggi. Mahasiswa masih sangat sedikit mengetahui aspek-aspek yang berkaitan dengan pembuktian.

Selain pada tingkat sekolah menengah, fakta lemahnya KPBM dan KKBM banyak pula ditemui pada tingkat universitas. Misalnya, Jones (2000) meneliti kemampuan mahasiswa lulusan pendidikan matematika dalam pembuktian, hasilnya menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian mahasiswa tergolong kurang, bahkan berlaku untuk mahasiswa yang lulus dengan predikat baik. Hal ini dikuatkan pula oleh Stylianides, *et al.* (2013) yang menemukan fakta bahwa banyak calon guru yang memiliki kelemahan pada aspek pemahaman dan pembuktian matematis. Kesulitan mahasiswa dalam masalah pembuktian di antaranya adalah sulit memulai dan sulit menghubungkan antar konsep (Maya & Sumarmo, 2011).

Fakta lain yang menunjukkan lemahnya kemampuan pembuktian mahasiswa pada bidang geometri ditunjukkan dengan masih rendahnya persentase mahasiswa yang mencapai tingkat berpikir deduktif. Misalnya, studi deskriptif Maryono, dkk. (2015) pada mahasiswa yang telah mengambil mata kuliah geometri menunjukkan bahwa kemampuan berpikir geometri mahasiswa masih belum memenuhi kriteria yang diharapkan, yakni hanya 28% mahasiswa yang berada pada tingkat berpikir deduktif, sedangkan sisanya masih dalam tingkat berpikir deduktif informal/abstraksi (46%) dan analisis (26%). Hal ini sesuai pula dengan temuan Halat (2008) yang telah melakukan penelitian di Turki tentang tingkat berpikir geometrik pada 125 orang calon guru SD dan 156 orang calon guru SMP yang telah mengambil mata kuliah geometri. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa tingkat berpikir geometri calon guru SD terdiri atas: 1,6% pada level 3 (deduksi); 44% pada level 2 (abstraksi) dan 54,4% pada level 1 (analisis) dan level 0 (visualisasi). Tingkat berpikir geometrik calon guru SMP terdiri atas: 1,9% pada level 4 (keakuratan/*rigor*); 4,5% pada level 3 (deduksi);

35,9% pada level 2 (abstraksi) dan 57,7% pada level 1 (analisis) dan level 0 (visualisasi). Hasil-hasil penelitian ini tidak sesuai dengan harapan, karena untuk calon guru yang akan mengajar matematika dibutuhkan kemampuan berpikir geometri minimal pada level 3 (deduksi). Salah satu indikator pada level deduksi ini adalah mahasiswa dapat membuktikan secara aksiomatik apa-apa yang pada awalnya dijelaskan secara informal.

Lemahnya kemampuan pembuktian dapat dipengaruhi oleh aspek keyakinan individu. Menurut Övez & Özdemir (2014) kemampuan pembuktian dipengaruhi oleh efikasi-diri bukti (*proof self-efficacy*). Efikasi-diri merupakan penilaian seseorang terhadap kemampuan dirinya sendiri dalam mengatur dan melakukan tindakan tertentu untuk mencapai suatu tujuan (Bandura & Schunk, 1981). Efikasi-Diri Bukti Matematis (EDBM) didefinisikan sebagai penilaian diri individu mengenai kapasitas mengorganisir kegiatan yang diperlukan dan mewujudkannya dengan sukses untuk menunjukkan kinerja pada masalah pembuktian matematis.

EDBM penting dalam mengerjakan tugas-tugas matematis. Hal ini sejalan dengan pendapat Bandura & Schunk (1981) yang menjelaskan bahwa efikasi-diri secara positif terkait dengan akurasi kinerja matematis dan minat intrinsik dalam aktivitas matematis. Studi Fast, *et al.* (2010) menunjukkan pula bahwa salah satu cara untuk meningkatkan capaian pembelajaran matematika adalah dengan meningkatkan efikasi-diri matematis. Siswa yang memiliki efikasi-diri matematis lebih tinggi cenderung memiliki prestasi matematika yang lebih tinggi (Peters, 2013). Hal ini selaras dengan studi Sangsuk & Siriparp (2015) yang menunjukkan bahwa efikasi-diri mempengaruhi pemikiran, motivasi dan keputusan. Begitu pula hasil penelitian Maryono, dkk. (2017) menunjukkan bahwa pembelajaran matematika yang menitikberatkan pada kemampuan pembuktian matematis harus memperhatikan aspek keyakinan diri mahasiswa. Hal ini diperkuat dengan hasil penelitian Afgani, dkk. (2019) yang menyimpulkan bahwa terdapat hubungan yang signifikan antara konsep-diri dengan pengetahuan prosedural matematis.

Hasil penelitian Övez & Özdemir (2014) menunjukkan bahwa 80% mahasiswa calon guru matematika memiliki efikasi-diri bukti pada tingkat rendah

dan menengah. Hal ini sebagai dampak dari kekurangan dan kesalahan mereka dalam memahami dan mengonstruksi bukti. Oleh karena itu, untuk mengembangkan KPBM dan KKBM mahasiswa, diperlukan pula memperhatikan aspek EDBM mereka.

