BAB III
OPERATOR PENGALI SEBAGAI PEMBANGUN NORM PADA RUANG ORLICZ

Telah dibahas pada bab sebelumnya mengenai konsep-konsep dasar sebagai teori pendukung untuk membuktikan sifat-sifat dari operator pengali pada ruang Orlicz (L_θ). Pada bab ini akan dipelajari tentang definisi operator pengali yang membangun norm pada L_θ beserta sifat-sifat yang berlaku.

3.1 Karakteristik Norm pada Ruang Orlicz yang Dibangun Oleh Operator Pengali

Pengkonstruksian norm pada L_θ yang dibangun oleh operator pengali melibatkan pendefinisian suatu operator pengali yang memetakan L_θ ke L_θ. Syarat cukup untuk menyatakan bahwa operator pengali tersebut terpetakan pada L_θ adalah pengali pada operator yang dinotasikan dengan u merupakan fungsi terbatas esensial.

Teorema 3.1.1

Misalkan $f \in L_\theta$ dan u adalah fungsi terukur yang terdefinisi pada X. Jika $u : X \to \mathrm{R}$ adalah fungsi terbatas esensial, maka $M_u f = u.f$ yang didefinisikan dengan $(M_u f)(x) = u(x) f(x)$ untuk semua $x \in X$ termuat pada L_θ

Bukti:

Misalkan $u : X \to \mathrm{R}$ adalah fungsi terbatas esensial, maka berdasarkan Definisi 2.8.4 terdapat konstanta $N > 0$ sedemikian sehingga

$$|u(x)| \leq N$$

hampir dimana-mana pada X. Akan ditunjukkan bahwa $u.f$ termuat pada L_θ. Misalkan $f \in L_\theta$. Berdasarkan Definisi 2.9.15, terdapat konstanta $a > 0$ sedemikian sehingga $\int_X \theta(af(x))d\mu < \infty$. Pilih $b = \dfrac{a}{N} > 0$, sedemikian sehingga

$$\int_X \theta(bM_u f)d\mu = \int_X \theta\left(\frac{au(x)f(x)}{N}\right)d\mu$$

$$\leq \int_X \theta\left(\frac{aNf(x)}{N}\right) d\mu$$

$$= \int_X \theta(af(x)) d\mu < \infty.$$

Terbukti bahwa $M_u f \in L_\theta$. ■

Selanjutnya akan dibahas tentang operator pengali pada L_θ.

Definisi 3.1.2: Operator Pengali (Kubrusly, 2001: 497)

Misalkan $f \in L_\theta$ *dan* $u \in L_\infty$. *Operator pengali* M_u *adalah suatu pemetaan dari* L_θ *ke* L_θ *yang didefinisikan oleh*

$$M_u f = u.f$$

,untuk setiap $f \in L_\theta$, *dimana* $(M_u f)(x) = u(x) f(x)$ *untuk semua* $x \in X$.

Contoh :

Didefinisikan suatu fungsi Young $\theta(x) = |x|^p$, $1 \leq p < \infty$.

Misalkan

$$u(x) = \begin{cases} k & jika \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & jika \;\; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

dan

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & jika \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & jika \;\; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Jelas bahwa $u.f \in L_\theta$.

Definisi 3.1.3 (Masta, 2013: 3)

Misalkan $X \neq \emptyset$, θ *adalah fungsi Young,* $u \in L_\infty$. *Jika terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga* $u(x) \geq \delta$ *untuk setiap* $x \in X$, *maka untuk sebarang fungsi terukur f di* X , *didefinisikan*

$$\|f\|_{u,\theta} = \inf\left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{b} \right) dx \le 1 \right\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\|f\|_{u,\theta}$ merupakan suatu norm. Terlebih dahulu akan diberikan beberapa sifat yang berlaku pada $\|f\|_{u,\theta}$.

Lemma 3.1.4

Misalkan θ adalah fungsi Young dan $f : X \to \mathbb{R}$ adalah sebarang fungsi terukur.

1) *Jika* $0 < \|f\|_{u,\theta} < \infty$ *maka* $\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|f\|_{u,\theta}} \right) dx \le 1$.

2) $\|f\|_{u,\theta} \le 1$ *jika dan hanya jika* $\int_X \theta((M_u f)(x)) dx \le 1$.

3) $\|f\|_{u,\theta} = 0$ *jika dan hanya jika* $\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\varepsilon} \right) dx \le 1$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$.

Bukti :

1) Ambil sembarang barisan $b_n = \|f\|_{u,\theta} + \frac{1}{n} > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{b_n} \right) dx \le 1.$$

Jelas bahwa b_n adalah barisan monoton turun yang konvergen ke $\|f\|_{u,\theta}$. Karena θ adalah fungsi kontinu dan berdasarkan teorema 2.6.16 maka

$$\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|f\|_{u,\theta}} \right) dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{b_n} \right) \le 1.$$

2) Jika $\int_X \theta((M_u f)(x)) dx \le 1$ dari definisi $\|f\|_{u,\theta}$ diperoleh $\|f\|_{u,\theta} \le 1$.

Sebaliknya, jika $\|f\|_{u,\theta} \leq 1$ maka $\frac{1}{\|f\|_{u,\theta}} \geq 1$. Karena θ adalah fungsi monoton naik dan fungsi genap, maka

$$1 \geq \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) dx \geq \int_X \theta((M_u f)(x)) dx .$$

3) $(\Rightarrow)$ Misalkan $\|f\|_{u,\theta} = 0$ dan sebarang $x \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\varepsilon}\right) dx \leq 1$.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Definisi 3.1.3 diperoleh $\|f\|_{u,\theta} \leq \varepsilon$. Sehingga

$$\frac{1}{\|f\|_{u,\theta}} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{|(M_u f)(x)|}{\|f\|_{u,\theta}} \geq \frac{|(M_u f)(x)|}{\varepsilon},$$

Karena θ fungsi naik dan fungsi genap, maka

$$\theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) \geq \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\varepsilon}\right).$$

Berdasarkan Lemma 2.9.9 diperoleh

$$1 \geq \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) dx \geq \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\varepsilon}\right) dx .$$

Sehingga terbukti bahwa $\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\varepsilon}\right) dx \leq 1$.

$(\Leftarrow)$ Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $\int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1$.

