BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pemaparan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang merupakan konveks memiliki beberapa sifat sifat tertentu sebagai berikut :

i. Epigraf dari kurva fungsinya akan membentuk himpunan konveks

ii. Gradien garis sebarang tiga titik $x, y, z \in [a, b]$ dengan $x < y < z$ berlaku

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

iii. Fungsi $g(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ untuk setiap $t \in [a, b] \backslash \{x\}$ merupakan fungsi monoton naik.

iv. f kontinu dan terbatas pada (a, b)

v. Jika f terdifferensialkan, maka $f(x) \geq f(z) + f'(z).(x-z)$ untuk setiap $x, z \in [a, b]$

vi. Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non-negatif sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, maka

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Jika syarat f konveks di atas dihilangkan dan f terdifferensialkan dua kali dan $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f merupakan fungsi konveks.

2. Jika fungsi f konveks pada $[a, b]$, maka berlaku pertidaksamaan Hermite-Hadamard sebagai berikut

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Hubungan kebalikannya tidak secara langsung berlaku, namun diperlukan syarat tambahan seperti fungsi f kontinu di $[a, b]$, dan dengan menyatakan pertidaksamaan Hermite-Hadamard menjadi pertidaksamaan yang melibatkan fungsi Steklov $S_h(f, x)$ dengan hubungan sebagai berikut

$$f(x) \leq S_h(f,x) \text{ untuk } a \leq x - h < x + h \leq b$$

atau dengan fungsi Iterasi Steklov $S_h^n(f,x)$ dengan hubungan sebagai berikut untuk setiap $h > 0$ dan $x \in (a,b)_n(h)$ berlaku

$$f(x) \leq S_h^n(f,x) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

3. Pertidaksamaan Hermite-Hamard dapat diekstensi bagian per bagian sebagai berikut :

untuk $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi konveks pada $[a,b]$, maka untuk setiap $t \in [a,b]$ dan $\lambda \in [f_-'(t), f_+'(t)]$ berlaku

$$f(t) + \lambda\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(ekstensi pertidaksamaan bagian kiri dari pertidaksamaan Hermite-Hadamard).

Sedangkan untuk $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi konveks pada $[a,b]$ dan f terdifferensialkan pada (a,b), maka untuk setiap $t \in [a,b]$ berlaku

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2}.\frac{bf(b) - af(a) - t\big(f(b) - f(a)\big)}{b-a}$$

(ekstensi pertidaksamaan bagian kanan dari pertidaksamaan Hermite-Hadamard).

5.2 Saran

Kajian ini hanya membahas sebagian kecil tentang fungsi konveks dan pertidaksamaan Hermite-Hadamard. Saran yang diberikan peneliti untuk perbaikan dan pengembangan penelitian lebih lanjut sebaiknya melibatkan fungsi pertidaksamaan Hermite-Hadamard dengan fungsi lain selain fungsi konveks, seperti fungsi konveks-m, konveks-s, dll.