BAB III

PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN YANG DIPERUMUM DENGAN METODE *BRANCH AND PRICE*

Tujuan dari penelitian ini adalah menyelesaikan masalah penugasan yang diperumum. Metodologi yang digunakan diawali dengan mengidentifikasi masalah dan pembangunan model optimisasi dari masalah penugasan yang diperumum. Sebelum model dibangun, didefinisikan himpunan, parameter, dan variabel keputusan model. Selanjutnya, model optimisasi diselesaikan dengan menggunakan metode *Branch and Price (B&P)*. Tahapan penyelesaian dengan metode *B&P* dijelaskan pada subbab 3.3.

3.1 Masalah Penugasan yang Diperumum

Masalah penugasan yang diperumum adalah masalah pemasangan m buah tugas kepada n agen sedemikian sehingga setiap agen dapat dipasangkan pada tugas-tugas yang ada. Lamanya waktu pengerjaan setiap tugas oleh seorang agen diketahui. Bobot tugas i jika dikerjakan oleh agen j juga diketahui. Setiap agen mempunyai batasan kapasitas lamanya waktu kerja. Penelitian ini mengasumsikan bahwa setiap agen dapat mengerjakan semua tugas yang ada. Berbeda dengan masalah penugasan biasa yang mengharuskan setiap agen dipasangkan pada tepat satu tugas, masalah penugasan yang diperumum memasangkan setiap agen pada paling sedikit satu tugas. Dengan demikian pada masalah penugasan yang diperumum, satu agen boleh dipasangkan pada lebih dari satu tugas.

Tujuan dari penyelesaian masalah penugasan yang diperumum adalah untuk meminimumkan total waktu pengerjaan seluruh tugas. Pada penelitian ini, masalah penugasan yang diperumum akan diselesaikan dengan menggunakan metode *B&P*. Metode *B&P* adalah gabungan antara metode *Column Generation* dan Metode *Branch-and-Bound* (*B&B*). Metode ini pertama kali dikenalkan oleh Desrochers, dkk. pada tahun 1992 untuk menyelesaikan masalah *vehicle routing problem with time windows*, dan diperkenalkan secara umum oleh Barnhart, dkk. pada tahun 1996. Metode *B&P* digunakan untuk menyempurnakan teknik *Column Generation* agar metode tersebut memberikan solusi integer. Pada Sub bab selanjutnya akan dibahas tentang cara kerja dari metode *B&P* dalam menyelesaiakan masalah penugasan yang diperumum.

3.2 Model Optimisasi

Sub bab ini membahas pembangunan model optimisasi dari masalah penugasan yang diperumum. Untuk kepentingan pembangunan model optimisasi tersebut, didefinisikan himpunan dan parameter model sebagai berikut:

i : himpunan tugas

j : himpunan agen

c_{ij} : waktu yang diperlukan agen j mengerjakan tugas i

w_{ij} : bobot tugas i pada agen j

d_j : kapasitas agen j

Variabel keputusan model menentukan agen mana yang menyelesaikan setiap tugas yang ada. Varibel ini didefinisikan sebagai berikut:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika tugas } i \text{ dikerjakan agen } j \\ 0, & \text{jika tugas } i \text{ tidak dikerjakan agen } j \end{cases}$$

Setelah pendefinisian parameter dan variabel, selanjutnya adalah merumuskan model. Model optimisasi untuk permasalahan ini terdiri dari fungsi tujuan dan fungsi kendala. Fungsi tujuan pada penelitian ini bertujuan untuk meminimumkan total waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh tugas yang ada. Fungsi tujuan ini dituliskan sebagai:

Meminimumkan:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Adapun kendala dari model adalah sebagai berikut:

1. Setiap tugas dikerjakan tepat oleh satu agen. Kendala ini dapat diekspresikan sebagai:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,3,\dots,m.$$
2. Total waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh tugas yang diberikan pada agen j tidak boleh melebihi kapasitas waktu keja dari agen tersebut. Kendala ini dapat dinyatakan sebagai persamaan:

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij}x_{ij} \leq d_j \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Batasan variabel dari model menyatakan bahwa variabel keputusan model bernilai 0 atau 1. Batasan ini dapat dituliskan sebagai:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\dots,m, \qquad j = 1,\dots n.$$

Selengkapnya, model optimisasi dari masalah penugasan yang diperumum adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3.1}$$

Terhadap:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,3,\dots,m \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij}x_{ij} \leq d_j \quad j = 1,2,\dots,n \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\dots,m, \qquad j = 1,\dots n.$$