Perhatikan bahwa

$$\|f\|_{u,\theta} = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1\right\}.$$

Sehingga diperoleh $\|f\|_{u,\theta} < \varepsilon$. Karena ε diambil sebarang, maka terbukti bahwa $\|f\|_{u,\theta} = 0$. ■

Teorema 3.1.5

Untuk sebarang fungsi terukur f pada X, $\|f\|_{u,\theta} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$ hampir dimana-mana pada X.

Bukti :

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Misalkan $f(x) = 0$ maka $\int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\varepsilon}\right) d\mu = 0 \leq 1$. Hal ini berarti $\varepsilon \in \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{b}\right) d\mu \leq 1 \right\}$, sehingga $\|f\|_{u,\theta} \leq \varepsilon$. Karena ε diambil sebarang maka $\|f\|_{u,\theta} = 0$.

($\Rightarrow$) misalkan $\|f\|_{u,\theta} = 0$, berarti $\inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{b}\right) d\mu \leq 1 \right\} = 0$.

Perhatikan bahwa $\theta(aM_u f) = \theta\left((1-\varepsilon)0 + \varepsilon\left(\frac{aM_u f}{\varepsilon}\right)\right) \leq \varepsilon\theta\left(\frac{aM_u f}{\varepsilon}\right)$ untuk $a > 0$.

Berdasarkan Teorema 3.1.6, jika $\|f\|_{u,\theta} = 0$ maka $\int_X \theta\left(\frac{aM_u f}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1$.

Sehingga

$$\int_X \theta(aM_u f) d\mu \leq \varepsilon \int_X \theta\left(\frac{aM_u f}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon .$$

Karena ε diambil sebarang, haruslah $\int_X \theta(aM_u f) d\mu = 0$.

Sehingga $\theta(aM_u f) = 0$ hampir dimana-mana. Karena θ adalah fungsi Young, dan $a > 0$ maka haruslah $f = 0$ hampir dimana-mana. ■

Teorema 3.1.6 (Masta, 2013: 4)

Jika X adalah sebarang himpunan tak kosong, maka

$$\| f \|_{u,\theta} = \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{b} \right) d\mu \le 1 \right\}.$$

adalah norm pada L_θ.

Bukti :

1) $\| f \|_{u,\theta} \ge 0$ jelas.

2) Terbukti berdasarkan Teorema 3.1.5.

3) Akan dibuktikan bahwa untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\|af\|_{u,\theta} = |a| \| f \|_{u,\theta}$.

Misalkan $a = 0$, jelas terbukti. Misalkan $\frac{b}{a} = c$, dengan $a \ne 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|af\|_{u,\theta} &= \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{aM_u f}{b} \right) d\mu \le 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{b/a} \right) d\mu \le 1 \right\} \end{aligned}$$

Untuk $a > 0$, maka

$$\begin{aligned} \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{b/a} \right) d\mu \le 1 \right\} &= \inf \left\{ ac > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{c} \right) d\mu \le 1 \right\} \\ &= a \inf \left\{ c > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{c} \right) d\mu \le 1 \right\}. \end{aligned}$$

Untuk $a < 0$, maka

$$\begin{aligned} \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{b/a} \right) d\mu \le 1 \right\} &= \inf \left\{ ac > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{-c} \right) d\mu \le 1 \right\} \\ &= -a \inf \left\{ -c > 0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{c} \right) d\mu \le 1 \right\} \end{aligned}$$

Sehingga $\|af\|_{u,\theta} = |a| \|f\|_{u,\theta}$.

4) Akan dibuktikan bahwa $\|f+g\|_{u,\theta} \le \|f\|_{u,\theta} + \|g\|_{u,\theta}$.

Perhatikan bahwa $\|f+g\|_{u,\theta} = \inf\left\{ b>0 : \int_X \theta\left(\frac{M_u(f+g)}{b}\right) d\mu \le 1 \right\}$.

Berdasarkan Lemma 3.1.4, misalkan $0 < \|f\|_{u,\theta} + \|g\|_{u,\theta} < \infty$, maka

$$\int_X \theta\left(\frac{M_u(f+g)}{\|f\|_{u,\theta}+\|g\|_{u,\theta}}\right) d\mu = \int_X \theta\left(\frac{\|f\|_{u,\theta}}{\|f\|_{u,\theta}+\|g\|_{u,\theta}} \frac{M_u f}{\|f\|_{u,\theta}} + \frac{\|g\|_{u,\theta}}{\|f\|_{u,\theta}+\|g\|_{u,\theta}} \frac{M_u g}{\|g\|_{u,\theta}}\right) d\mu$$

Karena θ adalah fungsi konveks, maka

$$\int_X \theta\left(\frac{M_u(f+g)}{\|f\|_{u,\theta}+\|g\|_{u,\theta}}\right) d\mu$$

$$\le \frac{\|f\|_{u,\theta}}{\|f\|_{u,\theta}+\|g\|_{u,\theta}} \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\|f\|_{u,\theta}}\right) d\mu + \frac{\|g\|_{u,\theta}}{\|f\|_{u,\theta}+\|g\|_{u,\theta}} \int_X \theta\left(\frac{M_u g}{\|g\|_{u,\theta}}\right) d\mu \le 1.$$

Sehingga $\|f+g\|_{u,\theta} \le \|f\|_{u,\theta} + \|g\|_{u,\theta}$. ■

Contoh :

1) Misalkan $M \subset X$, $0 < \mu(M) < \infty$. Jika χ_M adalah fungsi karakteristik pada M maka

$$\|\chi_M\|_{u,\theta} = \frac{\|u\|_\infty}{\theta^{-1}\left(\frac{1}{\mu(M)}\right)}$$

dimana θ^{-1} adalah invers dari θ.

Bukti :

Berdasarkan Definisi 3.1.3

$$\|f\|_{u,\theta} = \inf\left\{ b>0 : \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{b}\right) dx \le 1 \right\}.$$

Akan diperiksa jika $\dfrac{\|u\|_\infty}{\theta^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(M)}\right)} \le b$ maka $\int_X \theta\left(\dfrac{(M_u f)(x)}{b}\right)dx \le 1$.