*National Council of Teachers of Mathematics* merekomendasikan program pembelajaran yang terstandar untuk penalaran dan pembuktian. Program pembelajaran untuk penalaran dan pembuktian ini harus memungkinkan semua siswa untuk: (1) Mengenali alasan dan bukti sebagai aspek fundamental dalam matematika; (2) Membuat dan menyelidiki dugaan matematis; (3) Mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan bukti matematis; (4) Memilih dan menggunakan berbagai jenis penalaran dan metode pembuktian (NCTM, 2000, hlm. 56). Berdasarkan rekomendasi ini, untuk mengembangkan kemampuan pembuktian dosen perlu mengembangkan pembelajaran yang memungkinkan mahasiswa pada empat hal berikut: (1) Mahasiswa harus menyadari akan pentingnya pembuktian dalam matematika; (2) Mahasiswa berlatih membuat dan menyelidiki dugaan; (3) Mahasiswa berlatih mengembangkan dan mengevaluasi argumen; (4) Mahasiswa fleksibel dalam memilih jenis-jenis penalaran dan metode pembuktian.

Pembelajaran yang berfokus pada pengembangan Efikasi-Diri Bukti Matematis (EDBM) mahasiswa memerlukan pengkondisian lingkungan kelas yang relevan. Menurut Fast, *et al.* (2010) lingkungan kelas yang peduli, menantang, dan berorientasi penguasaan berpengaruh secara positif terhadap efikasi-diri matematis. Hal ini menjadi salah satu dasar bahwa untuk mengembangkan EDBM diperlukan kepedulian/perhatian dosen terhadap mahasiswa, penyajian tugas matematis yang menantang dan komitmen yang kuat terhadap penguasaan materi.

Mahasiswa dapat memahami dan mengonstruksi suatu bukti matematis dengan baik, jika mereka memahami fakta, konsep, prinsip, dan prosedur yang direpresentasikan dalam bentuk struktur sistem matematis, mulai dari terminologi-terminologi yang tidak didefinisikan, definisi-definisi, berbagai postulat/aksioma, teorema-teorema dan prosedur-prosedur pembuktian. Menurut Tall, *et al.* (2011) proses pembentukan kemampuan pembuktian melalui tahapan-tahapan:

pengenalan persepsi tentang fakta atau fenomena; pemikiran prinsip dan hubungan-hubungan tertentu; menentukan konsep-konsep yang memenuhi suatu situasi untuk mengembangkan prinsip pembuktian; menyadari terdapat sifat-sifat yang ekuivalen yang dihubungkan dengan bukti deduktif; menyadari bahwa ekuivalensi dua buah sifat atau lebih adalah cara berbeda untuk mengekspresikan konsep kristal; membangun struktur pengetahuan deduktif dengan menghubungkan konsep-konsep yang telah mengkristal. Hal ini menjadi salah satu dasar bahwa untuk mengembangkan KPBM dan KKBM perlu mempertimbangkan kemampuan mahasiswa dalam hal cara memahami fakta, konsep, prinsip, dan prosedur serta cara berpikir mahasiswa seperti bernalar secara induktif dan bernalar secara deduktif.

Dalam rangka mengembangkan kemampuan pembuktian pada geometri, perlu diciptakan lingkungan kelas yang bermakna dan menyenangkan melalui aktifitas yang berpusat pada mahasiswa dengan cara memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menemukan sendiri sifat-sifat, serta mengeksplorasi dan merefleksikan ide-ide baru (Reed, 1996). Hal ini sejalan dengan pendapat Stylianides & Ball (2008) yang menyatakan bahwa tugas matematis untuk mengembangkan kemampuan pemahaman bukti dan konstruksi bukti meliputi tugas-tugas yang memungkinkan mahasiswa untuk mengeksplorasi suatu fenomena matematis; memeriksa suatu kasus; mendiskusikan suatu hipotesis alternatif; serta membuat, memverifikasi dan menyangkal suatu konjektur. Dengan demikian, untuk mengembangkan KPBM dan KKBM diperlukan tugas-tugas matematis yang menantang sehingga mahasiswa dapat melakukan eksplorasi, verifikasi dan menulis bukti secara formal.

Salah satu model pembelajaran yang berpusat pada mahasiswa; mempertimbangkan cara memahami dan cara berpikir mahasiswa; memberikan tugas matematis yang menantang dan beragam; serta memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk membuat, mengeksplorasi dan memverifikasi suatu konjektur adalah pembelajaran berbasis DNR (*Duality, Necessity, and Repeated-reasoning*). Hal ini didasarkan pada tiga prinsip dasar pembelajaran berbasis DNR, yaitu: (1) prinsip dualitas (*Duality*); (2) prinsip kebutuhan (*Necessity*); dan (3) prinsip penalaran berulang (*Repeated-reasoning*) (Harel, 2008).



Dalam pembelajaran berbasis DNR, matematika dipandang sebagai suatu disiplin yang terdiri dari dua kumpulan pengetahuan, yaitu *Ways of Understanding* (WoU) atau cara memahami dan *Ways of Thinking* (WoT) atau cara berpikir (Harel, 2008). Masih menurut Harel (2008) WoU adalah kumpulan, atau struktur yang terdiri dari aksioma, definisi, teorema, bukti, masalah, dan solusi; sedangkan WoT adalah praktik matematis yang digunakan untuk menciptakan WoU, misalnya: penalaran empiris, penalaran deduktif, penalaran struktural, heuristik, dan keyakinan tentang sifat pengetahuan matematis dan proses akuisisinya. Hal ini berimplikasi pada pembelajaran matematika yang menurut Harel (2008) disebut prinsip dualitas (*duality*) yaitu mahasiswa mengembangkan cara berpikir melalui produksi cara memahami, sebaliknya, cara memahami dipengaruhi pula oleh cara berpikir.