Model optimisasi di atas termasuk dalam katageri model *binary integer programming*, yaitu model program linear yang mengharuskan variabelnya bernilai biner, yaitu 0 atau 1. Untuk memperjelas pembentukkan model optimisasi dari masalah penugasan yang diperumum, diberikan contoh sebagai berikut. Misal terdapat tiga penugasan dan dua agen, dengan daftar waktu yang diperlukan agen *j* mengerjakan tugas *i* disajikan dalam Tabel 3.1. Bobot tugas *i* yang dikerjakan oleh agen *j* disajikan dalam Tabel 3.2. Dalam pengerjaan tugas-tugas tersebut, setiap agen memiliki kapasitas. Kapasitas untuk agen 1 adalah 11 dan kapasitas agen 2 adalah 15. Kapasitas agen disajikan dalam Tabel 3.3.

Tabel 3. 1
Waktu yang diperlukan agen *j* mengerjakan tugas *i*

Tugas	Agen	
	1	**2**
1	10	6
2	7	8
3	5	11

Tabel 3. 2
Bobot tugas *i* jika dikerjakan oleh agen *j*

Tugas	Agen	
	1	**2**
1	9	5
2	6	7
3	3	9

Tabel 3. 3
Kapasitas agen

Agen	
1	**2**
11	15

Berdasarkan tabel tersebut, maka model optimisasi untuk contoh tersebut adalah sebagai berikut:

Min:

$$z = 10x_{11} + 6x_{12} + 7x_{21} + 8x_{22} + 5x_{31} + 11x_{32}$$

Terhadap:

$$x_{11} + x_{12} = 1 \quad (3.4)$$

$$x_{21} + x_{22} = 1 \quad (3.5)$$

$$x_{31} + x_{32} = 1 \quad (3.6)$$

$$9x_{11} + 6x_{21} + 3x_{31} \leq 11 \quad (3.7)$$

$$5x_{12} + 7x_{22} + 9x_{32} \leq 15 \quad (3.8)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,2,3, \qquad j = 1,2$$

Pada penelitian ini, model tersebut akan diselesaikan dengan menggunkan metode *B&P*. Penjelasan lengkap tentang metode tersebut akan dibahas pada sub bab selanjutnya.

3.3 Penyelesaian Masalah Penugasan yang diperumum dengan Metode Branch and Price

Metode *B&P* adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah *integer programming* yang berskala besar. Metode ini merupakan gabungan dari teknik *Column Generation* dan *Branch and Bound*, di mana *Branch and Bound* digunakan sebagai penyempurna dari teknik *Column Generation* untuk mendapatkan solusi bilangan bulat. Secara umum, terdapat empat langkah kerja dari metode *B&P*, yaitu membangun *master problem*, menyelesaikan *restricted master problem* (*RMP*), menyelesaikan percabangan, dan menyelesaikan *subproblem*.

Langkah awal dalam metode *B&P* adalah membangun *master problem*. *Master problem* merupakan model yang dibangun dari sebagian solusi layak pada model utama. Pada model optimisasi penugasan yang diperumum, solusi layak untuk permasalahan penugasan yang diperumum adalah semua x yang memenuhi Persamaan (3.3). Misal S merupakan himpunan yang didefinisikan sebagai

$$S = \left\{x: \sum_{i=1}^{m} w_{ij}x_{ij} \leq d_j, j = 1,2, \dots, n\right\}$$

Sehingga S merupakan himpunan berhingga dari solusi layak masalah penugasan yang diperumum pada sub bab 3.2, sedemikian sehingga S merupakan solusi dari *knapsack problem* (KP) bagi setiap agen *j*. Misal $S = \left\{z_1^1, \cdots, z_1^{K_1}, \cdots, z_n^1, \cdots, z_n^{K_n}\right\}$ dengan $z_j^k = \left(z_{1j}^k, z_{2j}^k, \cdots, z_{mj}^k\right)^T$ merupakan semua solusi layak yang memenuhi untuk KP_j, z_{ij}^k merupakan kemungkinan solusi agen *j* yang mengerjakan tugas *i* dan K_j merupakan banyaknya solusi layak yang mungkin untuk permasalahan KP_j. Maka untuk setiap $x \in \{0,1\}$ bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{K_j} z_{ij}^k \lambda_j^k \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{K_j} \lambda_j^k = 1, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n, \qquad x_{ij} \in \{0,1\}$$

dengan λ_j^k merupakan variabel keputusan. Selanjutnya, substitusi Persamaan (3.9) ke Persamaan (3.1). Sehingga diperoleh fungsi tujuan dari *master problem* untuk masalah penugasan yang diperumum sebagai berikut.

$$\textbf{Meminimumkan}: z = \sum_{j-1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij} z_{ij}^k \right) \lambda_j^k$$

