

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan  $\theta$  adalah fungsi yang terdefinisi pada bilangan real. Fungsi  $\theta$  dinamakan fungsi Young jika  $\theta$  merupakan fungsi genap, kontinu, dan konveks, dengan  $\theta(0) = 0$ , dan  $\theta(\infty) = \infty$ . Dari pendefinisian fungsi Young, kemudian Z.W Rirnbau dan Wladyslaw Orlicz sekitar tahun 1931, mengembangkan suatu ruang baru yang diberi nama ruang Orlicz. Ruang Orlicz didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur  $f$  sedemikian sehingga  $\int \theta(af) d\mu < \infty$  untuk suatu  $a > 0$ , yang kemudian dinotasikan dengan  $L_\theta$  (Rao, 1991:49). Wladyslaw Orlicz mengemukakan bahwa  $L_\theta$  merupakan perluasan dari ruang Lebesgue  $L_p, p \geq 1$ . Selanjutnya, W.A.J. Luxemburg pada tahun 1955 mendefinisikan suatu norm yang terdefinisi dengan baik pada ruang Orlicz yang dikenal sebagai norm Luxemburg, dimana

$$\|f\|_\theta = \inf \left\{ b > 0 : \int_x \theta\left(\frac{f}{b}\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Pengkajian atau penelitian lebih dalam mengenai ruang Orlicz banyak dilakukan, diantaranya oleh Christian Leonard (2007) yang mengatakan bahwa ruang Orlicz merupakan ruang Banach. B.S Komal dan Shally Gupta (2001) mengkaji operator pengali yang dinyatakan dengan  $M_u f$  untuk setiap  $f \in L_\theta$  dimana  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  sedemikian sehingga  $uf \in L_\theta$ , serta sifat-sifat dari operator pengali pada ruang Orlicz yang mencakup konsep keterbatasan, *invertible* dan kekompakkan.

Kemudian Al-Azhary Masta (2013) telah mengembangkan suatu norm pada ruang Orlicz yang dibangun oleh operator pengali yang ekuivalen dengan norm Luxemburg. Norm tersebut didefinisikan dengan

$$\|f\|_{u,\theta} = \inf \left\{ b > 0 : \int_x \theta \left( \frac{(M_u f)(x)}{b} \right) d\mu \leq 1 \right\}$$

dengan  $u$  adalah fungsi terukur terbatas dan  $u(x) > 0$  hampir dimana-mana pada  $X$ .

Berdasarkan uraian di atas, penulis termotivasi untuk mengkaji sifat-sifat operator pengali serta norm pada ruang Orlicz yang dibangun oleh operator pengali. Lebih dari itu, di dalam skripsi ini juga akan dibahas kekonvergenan pada ruang Orlicz melalui norm pada ruang Orlicz yang dibangun oleh operator pengali.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah sebelumnya, yang menjadi masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana karakteristik dari operator pengali sebagai pembangun norm pada ruang Orlicz. Secara khusus permasalahan tersebut dirumuskan sebagai berikut;

1. Sifat-sifat apa saja yang berlaku pada norm yang dibangun oleh operator pengali pada ruang Orlicz?
2. Sifat-sifat apa saja yang berlaku pada operator pengali di ruang Orlicz?
3. Sifat kekonvergenan apa saja yang berlaku pada ruang Orlicz dengan norm yang dibangun oleh operator pengali?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah;

1. Mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada operator pengali pada ruang Orlicz.
2. Mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada norm operator pengali pada ruang Orlicz.
3. Mengetahui sifat-sifat kekonvergenan yang berlaku pada ruang Orlicz.

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

Melalui penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi yang berarti baik bagi pengembangan matematika, bagi peneliti, maupun bagi mahasiswa lainnya.

1. Memperluas dan memperdalam penguasaan materi tentang ruang Orlicz, khususnya norm ruang Orlicz yang telah dibangun oleh operator pengali.
2. Memberikan inspirasi bagi peneliti lain yang ingin meneliti lebih dalam tentang ruang Orlicz, dan karakteristik operator pengali.

#### **1.5 Sistematika Penulisan**

Skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Sebagaimana yang telah diuraikan di atas, BAB 1 adalah pendahuluan yang berisi Latar Belakang Masalah, Rumusan Masalah, Tujuan Penelitian, dan Sistematika Penulisan.

Berikutnya, BAB 2 adalah landasan teori sebagai konsep dasar untuk pembahasan bab-bab selanjutnya, seperti sistem bilangan real dan keterbatasan, barisan di  $\square$  dan kekonvergenannya, kekontinuan fungsi, fungsi monoton dan

fungsi genap, fungsi konveks, himpunan dan fungsi terukur, integral Lebesgue, ruang Banach, ruang  $L^p$ , ruang Orlicz serta operator linear.

BAB 3 merupakan isi dari skripsi ini. Diawali dengan pendefinisian operator pengali, kemudian pembahasan mengenai norm yang dibangun oleh operator pengali, ruang Banach  $L_\theta$ , ketidaksamaan Holder, dan kekonvergenan monoton pada ruang  $L_\theta$ .

BAB 4 berisi kesimpulan dari hasil kajian yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