Motivasi intrinsik mahasiswa dalam belajar perlu dirangsang dengan cara menyadarkan mereka akan kebutuhan intelektual (*intellectual need*). Menurut Harel (2013a) kebutuhan intelektual adalah kebutuhan yang lahir melalui situasi pemberian masalah yang menantang dalam pembelajaran. Situasi tersebut memotivasi mahasiswa untuk berpikir tentang bagaimana dan mengapa suatu pengetahuan tertentu lahir. Hal ini yang menjadi dasar dari prinsip kebutuhan (*Necessity*) dalam model DNR.

Dorongan kebutuhan intelektual yang tinggi memacu individu untuk belajar tanpa ada paksaan. Hasil belajar individu dapat membentuk skema-skema pengetahuan baru. Skema-skema baru ini harus dipertahankan supaya tidak mudah hilang. Pada model DNR, upaya untuk mempertahankan skema-skema baru tersebut diakomodir dalam prinsip penalaran berulang (*Repeated-reasoning*). Prinsip penalaran berulang bermakna bahwa mahasiswa harus menerapkan penalaran untuk menginternalisasi, mengatur, dan mempertahankan cara memahami dan cara berfikir (Harel, 2008). Penalaran berulang bukan hanya berupa *drill* dan praktik masalah rutin, melainkan berupa proses internalisasi sedemikian sehingga seseorang dapat menerapkan pengetahuan secara mandiri dan spontan. Urutan masalah yang diberikan kepada mahasiswa harus terus menggugah untuk memikirkan situasi dan solusi, dan masalah harus menanggapi perubahan kebutuhan intelektual mahasiswa.

Tiga prinsip dasar model pembelajaran berbasis DNR menurut Harel (2010) dapat dilaksanakan dalam lima segmen berikut: (1) Pemberian masalah; (2) Penarikan kesimpulan awal mahasiswa; (3) Pemeriksaan terhadap kesimpulan awal; (4) Pengujian hasil kesimpulan awal; (5) Pelajaran yang dapat dipetik. Masalah yang diberikan menggugah mahasiswa untuk memenuhi kebutuhan intelektual, misalnya kebutuhan pembuktian, kebutuhan mencari penyebab suatu fenomena, kebutuhan perhitungan, kebutuhan komunikasi dan kebutuhan menata struktur pengetahuan. Kesimpulan awal merupakan kesimpulan orisinal yang dihasilkan mahasiswa secara mandiri yang selanjutnya diperiksa kembali melalui diskusi dengan anggota kelompoknya sehingga diperoleh kesimpulan awal yang lebih meyakinkan. Menguji hasil kesimpulan awal merupakan kegiatan presentasi di depan kelas untuk diberi komentar, masukan atau perbaikan baik oleh mahasiswa yang lain maupun oleh dosen sehingga diperoleh kesimpulan yang meyakinkan. Berdasarkan kegiatan pada segmen satu sampai empat diperoleh pelajaran-pelajaran yang dapat dipetik, misalnya: apa yang belum dipahami, kesalahan apa yang terjadi sehingga menjadi catatan untuk diperbaiki pada pemecahan masalah selanjutnya.

Pada segmen penarikan kesimpulan awal, pemeriksaan terhadap kesimpulan awal dan pengujian hasil kesimpulan awal diperlukan suatu teknik untuk membantu mengendalikan proses berpikir mahasiswa. Salah satu teknik yang dapat digunakan untuk mengendalikan proses berpikir mahasiswa dalam pemecahan masalah pembuktian adalah teknik *Self-Explanation* atau Eksplanasi-Diri (ED). Menurut Hodds, *et al.* (2014) pemecahan masalah pembuktian melalui teknik Eksplanasi-Diri dikendalikan melalui serangkaian pertanyaan, misalnya: (1) Apakah Anda memahami ide yang akan digunakan?; (2) Apakah Anda mengerti mengapa ide tersebut bisa digunakan?; (3) Bagaimana ide tersebut bisa digunakan/dikaitkan dengan ide-ide lain (teorema lain, pengetahuan sebelumnya) dalam pembuktian? Tiga pertanyaan seperti ini yang harus selalu diingat oleh mahasiswa dalam pemecahan masalah pembuktian melalui teknik Eksplanasi-Diri.

Teknik Eksplanasi-Diri dapat memediasi proses berpikir individu untuk mengatasi kesenjangan antara model mental internal dan informasi eksternal yang

disajikan, menemukan jalan pintas dalam proses memahami, dan merevisi kelemahan model mental (Chen & Yeh, 2008); Fonseca & Chi, 2011). Dengan demikian, teknik Eksplanasi-Diri dapat menjembatani peralihan antar segmen-segmen dalam model pembelajaran berbasis DNR.

Pembelajaran berbasis DNR berpengaruh secara positif terhadap kemampuan pemahaman konsep dan penalaran serta disposisi matematis mahasiswa Pendidikan Guru Sekolah Dasar (PGSD) (Bakar, 2018). Sementara itu, strategi *self-explanation* yang dikombinasikan dengan model *guided discovery* berpengaruh positif terhadap kemampuan pemahaman konsep, penalaran dan pembuktian pada perkuliahan geometri dasar (Maarif, 2018). Hal ini menunjukkan adanya kelebihan dari model pembelajaran berbasis DNR dan strategi *self-explanation*.