Perhatikan bahwa jika $\dfrac{\|u\|_\infty}{\theta^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(M)}\right)} \le b$ maka $\dfrac{\|u\|_\infty}{b} \le \theta^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(M)}\right)$, sehingga

$$\theta\left(\frac{\|u\|_\infty}{b}\right) \le \left(\frac{1}{\mu(M)}\right).$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh,

$$\int_X \theta\left(\frac{u(x)\chi_M(x)}{b}\right)dx \le \int_X \theta\left(\frac{\|u\|_\infty \chi_M(x)}{b}\right)dx$$

$$\le \frac{1}{\mu(M)}\int_X (\chi_M)dx = 1$$

Hal ini berarti $\dfrac{\|u\|_\infty}{\theta^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(M)}\right)}$ adalah infimum dari b.

2) Untuk $\theta(x) = \dfrac{x^p}{p}$ $(p > 1)$ maka

$$\|f\|_{u,\theta} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \|u\|_\infty^p.$$

Teorema 3.1.7 (Masta, 2013:5)

$\|f\|_{u,\theta}$ *dan* $\|f\|_\theta$ *ekuivalen.*

Bukti :

Misalkan $u \in L_\infty$. Akan dicari $c, C > 0$ sedemikian sehingga $c\|f\|_{u,\theta} \le \|f\|_\theta \le C\|f\|_{u,\theta}$.

Perhatikan bahwa

$$\int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|u\|_\infty \|f\|_\theta}\right)dx = \int_X \theta\left(\frac{u(x)f(x)}{\|u\|_\infty \|f\|_\theta}\right)dx$$

$$\leq \int_X \theta\left(\frac{\|u\|_\infty f(x)}{\|u\|_\infty \|f\|_\theta}\right)dx$$

$$\leq \theta\left(\frac{f(x)}{\|f\|_\theta}\right)dx$$

$$\leq 1.$$

Jadi $\|f\|_{u,\theta} \leq \|u\|_\infty \|f\|_\theta$

Selanjutnya akan dicari $C > 0$ sedemikian sehingga $\|f\|_\theta \leq C\|f\|_{u,\theta}$. Karena terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $u(x) \geq \delta > 0$ untuk setiap $x \in X$ maka diperoleh :

$$\int_X \theta\left(\frac{\delta f(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right)dx = \int_X \theta\left(\frac{\delta u(x)f(x)}{u(x)\|f\|_{u,\theta}}\right)dx$$

$$= \int_X \theta\left(\frac{\delta(M_u f)(x)}{u(x)\|f\|_{u,\theta}}\right)dx$$

$$\leq \int_X \theta\left(\frac{\delta(M_u f)(x)}{\delta\|f\|_{u,\theta}}\right)dx$$

$$= \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right)dx$$

$$\leq 1.$$

Akibatnya $\|f\|_\theta \leq \frac{1}{\delta}\|f\|_{u,\theta}$.■

Lemma 3.1.8

Misalkan $f \in L_\theta$, *maka*

1) $\int_x \theta(M_u f)d\mu \leq \|f\|_{u,\theta}$ *jika* $\|f\|_{u,\theta} \leq 1$.

2) $\int_X \theta(M_u f)d\mu \geq \|f\|_{u,\theta}$ *jika* $\|f\|_{u,\theta} > 1$.

Bukti :

1) Misalkan $\|f\|_{u,\theta} \leq 1$. Berdasarkan Teorema 2.9.2.2 dan definisi 3.1.3 diperoleh

$$\int_X \theta(M_u f)d\mu \leq \|f\|_{u,\theta} \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\|f\|_{u,\theta}}\right)d\mu \leq \|f\|_{u,\theta}.$$

2) Misalkan $\|f\|_{u,\theta} > 1$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $1 < \|f\|_{u,\theta} - \varepsilon < \|f\|_{u,\theta}$. Jelas bahwa $\|f\|_{u,\theta} - \varepsilon$ bukan batas bawah dari $\|f\|_{u,\theta}$, sehingga $\int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\|f\|_{u,\theta} - \varepsilon}\right)d\mu > 1$. Karena $\frac{1}{\|f\|_{u,\theta} - \varepsilon} < 1$ maka

$$1 < \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\|f\|_{u,\theta} - \varepsilon}\right)d\mu \leq \frac{1}{\|f\|_{u,\theta} - \varepsilon}\int_X \theta(M_u f)d\mu.$$

Dengan demikian $\|f\|_{u,\theta} - \varepsilon < \int_X \theta(M_u f)d\mu$. Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka terbukti $\|f\|_{u,\theta} \leq \int_X \theta(M_u f)d\mu$. ■

Berikut ini akan dibahas mengenai keberlakuan ketidaksamaan Holder dengan norm $\|\cdot\|_{u,\theta}$ yang didefinisikan pada Definisi 3.1.3. Selanjutnya akan dibahas pula syarat cukup untuk menyatakan bahwa L_ψ merupakan ruang dual dari L_θ dimana L_ψ adalah ruang Orlicz dengan ψ adalah fungsi komplemen dari θ.

Teorema 3.1.9

Misalkan $f \in L_\theta, g \in L_\psi$, *dan* $u \in L_\infty$. *Jika* v *adalah invers dari* u *di* L_∞ *maka*

$$\int_X f(x)g(x)d\mu \leq 2\|f\|_{u,\theta}\|g\|_{v,\psi}$$

untuk semua $x \in X$.

Bukti:

Jika $\|f\|_{u,\theta}=0$ atau $\|g\|_{v,\psi}=0$, maka $f(x)=0$ dan $g(x)=0$. Asumsikan bahwa $\|f\|_{u,\theta},\|g\|_{v,\psi}>0$ dan misalkan fungsi $v\in L_\infty$ adalah invers dari $u\in L_\infty$ sedemikian sehingga $u(x)v(x)=1$ untuk semua $x\in X$. Berdasarkan ketidaksamaan Young pada Teorema 2.9.6, untuk semua $s,t\in \mathbb{R}$ diperoleh

$$st\le \theta(s)+\psi(t).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\frac{g(x)}{\|g\|_{v,\psi}} &= \frac{1.(f(x)g(x))}{\|f\|_{u,\theta}\|g\|_{v,\psi}}\\ &= \frac{(u(x)f(x))(v(x)g(x))}{\|f\|_{u,\theta}\|g\|_{v,\psi}}\\ &\le \theta\left(\frac{u(x)f(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right)+\vartheta\left(\frac{v(x)g(x)}{\|g\|_{v,\psi}}\right).\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\frac{1}{\|f\|_{u,\theta}\|g\|_{v,\psi}}\int_X f(x)g(x)d\mu \le \int_X \theta\left(\frac{u(x)f(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right)+\int_X \vartheta\left(\frac{v(x)g(x)}{\|g\|_{v,\psi}}\right)\le 2.$$

Jadi terbukti bahwa $\int_X f(x)g(x)d\mu\le 2\|f\|_{u,\theta}\|g\|_{v,\psi}$. ■

Teorema 3.1.10

Misalkan θ,ψ fungsi Young yang saling komplemen dan $x\in X$. Jika $f\in L_\theta, g\in L_\psi$ dan v invers dari u di L_∞ maka

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_X f(x)g(x)dx$$

mendefinisikan fungsional linear terbatas F pada L_θ dan $\|F\|\le\|g\|_{v,\psi}$ dimana $\|F\|$ adalah norm dari F.

