BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang dilakukan dalam membuat model matematika relaksasi dan osilasi menggunakan persamaan diferensial tipe Caputo dan menentukan solusi dari model tersebut.

3.1 Identifikasi Masalah

Pada tahap ini dilakukan identifikasi terhadap permasalahan yang akan diteliti dengan cara mengamati fenomena relaksasi dan osilasi pada dunia nyata. Dalam pengamatan ini diperoleh bahwa relaksasi dan osilasi terjadi pada material viskoelastis seperti senar pada gitar, dan polimer yang digunakan pada gedung tinggi untuk meredam getaran. Berdasarkan fenomena tersebut, maka akan dibuat model persamaan relaksasi dan osilasi yang dapat menggambarkan fenomena tersebut. Kemudian dari model tersebut akan ditentukan parameter mana yang memiliki pengaruh cukup signifikan terhadap laju perubahan solusi yang dicari.

3.2 Membuat Model Relaksasi dan Osilasi Fraksional

Dalam membuat model relaksasi dan osilasi fraksional bisa menggunakan konstruksi model fraksional Maxwell pada persamaan (2.14) dengan mengganti komponen klasiknya menggunakan elemen fraksional yang didefinisikan sebagai elemen mekanik yang memenuhi hubungan tegangan-regangan dengan turunan orde fraksional yang didefinisikan sebagai berikut (Yin & Zhu, 2006) :

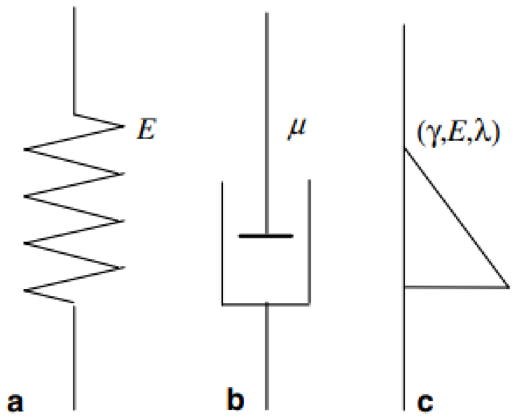
$$\sigma(t) = E\lambda^{\gamma} \frac{d^{\gamma}\epsilon}{dt^{\gamma}}, \qquad (0 < \gamma < 1) \tag{3.1}$$

$$G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\gamma} \tag{3.2}$$

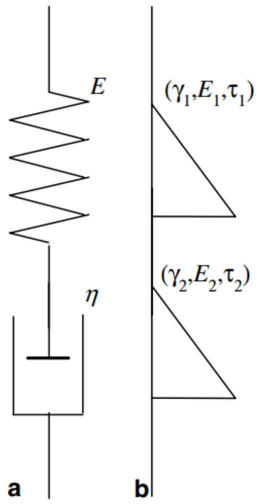
Di mana $\sigma(t)$adalah tegangan geser, E modulus geser, ϵ regangan geser, $\lambda = \frac{\mu}{E}$ waktu relaksasi, μ koefisien viskositas, dan $G(t)$ merupakan modulus relaksasi. Model tersebut juga dikenal sebagai Model Scott-Blair, atau bisa juga diinterpretasikan sebagai interpolasi antara hukum Hooke ($\gamma = 0$) dan hukum Newton ($\gamma = 1$).

Untuk membentuk model fraksionalnya, diperkenalkan terlebih dahulu komponen fraksional yang didefinisikan sebagai elemen mekanik yang memenuhi persamaan (3.1). Komponen fraksionalnya ditentukan dengan tiga parameter (γ, E, λ) dan disimbolkan dengan segitiga, sebagaimana ditunjukkan pada gambar (3.1). Selanjutnya, komponen fraksional akan diperlakukan seperti pegas dan peredam untuk membentuk model viskoelastis (Yin & Zhu, 2006).

Kemudian untuk membuat generalisasi yang tepat dari model Maxwell dapat dilakukan dengan mengganti kedua komponen klasik pada model Maxwell oleh komponen fraksional dengan parameter (γ_1, E_1, τ_1) dan (γ_2, E_2, τ_2) seperti pada gambar (3.2).