Penggabungan suatu model pembelajaran dengan suatu teknik pembelajaran yang relevan akan memberikan penguatan berdasarkan kelebihan masing-masing. Penggabungan antara model pembelajaran berbasis DNR dan teknik Eksplanasi-Diri menghasilkan model pembelajaran baru yang disebut model pembelajaran berbasis DNR dengan teknik Eksplanasi-Diri (DNRED). Sintaks utama model pembelajaran DNRED ini terdiri dari lima langkah: (1) Pemberian masalah untuk merangsang kebutuhan intelektual; (2) Kesimpulan awal mahasiswa yang diperoleh melalui teknik Eksplanasi-Diri; (3) Pemeriksaan terhadap kesimpulan awal melalui teknik Eksplanasi-Diri pada diskusi kelompok; (4) Menguji hasil kesimpulan awal melalui teknik Eksplanasi-Diri pada kegiatan presentasi di kelas; (5) Mengambil pelajaran yang dapat dipetik dari empat langkah sebelumnya. Dengan demikian, melalui model pembelajaran DNRED mahasiswa memiliki peluang lebih besar untuk berpikir secara mandiri, orisinal dan teliti; berargumen untuk meyakinkan temannya; melakukan refleksi terhadap suatu proses pemecahan masalah sehingga mendapatkan pelajaran yang berharga.

Pembelajaran dengan teknik Eksplanasi-Diri relevan dengan teori perkembangan kognitif Piaget yang menyatakan bahwa individu dapat membangun secara aktif dunia kognitifnya sendiri melalui proses asimilasi dan akomodasi sehingga terjadi keseimbangan (*equilibrium*). Asimilasi merupakan

proses memahami pengalaman-pengalaman baru berdasarkan skema yang sudah dimiliki, sedangkan akomodasi merupakan proses pemodifikasian skema yang sudah dimiliki agar sesuai dengan situasi baru.

Kesulitan mahasiswa dalam pembuktian tampak dalam proses asimilasi dan akomodasi. Sebagaimana Netti & Nusantara (2016) menjelaskan bahwa kegagalan mahasiswa dalam pembuktian disebabkan oleh: (1) skema asimilasi yang tidak lengkap, (2) skema yang tidak lengkap pada proses akomodasi, (3) skema lengkap tetapi tidak terkait dengan proses asimilasi dan akomodasi. Prinsip dualitas dan teknik Eksplanasi-Diri pada model pembelajaran berbasis DNRED dapat menjembatani proses asimilasi dan akomodasi sehingga terjadi keseimbangan (*equilibrium*). Menjembatani cara berpikir dan cara memahami melalui teknik Eksplanasi-Diri dapat mengatasi kesenjangan antara skema pengetahuan yang dimiliki dan informasi eksternal yang disajikan, menemukan jalan pintas dalam proses memahami, dan merevisi kelemahan skema pengetahuan yang dimiliki individu.

Melalui penerapan model DNRED, dihasilkan produk Eksplanasi-Diri dalam bentuk: tulisan, rekaman suara atau video. Produk ini bermanfaat bagi mahasiswa yang akan mempelajari ulang materi yang sama di luar kelas. Namun, Eksplanasi-Diri yang bagaimana yang dapat memberikan pemahaman yang benar kepada mahasiswa? Berdasarkan kualitasnya, Eksplanasi-Diri dikelompokkan menjadi delapan kategori yaitu: (1) eksplanasi berbasis-prinsip; (2) eksplanasi terdorong tujuan; (3) eksplanasi memperhatikan koherensi; (4) tidak memberikan eksplanasi; (5) eksplanasi yang salah; (6) paraprase; (7) positif *monitoring*; (8) negatif *monitoring* (Ainsworth & Burcham, 2007; Hodds, *et al.*, 2014). Dalam memahami dan mengonstruksi bukti pada geometri, perlu diteliti perkembangan kualitas Eksplanasi-Diri mahasiswa, sebab kualitas Eksplanasi-Diri ini mencerminkan kualitas kemampuan mahasiswa dalam pembuktian. Penelitian terhadap kualitas Eksplanasi-Diri mahasiswa bermanfaat untuk: (1) mengetahui cara mahasiswa memahami bukti; (2) cara berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti; (3) memberikan umpan balik terhadap eksplanasi yang masih kurang/keliru.

Dalam penerapan suatu model pembelajaran matematika terdapat beberapa variabel yang perlu dipertimbangkan dan mungkin berpengaruh terhadap pencapaian kemampuan mahasiswa termasuk kemampuan pemahaman, konstruksi dan efikasi-diri bukti matematis. Variabel yang perlu dipertimbangkan tersebut di antaranya adalah pengetahuan awal (*prior knowledge*). Mengetahui perbedaan pengetahuan awal diperlukan untuk mendiagnosis dan mendukung praktik pendidikan (Dochy, *et al.*, 1991). Selain itu, pengetahuan awal terbukti sebagai variabel pendidikan yang berpotensi penting dalam arti berkontribusi terhadap varians posttest dan memiliki efek positif terhadap kinerja mahasiswa (Dochy, 1996; Dochy, *et al.*, 1999).