Bukti :

Berdasarkan Teorema 3.1.9 diperoleh

$$|F(f)| \le \|f\|_{u,\theta} \|g\|_{v,\psi} .$$

Sehingga F adalah fungsional linear terbatas pada L_θ. Dengan mengambil supremum atas semua f dengan norm 1, diperoleh $\|F\| \le \|g\|_{v,\psi}$. ■

Teorema 3.1.11

Misalkan $f \in L_\theta, g \in L_\psi$ dan v invers dari u di L_∞ dan $x \in X$. Jika θ tidak memenuhi kondisi Δ_2 maka terdapat fungsional linear terbatas pada L_θ yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk fungsional linear $F(f) = \frac{1}{2}\int_X f(x)g(x)dx$.

Bukti :

Misalkan θ tidak memenuhi kondisi Δ_2, maka berdasarkan Teorema 2.9.23 $E_\theta \subsetneq L_\theta$, sehingga terdapat fungsi $f_0 \in L_\theta$ tetapi $f_0 \notin E_\theta$.

Misalkan F adalah fungsional linear terbatas pada L_θ dimana

$$F(f_0) = 1, \qquad F(f) = 0 \qquad \text{untuk } f \in E_\theta$$

Misalkan F adalah fungsional linear terbatas yang didefinisikan pada Teorema 3.1.10 dengan $g \in L_\psi$ dan misalkan pula $g_n (n \in \mathbb{N})$ adalah fungsi-fungsi terukur terbatas dimana

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \textit{untuk } |g(x)| \le n \\ 0 & \textit{untuk } |g(x)| > n \end{cases}.$$

Karena g_n fungsi terukur terbatas maka berdasarkan Definisi 2.9.20, haruslah $g_n \in E_\theta$. Sehingga

$$F(g_n) = \frac{1}{2}\int_X g_n(x)g(x)dx = 0 \qquad \text{untuk } n \in \mathbb{N} .$$

Ini menunjukkan bahwa $g(x)=0$ hampir dimana-mana pada X sehingga diperoleh $F(f_0)=0$, yang kontradiksi dengan $F(f_0)=1$. ■

Teorema 3.1.12

Jika F adalah fungsional linear terbatas pada E_θ maka terdapat tepat satu $g \in L_\psi$ sedemikian sehingga

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_X f(x)g(x)d\mu, \qquad f \in E_\theta .$$

Bukti :

1. Keberadaan dari g.

   Untuk suatu subhimpunan terukur M dari X, misalkan χ_M fungsi karakteristik dari M. Diambil

$$G(M)=F(\chi_M).$$

   Sehingga

$$|G(M)|=|F(\chi_M)|\leq \|F\|\|\chi_M\|_{u,\theta}=\|F\|\left(\frac{\|u\|_\infty}{\theta^{-1}\left(\frac{1}{\mu(M)}\right)}\right)$$

   dan diperoleh $\lim\limits_{\mu(M)\to 0} G(M)=0$. Berdasarkan Teorema 2.8.2, $G \in AC[\mu]$. Berdasarkan Teorema Radon-Nikodym 2.8.3, terdapat tepat satu $g \in L_1$ sedemikian sehingga

$$G(M)=\int_M g(x)dx .$$

   Jika $f \in E_\theta$ maka terdapat barisan fungsi-fungsi terbatas $f_n (n \in \mathbb{N})$ yang konvergen ke f dimana $|f_n(x)|\leq |f(x)|$ hampir dimana-mana pada X. Berdasarkan Teorema 2.9.8, $\|f_n\|_{u,\theta}\leq\|f\|_{u,\theta}$, dan

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)g(x)|=|f(x)g(x)|$$

hampir dimana-mana pada X . Berdasarkan Lemma Fatao 2.6.16, mengakibatkan

$$\frac{1}{2}\left|\int_X f(x)g(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n(x)g(x)|dx$$

$$=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2}\int_X \left(|f_n(x)|\operatorname{sgn}(g(x))\right)g(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} F\left(|f_n|\operatorname{sgn} g\right)$$

$$\le \|F\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_{u,\theta} \le \|F\|\|f\|_{u,\theta} < \infty .$$

Sehingga berdasarkan Teorema 2.9.24 diperoleh $g \in L_\psi$.

Misalkan didefinisikan suatu fungsional $F_1(f) = \frac{1}{2}\int_X f(x)g(x)dx$ yang terdefinisi pada E_θ . Karena E_θ adalah klosur dari $B(X)$ (himpunan semua fungsi terukur terbatas pada X) dan $B(X)$ padat di E_θ , maka $F_1(f) = F(f)$ untuk semua $f \in E_\theta$

2. Ketunggalan dari g

Misalkan $g_1, g_2 \in L_\psi$ sedemikian sehingga

$$F(f) = \frac{1}{2}\int_X f(x)g_1(x)dx = \frac{1}{2}\int_X f(x)g_2(x)dx ,$$

untuk sebarang $f \in L_\theta$. Perhatikan bahwa

$$0 = \frac{1}{2}\int_X f(x)(g_1(x) - g_2(x))dx .$$

Karena $f \in L_\theta$ diambil sebarang, sedangkan $g_1 - g_2 \in L_\psi$ tepat satu, maka haruslah $g_1(x) = g_2(x)$ hampir dimana-mana pada X .■

Teorema 3.1.13

L_ψ adalah ruang dual dari E_θ .