Adapun kendala untuk *master problem* adalah sebagai berikut:

1. Setiap tugas dikerjakan oleh tepat satu agen. Kendala ini dapat dituliskan sebagai:
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} z_{ij}^k \lambda_j^k = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$
2. Setiap agen mengerjakan tepat satu kemungkinan solusi dari K_j solusi yang mungkin. Kendala ini dinotasikan sebagai berikut:
$$\sum_{k=1}^{K_j} \lambda_j^k = 1, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

Batasan variabel keputusan dari model menyatakan bahwa variabel keputusan model bernilai 0 atau 1. Batasan ini dapat dituliskan sebagai:

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

Secara keseluruhan *master problem* untuk masalah penugasan yang diperumum dapat dituliskan sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = \sum_{j-1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij} z_{ij}^k \right) \lambda_j^k \tag{3.10}$$

Terhadap:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} z_{ij}^k \lambda_j^k = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=1}^{K_j} \lambda_j^k = 1, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.12}$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

Untuk memperjelas pembentukan master problem di atas, maka perhatikan pembentukan master problem dari masalah penugasan pada contoh sebelumnya.

Untuk kepentingan tersebut, terlebih dahulu cari sebagian solusi layak untuk setiap agennya. Dari Persamaan (3.7), diperoleh solusi layak untuk agen 1 sebagai berikut:

$$z_1^k = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$$

Banyaknya solusi yang mungkin untuk agen 1 adalah 4, sehingga $K_1 = 4$. Dari Persamaan (3.8), diperoleh solusi layak untuk agen 2 adalah:

$$z_2^k = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Banyaknya solusi yang mungkin untuk agen 2 adalah 5, sehingga $K_2 = 5$. Pada prakteknya, banyaknya solusi layak untuk setiap agen bisa berjumlah banyak sekali. Untuk kasus ini, pada pembentukan *master problem* hanya diperlukan sebagian kecil dari solusi layak tersebut.

Setelah diperoleh semua solusi yang mungkin untuk setiap agen, selanjutnya dibentuk fungsi tujuan dari *master problem* sebagai berikut.

Meminimumkan:

$$z = \sum_{j-1}^{2}\sum_{k=1}^{K_j}\left(\sum_{i=1}^{3} c_{ij} z_{ij}^k\right)\lambda_j^k$$

$$= 10\lambda_1^1 + 7\lambda_1^2 + 12\lambda_1^3 + 5\lambda_1^4 + 6\lambda_2^1 + 14\lambda_2^2 + 17\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 + 11\lambda_2^5$$

Dengan kendala sebagai berikut:

1. Setiap tugas dikerjakan oleh tepat satu agen

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_j} z_{ij}^k \lambda_j^k = 1, \qquad i = 1, 2, 3$$

atau

$$\lambda_1^1 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + 0 + 0 = 1$$

$$0 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + 0 + 0 + \lambda_2^2 + 0 + \lambda_2^4 + 0 = 1$$

$$0 + 0 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + \lambda_2^3 + 0 + \lambda_2^5 = 1$$

2. Setiap agen mengerjakan tepat satu kemungkinan solusi dari K_j solusi yang mungkin

$$\sum_{k=1}^{K_j} \lambda_j^k = 1, \qquad j = 1, 2$$

atau

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 = 1$$

Batasan variabel keputusan dari model menyatakan bahwa variabel keputusan model bernilai 0 atau 1. Batasan ini dapat dituliskan sebagai:

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K_j, \qquad j = 1, 2$$

Selengkapnya, *master prbolem* untuk masalah penugasan yang diperumum adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = 10\lambda_1^1 + 7\lambda_1^2 + 12\lambda_1^3 + 5\lambda_1^4 + 6\lambda_2^1 + 14\lambda_2^2 + 17\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 + 11\lambda_2^5$$

Terhadap:

$$\lambda_1^1 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + 0 + 0 = 1$$

$$0 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + 0 + 0 + \lambda_2^2 + 0 + \lambda_2^4 + 0 = 1$$

$$0 + 0 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + \lambda_2^3 + 0 + \lambda_2^5 = 1$$

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 + \lambda_2^5 = 1$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K_j, \qquad j = 1, 2$$

Setelah *master problem* dibangun, langkah selanjutnya menyelesaikan *Restricted Master Problem* (*RMP*). *RMP* dibentuk dari sebagian kolom (variabel) pada *master problem*. Kemudian *RMP* direlaksasi, yaitu mengubah tanda '$=$' pada fungsi kendala menjadi '$\geq$' atau '$\leq$'. Setelah direlaksasi, *RMP* menjadi permasalahan *linear programming* yang dapat diselesaikan dengan metode simpleks yang direvisi untuk memperoleh *shadow price*.