Pengetahuan awal paling tidak dapat diturunkan menjadi dua domain, yaitu domain spesifik (*Domain-Specific Knowledge*) dan domain yang lebih luas (*Domain-Transcending Knowledge*) (Dochy, 1996). Dalam mata kuliah geometri, Pengetahuan Awal Geometri (PAG) menjadi domain spesifik yang menjadi pertimbangan dalam pembelajaran, karena faktor dominan yang mempengaruhi kemampuan pembuktian merupakan pengetahuan konten geometri (Chinnappan, *et al.*, 2012). Hal ini dikuatkan juga oleh penelitian Rach & Heinze (2017) yang menyimpulkan bahwa pengetahuan awal spesifik terkait dengan matematika ternyata menjadi faktor utama dalam keberhasilan mahasiswa pada fase transisi dari matematika sekolah ke matematika perguruan tinggi. Dengan demikian PAG menjadi variabel yang perlu dipertimbangkan dan mungkin berpengaruh terhadap pencapaian hasil belajar mahasiswa.

Pengetahuan awal mahasiswa dipengaruhi oleh Latar Belakang Pendidikan (LBP). Namun, belum banyak penelitian yang membahas pengaruh variabel perbedaan latar belakang pendidikan terhadap pencapaian hasil belajar di universitas. Mahasiswa tingkat satu di Indonesia memiliki perbedaan latar belakang pendidikan sekolah menengah. Salah satu perbedaan latar belakang pendidikan tersebut dapat ditinjau berdasarkan jenis sekolah menengah yaitu (Sekolah Menengah Atas) SMA dan non-SMA. Jenis sekolah yang tergolong non-SMA diantaranya adalah Madrasah Aliyah (MA) dan Sekolah Menengah Kejuruan (SMK). Meskipun muatan kurikulum matematika antara SMA dan MA relatif sama, namun muatan kurikulum MA secara keseluruhan lebih banyak

dibandingkan dengan SMA, karena kurikulum di MA ditambah dengan muatan keagamaan. Secara teori muatan keagamaan ini diharapkan dapat menumbuhkan sikap yang baik dalam pembelajaran, sehingga dapat mempengaruhi capaian pembelajaran yang lain. Namun, secara empirik belum banyak penelitian mengenai hal ini khususnya dalam pendidikan matematika.

Hasil penelitian Andriani (2010) menunjukkan bahwa latar belakang pendidikan berpengaruh signifikan terhadap prestasi belajar matematika mahasiswa. Namun, hasil penelitian Hamdi & Abadi (2014) menunjukkan bahwa latar belakang pendidikan tidak berpengaruh terhadap prestasi belajar matematika mahasiswa. Perbedaan temuan ini mungkin karena adanya faktor-faktor lain yang mempengaruhi, misalnya sistem seleksi masuk perguruan tinggi yang dapat berubah dari tahun ke tahun. Dengan demikian, di antara pentingnya meneliti pengaruh LBP terhadap pencapaian hasil belajar mahasiswa adalah untuk memberikan salah satu pertimbangan dalam seleksi masuk perguruan tinggi.

Seberapa kuat dan signifikan hubungan (kebergantungan secara statistik) antara KPBM, KKBM dan EDBM perlu diteliti. Hal ini diperlukan sebagai bahan pertimbangan untuk memperhatikan berbagai aspek dalam meningkatkan kemampuan pembuktian. Salah satu hubungan yang dapat diteliti adalah asosiasi antara KPBM, KKBM dan EDBM. Terdapat beberapa penelitian yang telah mengungkap asosiasi yang berkaitan dengan pembuktian. Misalnya, hasil penelitian Maya & Sumarmo (2011) menunjukkan terdapat hubungan (asosiasi) yang cukup kuat antara kemampuan pemahaman matematis dan kemampuan pembuktian matematis. Hasil penelitian Peters (2013) menunjukkan bahwa siswa yang memiliki efikasi-diri matematis lebih tinggi cenderung memiliki prestasi matematika yang lebih tinggi. Begitu juga hasil studi Sangsuk & Siriparp (2015) yang menunjukkan bahwa efikasi-diri mempengaruhi pemikiran, motivasi, dan keputusan. Penelitian-penelitian tersebut tidak secara spesifik menganalisis asosiasi antara KPBM, KKBM dan EDBM. Dengan demikian, analisis asosiasi antara KPBM, KKBM dan EDBM akan memberikan referensi baru dalam perkembangan pendidikan matematika.

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan, fokus penelitian ini adalah penerapan model pembelajaran berbasis-DNR (*Duality, Necessity, and Repeated-*

*reasoning*) dengan teknik Eksplanasi-Diri (DNRED) sebagai upaya untuk mengembangkan Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis (KPBM), Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis (KKBM), dan Efikasi-Diri Bukti Matematis (EDBM) mahasiswa calon guru matematika semester pertama.

## 1.2 Rumusan Masalah Penelitian

Dalam penelitian ini terdapat beberapa faktor-faktor yang dikaji, yaitu: model pembelajaran DNRED dan Ekspositori; perbedaan pencapaian dan peningkatan KPBM, KKBM serta EDBM; asosiasi antara KPBM, KKBM dan EDBM; dan kualitas Eksplanasi-Diri mahasiswa pada kelas DNRED.