Bukti :

Berdasarkan Teorema 3.1.10, untuk sebarang $g \in L_\psi$ terdapat fungsional F di E_θ dengan

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_X f(x)g(x)dx$$

untuk setiap $f\in E_\theta$. Jelas bahwa F linear dan terbatas, sehingga diperoleh $F\in E_\theta^*$. Sampai sini telah dibuktikan bahwa $F\mapsto g\in L_\psi$ suatu pengaitan dari E_θ^* ke L_ψ yang bersifat onto. Selanjutnya dengan mengacu pada Teorema 3.1.9 diperoleh

$$|F(f)|=\left|\frac{1}{2}\int_X f(x)g(x)dx\right|\leq\|f\|_{u,\theta}\|g\|_{v,\psi}.$$

Dengan mengambil supremum atas semua f dengan norm 1, diperoleh

$$\|F\|\leq\|g\|_{v,\psi}.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$\frac{1}{2}\left|\int_X f(x)g(x)dx\right|\leq\|F\|\|f\|_{u,\theta}<\infty$. Berdasarkan Definisi 2.9.18 dan Teorema 3.1.17 dengan mengambil supremum atas semua f dengan norm $\frac{1}{2}$ diperoleh norm $\|g\|_{\theta,\psi}$ yang ekuivalen dengan $\|g\|_{v,\psi}$. Sehingga diperoleh $\|g\|_{v,\psi}\leq\|F\|$.

Dengan demikian telah dibuktikan pengaitan $F\mapsto g\in L_\psi$ bersifat isometris. Oleh karena itu disimpulkan $E_\theta^*=L_\psi$.■

Teorema 3.1.14

Jika $\theta\in\Delta_2$ maka dual dari L_θ adalah L_ψ, dan

Jika $\psi\in\Delta_2$ maka dual dari L_ψ adalah L_θ.

Bukti :

Berdasarkan Teorema 3.1.12 diketahui bahwa L_ψ adalah ruang dual dari E_θ dan pada Teorema 2.9.22, jika $\theta\in\Delta_2$ maka $E_\theta=L_\theta$.■

3.2 Karakteristik Operator Pengali pada Ruang Orlicz

Pada subbab ini, akan dibahas sifat-sifat yang berlaku pada operator pengali yaitu kelinearan, invertible, keterbatasan, dan kekontinuan operator.

Teorema 3.2.1

Operator pengali M_u *pada ruang* L_θ *merupakan operator linear.*

Bukti :

Akan dibuktikan M_u linear. Diambil sebarang f_1, f_2 pada ruang L_θ dan konstanta $a,b \in \mathrm{R}$ .Karena $u.f$ fungsi linear maka

$$\begin{aligned} M_u(af_1+bf_2)(x) &= u(x)(af_1(x)+bf_2(x)) \\ &= u(x)af_1(x)+u(x)bf_2(x) \\ &= a(u(x)f_1(x))+b(u(x)f_2(x)) \\ &= aM_u f_1 + bM_u f_2 . \end{aligned}$$

Terbukti bahwa M_u operator linear. ■

Teorema 3.2.2 (Komal-Gupta, 2001: 396)

Operator pengali M_u *pada* L_θ *memiliki invers di* L_θ *jika dan hanya jika* u *memiliki invers di* $L_\infty(\mu)$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan M_u invertible, maka M_u^{-1} merupakan operator pengali pada ruang Orlicz, sedemikian sehingga $M_u^{-1} = M_v$ untuk suatu $v \in L_\infty$. Hal ini berarti v adalah invers dari u .

($\Leftarrow$) Jika terdapat $v \in L_\infty$ yang merupakan invers dari u, maka $M_u^{-1} = M_{u^{-1}} = M_v$. sehingga M_u adalah invers dari M_u .■

Teorema 3.2.3

Jika M_u adalah suatu operator pengali pada ruang L_θ dan $u \in L_\infty$, maka M_u adalah operator terbatas.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa M_u adalah operator linear terbatas. Akan dicari konstanta $c > 0$ sedemikian sehingga $\| f \|_{u,\theta} \leq c \| f \|_\theta$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_X \theta\left(\frac{(M_u f)(x)}{\|u\|_\infty \| f \|_\theta} \right) d\mu &= \int_X \theta\left(\frac{u(x) f(x)}{\|u\|_\infty \| f \|_\theta} \right) d\mu \\ &\leq \int_X \theta\left(\frac{\|u\|_\infty \; f(x)}{\|u\|_\infty \| f \|_\theta} \right) d\mu \\ &= \int_X \theta\left(\frac{f(x)}{\| f \|_\theta} \right) d\mu \leq 1 \end{aligned}$$

Diperoleh $\| f \|_{u,\theta} \leq \|u\|_\infty \| f \|_\theta$. Selanjutnya dipilih $c = \|u\|_\infty$. Jadi terbukti bahwa M_u adalah operator terbatas. ■

Perhatikan bahwa M_u adalah operator linear terbatas pada L_θ. Artinya terdapat konstanta $c > 0$ sedemikian sehingga $\| f \|_{u,\theta} \leq c \| f \|_\theta$. Kemungkinan nilai terkecil dari c adalah supremum dari $\dfrac{\| f \|_{u,\theta}}{\| f \|_\theta}$ dimana $f(x) \neq 0$ untuk semua $x \in X$, dan dinotasikan dengan $\|M_u\|$. (untuk $f(x) = 0$, mengakibatkan $(M_u f)(x) = 0$, sehingga supremum dari $\| f \|_{u,\theta}$ adalah 0). Didefinisikan

$$\|M_u\| = \sup_{\substack{f \in L_\theta \\ f \neq 0}} \frac{\| f \|_{u,\theta}}{\| f \|_\theta}$$

Kemudian misalkan $a = \|f\|_\theta$, dan dikonstruksi suatu fungsi dimana $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right) f(x)$. Jelas bahwa $\|g\|_\theta = 1$. Karena M_u linear, maka

$$\|M_u\| = \sup_{\substack{f \in L_\theta \\ f \neq 0}} \frac{1}{a} \|f\|_{u,\theta} = \sup_{\substack{f \in L_\theta \\ f \neq 0}} \left\| \frac{f}{a} \right\|_{u,\theta} = \sup_{\substack{f \in L_\theta \\ \|g\|_\theta = 1}} \|g\|_{u,\theta}.$$

Sehingga diperoleh $\|M_u\| = \sup\limits_{\substack{f \in L_\theta \\ \|f\|_\theta = 1}} \|f\|_{u,\theta}$.

Lemma 3.2.4

Jika M_u adalah operator pengali linear terbatas pada ruang L_θ, maka $\|M_u\|$ adalah norm dari operator pengali M_u yang didefinisikan oleh

$$\|M_u\| = \sup_{\substack{f \in L_\theta \\ \|f\|_\theta = 1}} \|f\|_{u,\theta}$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $\|M_u\|$ suatu norm.