Gambar 3.1 (a) komponen elastis, (b) komponen viskos, (c) komponen fraksional (Yin & Zhu, 2006)



Gambar 3.2 (a) model Maxwell klasik, (b) model Maxwell fraksional (Yin & Zhu, 2006)

Komponen fraksional memenuhi hubungan tegangan-regangan, sehingga : $\sigma_1(t) = E_1\lambda_1^{\gamma_1}\frac{d^{\gamma_1}\epsilon_1(t)}{dt^{\gamma_1}}$ dan $\sigma_2(t) = E_2\lambda_2^{\gamma_2}\frac{d^{\gamma_2}\epsilon_2(t)}{dt^{\gamma_2}}$. Karena kedua komponen terhubung secara seri, maka dapat diperoleh :

$$\sigma(t) + \frac{E_1\lambda_1^{\gamma_1}}{E_2\lambda_2^{\gamma_2}}\frac{d^{(\gamma_1-\gamma_2)}\sigma(t)}{dt^{(\gamma_1-\gamma_2)}} = E_1\lambda_1^{\gamma_1}\frac{d^{\gamma_1}\epsilon(t)}{dt^{\gamma_1}} \tag{3.3}$$

Kemudian tanpa menghilangkan perumumannya, anggap bahwa $(\gamma_1 - \gamma_2) > 0$. Sehingga persamaan (3.3) dapat disederhanakan dengan menggunakan variabel baru, yaitu :

$$\lambda = \left(\frac{E_1\lambda_1^{\gamma_1}}{E_2\lambda_2^{\gamma_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}}, E = E_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\gamma_1} \tag{3.4}$$

Dan kemudian diperoleh persamaan umum dari model fraksional Maxwell, yaitu (Yin & Zhu, 2006) :

$$\sigma(t) + \lambda^{\gamma_1-\gamma_2}\frac{d^{(\gamma_1-\gamma_2)}\sigma(t)}{dt^{\gamma_1-\gamma_2}} = E\lambda^{\gamma_1}\frac{d^{\lambda_1}\epsilon(t)}{dt^{\gamma_1}} \tag{3.5}$$

Di mana $\sigma(t)$adalah tegangan geser, E modulus geser, dan $\epsilon(t)$ regangan geser.

Jika dibandingkan dengan persamaan (2.14), persamaan (3.5) merupakan sebuah persamaan tunggal yang menghubungkan tegangan dengan regangan antara komponen fraksional, sehingga orde diferensial pada persamaan tersebut menjadi orde fraksional juga.

Namun pada penelitian ini, model relaksasi dan osilasi fraksional merujuk pada hasil penelitian oleh Chen (2010) yang menyajikan persamaan (3.5) dengan lebih sederhana, yang mana persamaan relaksasi didefinisikan sebagai :

$$\frac{d^p x}{dt^p} + Ax = f(t), \qquad 0 < p < 1, x(0) = 1 \tag{3.6}$$

Di mana x adalah besar regangan pada sistem, A menyatakan $\frac{E}{c}$, E adalah modulo elastisitas, c adalah koefisien viskositas, $f(t)$ adalah hasil kali E dengan laju tegangan, dan kondisi awal $x(0) = 1$ menggambarkan kondisi sistem ketika $t = 0$ di mana regangan yang terjadi pada sistem adalah sebesar 1.

Selanjutnya model osilasi fraksional dikonstruksi dengan menurunkan persamaan hukum II Newton dengan melibatkan hukum Hooke tentang pegas seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.5.2. Sehingga persamaan model osilasi fraksional didefinisikan sebagai :

$$\frac{d^p y}{dt^p} + By = f(t), \qquad 1 < p < 2, y(0) = 1, y'(0) = 0 \tag{3.7}$$

Di mana y adalah perubahan kedudukan pegas, B menyatakan $\frac{k}{m} = \omega^2$, k adalah tetapan pegas, m adalah massa benda, ω adalah kecepatan sudut, kondisi awal $y(0) = 1$ menggambarkan kondisi sistem pada saat $t = 0$ Di mana terjadi perubahan kedudukan pada pegas sejauh 1, dan konfisi awal $y'(0) = 0$ menjelaskan bahwa sistem tidak memiliki kecepatan awal ketika $t = 0$.

3.3 Penyelesaian Analitik Model Relaksasi dan Osilasi

Setelah pembuatan model relaksasi dan osilasi fraksional, akan dilakukan pengkajian terhadap teori-teori yang mendukung penyelesaian model tersebut yaitu, fungsi gamma dan beta, persamaan diferensial fraksional tipe Caputo, transformasi Laplace dan penerapannya pada persamaan diferensial tipe Caputo. Selanjutnya model relaksasi dan osilasi fraksional yang telah dikonstruksi akan diselesaikan dengan mencari solusi analitiknya menggunakan persamaan diferensial fraksional tipe Caputo dengan bantuan transformasi Laplace.

3.4 Pembahasan

Solusi penyelesaian yang diperoleh kemudian disketsa ke dalam kurva yang menggambarkan perilaku gerak dari persamaan yang diteliti untuk kemudian diinterpretasikan. Selain itu, juga dicari beberapa parameter yang memiliki pengaruh terhadap dinamika gerak relaksasi dan osilasi dari material viskoelastis.

3.5 Kesimpulan dan Saran

Setelah analisis dan perhitungan, maka dapat diambil kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lanjutan.