Berdasarkan latar belakang penelitian yang telah dikemukakan, rumusan masalah penelitian ini dapat dinyatakan dalam bentuk pertanyaan-pertanyaan penelitian sebagai berikut:

1. Apakah terdapat perbedaan pencapaian KPBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) Pengetahuan Awal Geometri (PAG) mahasiswa; dan (c) Latar Belakang Pendidikan (LBP) mahasiswa?
2. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap pencapaian KPBM mahasiswa?
3. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap pencapaian KPBM mahasiswa?
4. Apakah terdapat perbedaan peningkatan KPBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa?
5. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap peningkatan KPBM mahasiswa?

6. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap peningkatan KPBM mahasiswa?
7. Apakah terdapat perbedaan pencapaian KKBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa?
8. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap pencapaian KKBM mahasiswa?
9. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap pencapaian KKBM mahasiswa?
10. Apakah terdapat perbedaan peningkatan KKBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa?
11. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap peningkatan KKBM mahasiswa?
12. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap peningkatan KKBM mahasiswa?
13. Apakah terdapat perbedaan EDBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa?
14. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap EDBM mahasiswa?



15. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara dua model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan dua kategori LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap EDBM mahasiswa?
16. Apakah terdapat asosiasi yang signifikan antara: (a) KPBM dan KKBM; (b) KPBM dan EDBM; (c) KKBM dan EDBM?
17. Bagaimana karakteristik kualitas Eksplanasi-Diri mahasiswa pada setiap tahapan model pembelajaran DNRED?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan uraian pada latar belakang penelitian, tujuan utama penelitian ini adalah untuk memperoleh gambaran tentang pencapaian dan peningkatan KPBM, KKBM dan EDBM mahasiswa setelah memperoleh model pembelajaran DNRED dengan memperhatikan Pengetahuan Awal Geometri (PAG) mahasiswa dan Latar Belakang Pendidikan (LBP) mahasiswa. Selain itu, dianalisis pula kualitas Eksplanasi-Diri mahasiswa dalam pembuktian selama terlibat dalam model DNRED. Untuk memperoleh gambaran yang lebih jelas, rincian dari tujuan penelitian ini adalah dalam rangka:

1. Menelaah perbedaan pencapaian KPBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa.
2. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap pencapaian KPBM mahasiswa.
3. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap pencapaian KPBM mahasiswa.
4. Menelaah perbedaan peningkatan KPBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori jika ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa.

5. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap peningkatan KPBM mahasiswa.
6. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap peningkatan KPBM mahasiswa.
7. Menelaah perbedaan pencapaian KKBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa.
8. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap pencapaian KKBM mahasiswa.
9. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap pencapaian KKBM mahasiswa.
10. Menelaah perbedaan peningkatan KKBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa.
11. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap peningkatan KKBM mahasiswa.
12. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap peningkatan KKBM mahasiswa.
13. Menelaah perbedaan EDBM antara mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran DNRED dan mahasiswa yang memperoleh model Ekspositori ditinjau berdasarkan: (a) keseluruhan mahasiswa; (b) PAG mahasiswa; dan (c) LBP mahasiswa.

14. Menelaah pengaruh interaksi antara model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan PAG (Tinggi, Sedang, Rendah) terhadap EDBM mahasiswa.
15. Menelaah pengaruh interaksi antara dua model pembelajaran (DNRED dan Ekspositori) dan dua kategori LBP (SMA dan Non-SMA) terhadap EDBM mahasiswa.
16. Menelaah asosiasi antara: (a) KPBM dan KKBM; (b) KPBM dan EDBM; (c) KKBM dan EDBM.
17. Menelaah perkembangan karakteristik kualitas Eksplanasi-Diri mahasiswa pada setiap tahapan model pembelajaran DNRED.

#### 1.4 Signifikansi Penelitian

Siswa sekolah menengah perlu mengembangkan kemampuan dalam membenarkan klaim, membuktikan dugaan, dan menggunakan simbol-simbol dalam penalaran (NCTM, 2000, hlm. 288). Atas dasar ini, guru dan calon guru matematika sekolah menengah harus memiliki kemampuan pembuktian yang baik supaya bisa merancang pembelajaran yang dapat mengembangkan penalaran dan pembuktian siswa. Hal ini menjadi salah satu alasan pentingnya mengembangkan kemampuan pembuktian bagi calon guru matematika.

Sejauh ini, penelitian tentang pemahaman bukti (*proof comprehension*) masih pada seputar pengembangan instrumen penilaian (Yang & Lin, 2008; Mejia-Ramos, *et al.*, 2012). Penelitian tentang konstruksi bukti (*proof construction*) atau pembuktian (*proving*) kebanyakan masih pada aspek kesulitan dalam mengonstruksi bukti pada beberapa aspek (Bell, 1976; Senk, 1985; Coe & Ruthven, 1994; Galbraith, 1981; Healy & Hoyles, 2000; Ko & Knuth, 2009).

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa kebanyakan mahasiswa calon guru matematika mengalami kesulitan dalam pembuktian. Misalnya, Jones (2000) menyimpulkan bahwa kemampuan pembuktian mahasiswa lulusan pendidikan matematika masih kurang, bahkan berlaku untuk mahasiswa yang lulus dengan predikat baik. Hal serupa dikuatkan oleh Stylianides, *et al.* (2013) yang menemukan fakta bahwa banyak calon guru yang memiliki kelemahan pada pengetahuan mengenai penalaran dan pembuktian.