(1) $\|M_u\| \geq 0$ jelas.

(2) Jelas bahwa $\|M_u\| = 0$ jika dan hanya jika $M_u f = 0$ untuk semua $f \in L_\theta$.

(3) Untuk sebarang $a \in \mathrm{R}$, diperoleh

$$\|aM_u\| = \sup_{\|f\|_\theta = 1} a\|f\|_{u,\theta} = \sup_{\|f\|_\theta = 1} |a|\|f\|_{u,\theta} = |a| \sup_{\|f\|_\theta = 1} \|f\|_{u,\theta}.$$

(4) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\|(M_u + M_u^{'})\| &= \sup_{\|f\|_\theta = 1} \|f + f'\|_{u,\theta} \\
&\leq \sup_{\|f\|_\theta = 1} (\|f\|_{u,\theta} + \|f'\|_{u,\theta}) \\
&= \sup_{\|f\|_\theta = 1} \|f\|_{u,\theta} + \sup_{\|f\|_\theta = 1} \|f'\|_{u,\theta} \\
&= \|M_u\| + \|M_u^{'}\|.
\end{aligned}$$

Berdasarkan (1), (2), (3), dan (4) terbukti bahwa $\|M_u\|$ suatu norm. ■

Teorema 3.2.5

Jika $M_u : L_\theta \to L_\theta$ *adalah operator pengali linear terbatas, maka* $u \in L_\infty(\mu)$ *dan berlaku* $\|M_u\| = \|u\|_\infty$.

Bukti :

Misalkan M_u terbatas. Andaikan $u \notin L_\infty$, maka untuk setiap $n \in \mathrm{N}$, terdapat himpunan $E_n = \{x \in X : u(x) > n\}$ dengan $\mu(E_n) > 0$. Misalkan χ_{E_n} fungsi karakteristik dari E_n pada X , maka

$$1 \geq \int_X \theta\left(\frac{u(x)\chi_{E_n}(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) d\mu \geq \int_X \theta\left(\frac{n\chi_{E_n}(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) d\mu .$$

Sehingga $\|f\|_{u,\theta} \geq n\|f\|_\theta$.

Ini kontradiksi dengan M_u terbatas, sehingga haruslah $u \in L_\infty$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\|u\|_\infty \leq \|M_u\|$.

Misalkan $\varepsilon > 0$. Karena $\|u\|_\infty = \sup\{n : \mu(\{x :\in X : u(x) \geq n\}) > 0\}$, maka himpunan $E = \{x \in X : u(x) \geq \|u\|_\infty - \varepsilon\}$ memiliki ukuran positif. Diperoleh

$$\int_X \theta\left(\frac{(\|u\|_\infty - \varepsilon) f(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) d\mu \leq \int_X \theta\left(\frac{u(x) f(x)}{\|f\|_{u,\theta}}\right) d\mu \leq 1 .$$

Artinya $\|f\|_\theta \leq \dfrac{1}{(\|u\|_\infty - \varepsilon)}\|f\|_{u,\theta}$. Dengan mengambil supremum atas semua f dengan norm 1, diperoleh $\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \|M_u\|$. Karena ε diambil sebarang, maka $\|u\|_\infty \leq \|M_u\|$. Berdasarkan Teorema 3.1.5 diperoleh $\|M_u\| \leq \|u\|_\infty$. Jadi terbukti bahwa $\|M_u\| = \|u\|_\infty$. ■

Teorema 3.2.6

Misalkan M_u adalah operator pengali pada ruang L_θ dan $u \in L_\infty$. M_u terbatas jika dan hanya jika M_u kontinu.

Bukti :

($\Rightarrow$) Misalkan $\|M_u\| \neq 0$. Asumsikan bahwa M_u terbatas. Diambil sebarang $f_0 \in L_\theta$ dan $\varepsilon > 0$. Untuk setiap $f \in L_\theta$ sedemikian sehingga,

$$\| f - f_0\|_\theta < \delta \text{ dimana } \delta = \frac{\varepsilon}{\|M_u\|}$$

diperoleh $\| f - f_0\|_{u,\theta} \leq \|M_u\| \| f - f_0\|_\theta < \|M_u\| \delta = \varepsilon$.

($\Leftarrow$) asumsikan bahwa M_u kontinu pada sebarang $f_0 \in L_\theta$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\| f - f_0\|_{u,\theta} \leq \varepsilon$ untuk semua $f \in L_\theta$ dimana $\| f - f_0\|_\theta \leq \delta$. Diambil sebarang fungsi $g \in L_\theta$ sehingga $g(x) \neq 0$ untuk semua $x \in X$ dan di konstruksi

$$f(x) - f_0(x) = \frac{\delta}{\|g\|_\theta} g(x)$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}\| f - f_0\|_\theta &= \inf\left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{f(x) - f_0(x)}{b}\right) d\mu \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{ b > 0 : \int_X \theta\left(\frac{\delta g(x)}{\|g\|_\theta b}\right) d\mu \leq 1\right\}\end{aligned}$$

Misalkan $c = \dfrac{\|g\|_\theta b}{\delta}$, maka

$$\| f - f_0\|_\theta = \frac{\delta}{\|g\|_\theta} \inf\left\{ c > 0 : \int_X \theta\left(\frac{g(x)}{c}\right) d\mu \leq 1\right\} = \frac{\delta}{\|g\|_\theta} \|g\|_\theta = \delta.$$

Karena M_u linear, maka

$$\| f - f_0 \|_{u,\theta} = \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta \left(\frac{u(x)(f(x) - f_0(x))}{b} \right) d\mu \le 1 \right\}$$

$$= \inf \left\{ b > 0 : \int_X \theta \left(\frac{u(x)\delta g(x)}{\|g\|_\theta b} \right) d\mu \le 1 \right\}$$

$$= \frac{\delta}{\|g\|_\theta} \inf \left\{ c > 0 : \int_X \theta \left(\frac{u(x)g(x)}{c} \right) d\mu \le 1 \right\}$$

$$= \frac{\delta}{\|g\|_\theta} \|g\|_{u,\theta} .$$

Ini mengakibatkan bahwa

$\frac{\delta}{\|g\|_\theta} \|g\|_{u,\theta} \le \varepsilon$ sehingga $\|g\|_{u,\theta} \le \frac{\varepsilon}{\delta} \|g\|_\theta$.

