BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Teori integral merupakan cabang matematika dari kelompok kajian analisis yang terus berkembang. Pada perkembangannya, banyak ilmuwan yang mengkaji tentang integral di antaranya [1], [2], dan [3].

Pada tahun 1868, Bernard Riemann mendefinisikan suatu integral pada fungsi yang terbatas secara konstruktif, yaitu dengan mempartisi interval sedemikian sehingga diperoleh daerah di bawah kurva berupa poligon-poligon. Definisi integral oleh Riemann selanjutnya dikenal sebagai integral Riemann. Integral Riemann merupakan awal perkembangan teori integral, tetapi tidak dapat menyelesaikan masalah integral dari fungsi *dirichlet*, sehingga diperkenalkan pendefinisian integral baru oleh Henri Lebesgue untuk menyelesaikan masalah tersebut. Pendefinisian integral oleh Henri Lebesgue selanjutnya dikenal sebagai integral Lebesgue.

Pada tahun 1904, Lebesgue mendefinisikan integral dengan menggunakan fungsi sederhana. Misalkan s merupakan fungsi sederhana dengan representasi kanonik

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

dengan $A_k = \{x \in A : s(x) = a_k\}$, $a_i \cap a_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan A_k terukur. Jika A terukur maka integral Lebesgue dari fungsi sederhana s didefinisikan oleh $\int s\, dm = \sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k)$.

Tahun 1978, Jan Mikusinski seorang ahli matematika asal Polandia merilis buku berjudul *The Integral Bochner*. Pada buku tersebut terdapat bahasan mengenai integral Lebesgue dan Integral Bochner yang pendefinisiannya melalui limit dari deret fungsi Brick dengan syarat konvergen mutlak. Pendefinisian integral Lebesgue ini diklaim ekuivalen dengan pendefinisian integral Lebesgue yang direpresentasikan dalam bentuk $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$.

Brick di $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh interval setengah tutup atau setengah buka $a \leq x < b$ dimana a, b merupakan bilangan real berhingga. Misalkan J suatu Brick di $\mathbb{R}^q$ yang didefinisikan oleh himpunan titik $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_3)$ dengan ξ_i

merupakan fungsi bernilai real sehingga $\xi_i \in J_i$, dengan J_i merupakan Brick berdimensi satu. Fungsi Brick merupakan fungsi karakteristik dari Brick. Misalkan f merupakan fungsi Brick, maka

$$f(x) = \begin{cases} 1, & untuk\ x \in J \\ 0, & lainnya \end{cases}.$$

Suatu fungsi f pada $\mathbb{R}^q$ bernilai real terintegralkan Lebesgue jika diekspansikan oleh $f \simeq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{R}$, f_i merupakan fungsi Brick (untuk $i = 1,2, \dots$), dan memenuhi syarat $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \int f_i < \infty$ dan $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i\,(x)$ dititik x sedemikian sehingga deret tersebut konvergen mutlak. Nilai dari fungsi terintegralkan Lebesgue f dinotasikan $\int f$ yaitu,

$$\int f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int f_i$$

Suatu fungsi $f: \mathbb{R}^q \to E, E$ merupakan ruang Banach dikatakan terintegralkan Bochner, jika ekspansi $f \simeq \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots$, dengan λ_i merupakan anggota E, f_i merupakan fungsi Brick (untuk $i = 1,2, \dots$) dan memenuhi syarat $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \int f_i < \infty$ dan $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i\,(x)$ dititik x sedemikian sehingga deret tersebut konvergen mutlak. Nilai dari fungsi yang terintegralkan Bochner f dinotasikan $\int f$ yaitu,

$$\int f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int f_i$$

Berdasarkan pendefinisian terkait integral Lebesgue dan integral Bochner menunjukan bahwa fungsi yang terintegralkan Lebesgue bernilai real, sedangkan fungsi yang terintegralkan Bochner bernilai vektor di ruang lengkap Banach.

Pendefinisian pada integral Lebesgue melatarbelakangi para peneliti untuk mengkaji integral yang didefinisikan oleh ilmuan lain dan mengaitkan integral tersebut dengan integral Lebesgue, sebagai contoh penelitian ekuivalensi integral Lebesgue dengan Integral Denjoy-Perron[4] dan penelitian ekuivalensi antara integral Mcshane dan Integral Lebesgue pada ruang Euclid $\mathbb{R}$ [5]. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam tentang kaitan integral Lebesgue dan Integral Bochner, apakah terdapat analogi antara sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue dan integral Bochner.

1.2 RUMUSAN DAN PEMBATASAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, yang menjadi masalah dalam kajian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue?
2. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada integral Bochner?
3. Apakah terdapat analogi antara sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue dan Integral Bochner?

Fungsi yang menjadi kajian dalam penelitian ini hanya fungsi Brick.

1.3 TUJUAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, tujuan dari kajian ini yaitu untuk mengetahui analogi dari sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue dan Integral Bochner.

1.4 MANFAAT PENULISAN

Penulisan ini diharapkan bermanfaat:

1. bagi penulis, dapat menambah pengetahuan teori integral.
2. bagi peneliti lanjutan, penelitian ini dapat menjadi referensi untuk kajian teori integral Lebesgue dan integral Bochner.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Skripsi ini terbagi dalam lima bab utama, yaitu Bab I Pendahuluan, Bab II Kajian Pustaka, Bab III Metodologi Penelitian, Bab IV Pembahasan, dan Bab V Kesimpulan dan Saran.

Pada Bab I Pendahuluan berisi latar belakang masalah yang merupakan dasar dan asal mula kajian dari Analogi Integral Lebesgue dan Integral Bochner, tujuan masalah, rumusan masalah, pembatasan masalah, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

Pada Bab II Kajian Pustaka berisi teori-teori pendukung yang digunakan pada pembahasan di Bab IV. Diantaranya, fungsi Brick, barisan dan deret fungsi, ruang vektor, ruang bernorma, ruang Banach.

Pada Bab III Metodologi Penelitian berisi langkah-langkah kajian, berawal dari menemukan topik, mempelajari beberapa konsep, mendapat berbagai temuan, dan penyelesaian kajian.

Pada Bab IV Pembahasan berisi hasil temuan berdasarkan rumusan masalah dan batasan masalah. Pada Bab ini membahas sifat-sifat pada integral Lebesgue, sifat-sifat pada Integral Bochner, dan Analogi Integral Lebesgue dan Integral Bochner.

Pada Bab V Kesimpulan dan Saran, berisi simpulan dari hasil pembahasan serta saran mengenai penelitian lanjutan yang disarankan penulis.