Kesulitan mahasiswa dalam pembuktian dianalisis oleh Varghese (2009) dan disimpulkan bahwa penyebab kesulitan mahasiswa calon guru matematika dalam pembuktian adalah tidak bisa secara efektif menggabungkan ide-ide yang berbeda dengan konsep yang telah mereka pelajari tentang ketentuan bukti dan membuktikan menjadi representasi visual pemahaman matematis mereka. Övez & Özdemir (2014) menyimpulkan bahwa mahasiswa calon guru matematika menghadapi bukti dan matematika formal untuk pertama kalinya di universitas dan mereka tidak tahu apa yang harus dilakukan saat mereka diharapkan melakukan pembuktian. Lemahnya kemampuan pembuktian mahasiswa dipengaruhi pula oleh faktor persepsi tentang keyakinan diri sendiri. Jojgov, *et al.* (2004) menyimpulkan bahwa mahasiswa yang berhasil dalam bidang matematika dan dalam pembuktian memiliki pandangan positif tentang pembuktian daripada mahasiswa lainnya.

Pembelajaran yang berfokus pada pengembangan kemampuan pembuktian memiliki tantangan tersendiri. Beberapa penelitian menyimpulkan bahwa banyak guru menunjukkan beberapa kesulitan dalam pembelajaran berfokus pada bukti matematis; beberapa guru memiliki pengetahuan yang terbatas mengenai bukti (Knuth, 2002; Stylianides & Stylianides, 2009). Penelitian yang lain menyimpulkan bahwa beberapa guru memiliki pengetahuan pedagogi yang tidak mendukung perkembangan siswa dalam penalaran dan pembuktian (Lampert, 1990; Chazan & Lueke, 2009; Bieda, 2010; Ellis, 2011).

Eksperimen penerapan model pembelajaran dalam upaya untuk mengembangkan kemampuan pembuktian masih jarang dilakukan. Maya & Sumarmo (2011) menerapkan pendekatan Moor-termodifikasi pada mata kuliah struktur aljabar untuk melihat kemampuan pembuktian, hasilnya menunjukkan tidak terdapat perbedaan dibandingkan dengan kelas konvensional, meskipun pada beberapa aspek terdapat kelebihan dari pendekatan Moor-termodifikasi. Muzaki, Kusumah, & Sabandar (2017) berhasil mengembangkan kemampuan pembuktian melalui kombinasi strategi abduktif dan strategi abstrak bergambar konkret pada mata kuliah analisis real.

Masih diperlukan inovasi-inovasi pembelajaran dalam upaya untuk mengembangkan kemampuan pembuktian. Prinsip pengajaran matematika dan prinsip belajar matematika menjadi poin yang penting untuk mengembangkan kemampuan pembuktian. Prinsip pengajaran matematika yang direkomendasikan NCTM (2000, hlm.16) menuntut bahwa guru harus memahami apa yang siswa ketahui dan perlu pelajari, kemudian menantang dan mendukung mereka untuk mempelajarinya dengan baik. Secara rinci, dalam pengajaran matematika guru dituntut untuk: (1) Mengetahui dan memahami: matematika, siswa sebagai peserta didik, dan strategi pedagogis; (2) Menciptakan lingkungan belajar yang menantang dan mendukung; (3) Mengembangkan pemahaman yang berkelanjutan. Prinsip belajar matematika yang direkomendasikan NCTM (2000, hlm. 20) menuntut siswa belajar matematika melalui pemahaman, aktif membangun pengetahuan baru melalui pengalaman dan pengetahuan yang dimiliki sebelumnya.

Secara teori, model dan teknik pembelajaran yang telah diuraikan yakni model DNRED merupakan alternatif yang dapat memenuhi tuntutan prinsip-prinsip pengajaran matematika dan belajar matematika. Pada penelitian ini dikembangkan model pembelajaran DNRED sekaligus menguji model tersebut baik secara teoretis maupun secara empiris/praktis dalam mengembangkan Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis (KPBM), Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis (KKBM) dan Efikasi Diri Bukti Matematis (EDBM) mahasiswa calon guru matematika.

### **1.5 Definisi Operasional**

Istilah-istilah kunci pada disertasi ini perlu didefinisikan untuk menghindari persepsi-persepsi yang kurang relevan terhadap istilah-istilah tersebut. Berikut ini adalah definisi operasional untuk beberapa istilah kunci yang digunakan pada disertasi:

- (1) Bukti matematis adalah pernyataan terurut beserta alasannya (argumen) yang disajikan secara jelas dan ringkas yang dibuat untuk meyakinkan diri sendiri dan orang lain bahwa suatu pernyataan bernilai benar.
- (2) Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis (KPBM) adalah suatu kapasitas seseorang untuk mengerti atau memaknai bukti matematis.