Selanjutnya, dengan memilih konstanta $K = \frac{\varepsilon}{\delta}$, maka terbukti bahwa M_u terbatas.■

Teorema 3.2.7 (Komal-Gupta, 2001: 328)

Misalkan M_u linear operator pengali terbatas. M_u memiliki range tertutup jika dan hanya jika ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga $u(x) \ge \delta$ hampir dimana-mana pada X

Bukti :

Jika $u(x) \ge \delta$ hampir dimana-mana pada X, maka

$$\int_X \theta \left(\frac{\delta f(x)}{\| f \|_{u,\theta}} \right) d\mu \le \int_X \theta \left(\frac{u(x) f(x)}{\| f \|_{u,\theta}} \right) \le 1 .$$

Diperoleh

$$\delta \| f \|_\theta \le \| f \|_{u,\theta}$$

untuk semua $f \in L_\theta$. Berdasarkan Teorema 2.10.9, maka M_u memiliki range tertutup.

Karena M_u memiliki range tertutup, berarti terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$\varepsilon \| f \|_\theta \le \| f \|_{u,\theta}$$

untuk semua $f \in L_\theta$. Misalkan himpunan $E = \{x \in X : |u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ memiliki ukuran positif, misalkan pula χ_E fungsi karakteristik, sehingga

$$\int_X \theta\left(\frac{u(x)\chi_E}{(\varepsilon/2)\|f\|_\theta}\right) d\mu \le \int_X \theta\left(\frac{(\varepsilon/2)\chi_E}{(\varepsilon/2)\|f\|_\theta}\right) d\mu = \int_X \theta\left(\frac{\chi_E}{\|f\|_\theta}\right) d\mu \le 1.$$

Diperoleh

$$\|f\|_{u,\theta} \le \frac{\varepsilon}{2}\|f\|_\theta.$$

Ini kontradiksi dengan M_u memiliki range tertutup, maka haruslah $u(x) \ge \varepsilon$. ■

3.3 Kekonvergenan pada Ruang Orlicz

Pada subbab ini, akan dibahas mengenai kekonvergenan pada ruang Orlicz.

Definisi 3.3.1

Misalkan $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *adalah barisan fungsi terukur di* L_θ. *Barisan* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *dikatakan konvergen ke* $f \in L_\theta$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $n \ge N$ *berlaku*

$$\|f_n - f\|_{u,\theta} < \varepsilon.$$

Definisi 3.3.2

Misalkan $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *adalah barisan fungsi terukur di* L_θ. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *dikatakan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $m,n \ge N$ *berlaku* $\|f_n - f_m\|_{u,\theta} < \varepsilon$.

Teorema 3.3.3

Jika $M_u : L_\theta \to L_\theta$ *adalah operator pengali linear maka* M_u *adalah tutup.*

Bukti:

Diambil sebarang barisan fungsi f_n di L_θ yang konvergen ke f sedemikian sehingga $M_u f_n$ konvergen ke g. Akan ditunjukkan bahwa $f \in L_\theta$ dan $g = M_u f$.

Misalkan $a = \delta > 0$, perhatikan bahwa

$$\int_X \theta(\delta f(x))d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \theta(\delta f_n(x))d\mu.$$

Karena $f_n \in L_\theta$, maka $\int_X \theta(\delta f_n)d\mu$ terbatas, katakan terbatas di M, sehingga $\int_X \theta(\delta f)d\mu$ juga terbatas di M. Berdasarkan definisi ruang Orlicz pada Definisi 2.9.15, $f \in L_\theta$. Kemudian karena $\delta < u(x)$ untuk suatu $\delta > 0$,maka

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X \theta(\delta f_n(x))d\mu &< \lim_{n\to\infty} \int_X \theta(u(x) f_n(x))d\mu \\ &= \int_X \theta(u(x) f(x))d\mu \\ &= \int_X \theta(g)d\mu < \infty\end{aligned}$$

Terbukti bahwa M_u tutup. ■

Teorema 3.3.4

Misalkan $f_1, f_2 \in L_\theta$ *dan* $u \in L_\infty$. *Jika* $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$ *hampir dimana-mana pada* X *dan* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga* $u(x) > \delta$ *maka* $\| f_1\|_{u,\theta} \le \| f_2\|_{u,\theta}$.

Bukti :

Perhatikan bahwa karena $u(x) > \delta > 0$, maka $0 \le u(x) f_1(x) \le u(x) f_2(x)$. Sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$\int_X \theta\left(\frac{u(x) f_1(x)}{\| f_2\| + \varepsilon}\right) \le \int_X \theta\left(\frac{u(x) f_2(x)}{\| f_2\| + \varepsilon}\right) \le 1.$$

Jadi $\|f_1\|_{u,\theta} \leq \|f_2\|_{u,\theta} + \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka haruslah $\|f_1\|_{u,\theta} \leq \|f_2\|_{u,\theta}$.■

Teorema 3.3.5: Teorema Kekonvergenan Monoton pada Ruang Orlicz

Misalkan $u \in L_\infty$ *dan* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *adalah barisan fungsi terukur di* L_θ *dimana* $0 \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ *hampir dimana-mana pada* X *, untuk semua* $j \in \mathbb{N}$ *. Jika* $\lim_{n\to\infty} f_j(x) = f(x)$ *dan terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga* $u(x) > \delta$ *maka*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_j\|_{u,\theta} = \|f\|_{u,\theta}.$$

Bukti :

Misalkan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan fungsi di L_θ dimana $0 \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ hampir dimana-mana pada X. Berdasarkan Teorema 3.3.4 diperoleh

$$\|f_j\|_{u,\theta} \leq \|f\|_{u,\theta}$$

untuk semua $j \in \mathbb{N}$. Asumsikan bahwa $f \neq 0$, kemudian diambil sebarang $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $\varepsilon < \|f\|_{u,\theta}$. Berdasarkan Definisi 3.1.3, $\varepsilon > 0$ bukan merupakan infimum dari $\|f\|_{u,\theta}$. Sehingga diperoleh

$$\int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\varepsilon}\right) d\mu > 1.$$

Berdasarkan Teorema 2.6.16, maka

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X \theta\left(\frac{M_u f_n}{\varepsilon}\right) d\mu \geq \int_X \theta\left(\frac{M_u f}{\varepsilon}\right) d\mu > 1.$$

Jika n cukup besar, maka $\|f_n\|_{u,\theta} \geq \varepsilon$. Dari sini diperoleh $\varepsilon \leq \|f_n\|_{u,\theta} < \|f\|_{u,\theta}$.