- (3) Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis (KKBM) adalah kemampuan untuk menunjukkan atau membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau dugaan/konjektur kepada diri sendiri atau orang lain berupa tindakan mental dan fisik terurut yang diwujudkan dalam suatu bukti matematis.
- (4) Efikasi Diri Bukti Matematis (EDBM) adalah penilaian seseorang terhadap kemampuan dirinya sendiri dalam mengatur dan melakukan tindakan tertentu untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan bukti matematis.
- (5) Pembelajaran berbasis DNR (*Duality, Necessity, and Repeated-reasoning*) adalah model pembelajaran yang menganut tiga prinsip dasar, yaitu prinsip *Duality* (Dualitas), *Necessity* (Kebutuhan), and *repeated-Reasoning* (Penalaran-berulang).
- (6) Teknik eksplanasi diri adalah teknik pembelajaran yang melibatkan mahasiswa secara aktif dengan cara menjelaskan suatu fenomena terhadap dirinya sendiri atau mengajukan suatu jawaban atas masalah yang diberikan, selanjutnya mereka menerima umpan balik terbimbing dari lingkungan sekitar menuju penjelasan atau jawaban yang benar.
- (7) Pembelajaran berbasis DNR (*Duality, Necessity, and Repeated-reasoning*) dengan teknik Eksplanasi Diri (DNRED) adalah model pembelajaran yang didasarkan pada *Duality* (Dualitas), *Necessity* (Kebutuhan), and *repeated-Reasoning* (Penalaran-berulang) melalui aktifitas Eksplanasi-Diri dengan tahapan-tahapan: (1) Pemberian Masalah (PM); (2) Kesimpulan Awal (KA); (3) Pemeriksaan Kesimpulan Awal (PKA); (4) Uji Kesimpulan Awal (UKA); (5) Pelajaran yang dapat Dipetik (PD).

## 1.6 Struktur Organisasi Disertasi

Struktur organisasi utama dari disertasi ini terdiri dari lima bab yaitu: Bab I Pendahuluan; Bab II Kajian Pustaka; Bab III Metode Penelitian; Bab IV Temuan dan Pembahasan; serta Bab V Kesimpulan, Implikasi, dan Rekomendasi. Selanjutnya akan diuraikan gambaran singkat mengenai Bab I sampai Bab V.

Bab I Pendahuluan, memuat Latar Belakang Penelitian yang membahas tentang pentingnya Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis (KPBM), Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis (KKBM) dan Efikasi Diri Bukti

Matematis (EDBM); fakta-fakta tentang kemampuan-kemampuan tersebut yang masih belum sesuai dengan harapan; serta model pembelajaran DNRED sebagai solusi alternatif untuk mengembangkan kemampuan-kemampuan tersebut. Untuk memudahkan indentifikasi masalah penelitian, maka disajikan Rumusan Masalah Penelitian dan Tujuan Penelitian. Selanjutnya, gambaran tentang pentingnya penelitian ini disajikan dalam Signifikansi Penelitian dan Definisi Operasional. Sebagai penutup dari Bab I, disajikan Struktur Organisasi Disertasi untuk memberikan gambaran singkat dan sistematis tentang isi disertasi.

Bab II Kajian Pustaka, menjelaskan landasan teori yang berkaitan dengan masalah pada disertasi. Bagian pertama membahas tentang: Bukti Matematis dan Perannya; Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis dan Cara Menilainya; Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis dan Cara Menilainya; Kesulitan Mahasiswa dan Fenomena Didaktis dalam Pembuktian; Efikasi-Diri Bukti Matematis dan Cara Menilainya. Bagian kedua membahas tentang: Teori Pembelajaran dan Perkembangan Kognitif Kemampuan Pemahaman dan Konstruksi Bukti Matematis; Pembelajaran Berbasis-DNR (*Duality Necessity Repeated-Reasoning*); Teknik Eksplanasi-Diri; Pembelajaran Berbasis-DNR dengan Teknik Eksplanasi-Diri. Bagian ketiga membahas tentang: Keterkaitan antara Kemampuan Pemahaman, Konstruksi dan Efikasi-Diri Bukti Matematis dengan Model Pembelajaran DNRED; Kerangka Berpikir; dan Hipotesis Penelitian.

Bab III Metode Penelitian, membahas tentang metode penelitian yang digunakan. Bagian pertama membahas tentang Metode dan Desain Penelitian yang terdiri dari: Desain Kuantitatif dan Desain Kualitatif. Bagian kedua membahas tentang Pengembangan Instrumen Penelitian yang terdiri dari: Tes Pengetahuan Awal Geometri; Tes Kemampuan Pemahaman dan Konstruksi Bukti Matematis; Skala Efikasi Diri Bukti Matematis; Perangkat Pembelajaran Mata Kuliah Geometri.

Bab IV Temuan dan Pembahasan, membahas tentang analisis temuan dan pembahasan penelitian. Bagian pertama membahas Temuan penelitian yang terdiri atas: Analisis Data Pengetahuan Awal Geometri (PAG); Analisis Data Pencapaian dan Peningkatan Kemampuan Pemahaman Bukti Matematis (KPBM); Analisis

Data Pencapaian dan Peningkatan Kemampuan Konstruksi Bukti Matematis (KKBM); Analisis Data Efikasi-Diri Bukti Matematis (EDBM); Analisis Asosiasi KPBM, KKBM dan EDBM; Analisis Karakteristik Kualitas Eksplanasi-Diri Mahasiswa.

Bab V Kesimpulan, Implikasi dan Rekomendasi, merupakan bagian akhir dari disertasi ini. Kesimpulan memuat poin-poin pokok sebagai hasil dari temuan dan pembahasan penelitian. Implikasi menjelaskan beberapa dampak dan kondisi sebagai akibat dari hasil penelitian. Rekomendasi menyajikan beberapa saran yang berkaitan dengan penerapan model DNRED.