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{u,\theta} = \|f\|_{u,\theta}$.■

Teorema 3.3.6

Misalkan $u \in L_\infty$ *dan* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *adalah barisan fungsi terukur di* L_θ. *Jika* $f_n(x) > 0$ *hampir dimana-mana pada* $x \in X$ *dan* $u(x) > 0$ *maka*

$$\left\|\liminf_{n\to\infty} f_n\right\|_{u,\theta} \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{u,\theta}.$$

Bukti :

Perhatikan bahwa untuk setiap $k \le j, (k, j \in \mathbb{N})$,

$$\inf_{k\le n} f_n \le f_j,$$

dan karena $u(x) > 0$ maka $\inf_{k\le n} M_u f_n \le M_u f_j$, sehingga $\left\|\inf_{k\le n} f_n\right\|_{u,\theta} \le \|f_j\|_{u,\theta}$ untuk $k \le j$.

Oleh karena itu dapat dipilih batas bawah dari $\|f_j\|_{u,\theta}$ sedemikian sehingga

$$\left\|\inf_{k\le n} f_n\right\|_{u,\theta} \le \inf_{k\le j} \|f_j\|_{u,\theta}.$$

Karena $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan fungsi monoton naik, maka

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\inf_{k\le n} f_n\right\|_{u,\theta} \le \lim_{k\to\infty}\inf_{k\le j} \|f_j\|_{u,\theta} = \sup_{1\le k}\inf_{k\le j} \|f_j\|_{u,\theta} = \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{u,\theta}.$$

Karena barisan fungsi $\{\inf_{k\le n} M_u f_n\}$ non-negatif dan merupakan fungsi naik, maka berdasarkan Teorema 3.3.5

$$\left\|\liminf_{n\to\infty} f_n\right\|_{u,\theta} = \left\|\sup_{1\le k}\inf_{n\to\infty} f_n\right\|_{u,\theta} = \left\|\lim_{k\to\infty}\inf_{k\le n} f_n\right\|_{u,\theta} = \lim_{k\to\infty}\left\|\inf_{k\le n} f_n\right\|_{u,\theta}.$$

Sehingga terbukti bahwa $\left\|\liminf_{n\to\infty} f_n\right\|_{u,\theta} \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{u,\theta}$. ■

Teorema 3.3.7

Ruang norm $(L_\theta, \|\cdot\|_{u,\theta})$ *adalah ruang Banach.*

Bukti :

Ambil sembarang barisan Cauchy (f_n) di L_θ. Karena (f_n) barisan Cauchy maka terdapat $n_k \in \mathbb{N}$ dimana $n_{k+1} \ge n_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$\|f_n - f_m\|_{u,\theta} < 2^{-k}$ untuk $n,m \geq n_k$. Karena $n_{k+1} \geq n_k$ maka $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{u,\theta} < 2^{-k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Akibatnya diperoleh $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{u,\theta} < \infty$.

Misalkan $s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ hampir dimana-mana pada X, maka $(s_m(x))$ barisan monoton naik. Misalkan pula $s_m(x) \to S(x)$ dimana $0 \leq S(x) \leq \infty$.

Perhatikan bahwa :

$$\|s_m\|_{u,\theta} = \left\|\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\right\|_{u,\theta}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}\left\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right\|_{u,\theta}$$

$$\leq 1.$$

Sehingga berdasarkan Teorema 3.1.4 $\int_X \theta(u(x)s_m(x))dx \leq 1$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Karena θ fungsi kontinu, $u(x) > 0$ dan $s_m(x) \to S(x)$ hampir dimana-mana pada X, maka $\theta(u(x)s_m(x)) \to \theta(u(x)S(x))$ hampir dimana-mana pada X. dengan memanfaatkan Teorema 2.6.16, maka diperoleh

$$\int_X \theta(u(x)S(x))dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X \theta(u(x)s_m(x)) \leq 1.$$

Karena u fungsi terukur terbatas, maka $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty$ hampir dimana-mana pada X.

Sekarang perhatikan bahwa, $f_{n_{m+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$. Ketika $m \to \infty$ maka $f_{n_{m+1}}(x) \to f_{n_1}(x) + S(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada X, dengan $f(x) < \infty$. Karena $\{f_{n_{m+1}}(x)\}$ subbarisan dari $f_n(x)$ dimana $\{f_{n_{m+1}}(x)\}$ konvergen, maka $f_n(x)$ konvergen ke $f(x)$ hampir dimana-mana pada X. Akibatnya, untuk

$0 < \varepsilon < \min\{1, \int_X \theta(M)dx\}$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N$ maka $| f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon^2}{\int_X \theta(M)dx}$ dimana $u(x) \leq M$.

Perhatikan bahwa, untuk $n \geq N$ diperoleh

$$\begin{aligned}\int_X \theta\left(\frac{u(x)| f_n(x) - f(x)|}{\varepsilon}\right)dx &\leq \int_X \theta\left(\frac{M\varepsilon}{\int_X \theta(M)dx}\right)dx \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\int_X \theta(M)dx}\right)\int_X \theta(M)dx \\ &\leq \varepsilon \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\| f_n - f\|_{u,\theta} \leq \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa $f_n \to f$. Akan dibuktikan bahwa $f \in L_\theta$.

Karena $f_n \in L_\theta$ untuk setiap $n \in N$ maka terdapat $a_n > 0$ sedemikian sehingga;

$$\int_X \theta(a_n(M_u f_n)(x))dx < \infty.$$

Hal ini mengakibatkan a_n terbatas untuk setiap $n \in N$. Akibatnya $\lim_{n\to\infty} a_n < \infty$, katakanlah $a_n \to a$ untuk suatu $a > 0$. Karena $\theta(a_n(M_u f_n)(x)) \to \theta(a(M_u f)(x))$. Dari Teorema 2.6.16, maka diperoleh

$$\int_X \theta(a(M_u f)(x))dx \leq \liminf \int_X \theta(a_n(M_u f_n)(x))dx < \infty.$$

Jadi, $f \in L_\theta$. Terbukti bahwa L_θ adalah ruang Banach. ■