Pada contoh sebelumnya, diperoleh *master problem* untuk masalah penugasan yang diperumum. Selanjutnya untuk memberikan gambaran mengenai pembentukkan *RMP*, maka dibentuklah *RMP* dari sebagian variabel pada *master problem* sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$z = 12\lambda_1^3 + 5\lambda_1^4 + 6\lambda_2^1 + 14\lambda_2^2 + 11\lambda_2^5$$

Terhadap:

$$0 + 0 + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + 0 = 1$$

$$\lambda_1^3 + 0 + 0 + \lambda_2^2 + 0 = 1$$

$$\lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + \lambda_2^5 = 1$$

$$\lambda_1^3 + \lambda_1^4 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$0+0+\lambda_2^1+\lambda_2^2+\lambda_2^5=1$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k=1,2,\cdots,K_j, \qquad j=1,2$$

Setelah dibentuk *RMP*, selanjuntnya relaksasi dan diselesaikan dengan metode simpleks yang direvisi. Berikut *RMP* setelah direlaksasi:

Meminimumkan:

$$z=12\lambda_1^3+5\lambda_1^4+6\lambda_2^1+14\lambda_2^2+11\lambda_2^5$$

Terhadap:

$$0+0+\lambda_2^1+\lambda_2^2+0\geq 1$$

$$\lambda_1^3+0+0+\lambda_2^2+0\geq 1$$

$$\lambda_1^3+0+0+0+\lambda_2^5\geq 1$$

$$\lambda_1^3+\lambda_1^4+0+0+0\geq 1$$

$$0+0+\lambda_2^1+\lambda_2^2+\lambda_2^5\geq 1$$

$$\lambda_j^k \in \{0,1\}, \qquad k=1,2,\cdots,K_j, \qquad j=1,2$$

Setelah direlaksasi, *RMP* diselesaikan menggunakan metode simpleks yang direvisi, dan diperoleh solusi optimal untuk *RMP* tersebut adalah 18, dengan $\lambda_1^3 = 1$, dan $\lambda_2^1 = 1$, dan *shadow price* $u_i = (0,-8,0)$ dan $v_i = (-4,-6)$.

Setelah diperoleh nilai optimal dan *shadow price*, cek apakah variabel keputusannya bernilai *integer* atau non integer. Jika bernilai *non integer*, maka aplikasikan algoritma *B&B*. Solusi yang didapatkan pada *RMP* dijadikan sebagai batas atas untuk melakukan *B&B*. Sebaliknya, apabila variabel keputusannya sudah bernilai *integer*, maka dilanjutkan ke tahap selanjutnya, yaitu menyelesaikan *subproblem*.

Setelah diperoleh solusi yang layak, selanjutnya menyelesaikan *subprobelm* untuk menguji optimalitas. *Subproblem* untuk setiap agen *j* dinyatakan sebagai KP berikut.

$$(KP_j) \ \ \textbf{meminimumkan}: z=\sum_i (c_{ij}-u_i)x_{ij}-v_j$$

Dengan kendala

$$\sum_i w_{ij}x_{ij} \leq d_j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

di mana u_i dan v_j merupakan *shadow price* yang diperoleh setelah menyelesaikan *RMP*. u_i merupakan *shadow price* untuk Persamaan (3.11), dan v_i merupakan *shadow price* untuk Persamaan (3.12). Untuk kasus minimasi, apabila hasil perhitungan *subproblem* untuk setiap agen bernilai ≥ 0, maka solusi pada *RMP* sudah optimal. Solusi optimal yang diperoleh dari *RMP*, merupakan solusi untuk keseluruhan *master problem.* Apabila masih ada solusi optimal subproblem yang bernilai < 0, maka yang bernilai negatif terbesar menjadi kolom masuk di *RMP* selanjutnya. Ulangi dari tahap menyelesaikan *RMP*, sampai solusi *subproblem* untuk setiap agennya ≥ 0.

Pada contoh sebelumnya diperoleh solusi optimal untuk *RMP* adalah 18, dengan $\lambda_1^3 = 1$, dan $\lambda_2^1 = 1$, dan *shadow price* $u_i = (0, -8, 0)$ dan $v_i = (-4, -6)$. Tahap selanjutnya akan diuji optimalitas apakah solusi optimal pada *RMP* tersebut juga solusi optimal pada *master problem* atau belum dengan cara menyelesaikan *subproblem*. Adapun subproblem untuk masing-masing agen adalah sebagai berikut:

***Subproblem* agen 1**:

$$\begin{aligned}(KP_1) \quad min\, z &= (c_{11} - u_1)x_{11} + (c_{21} - u_2)x_{21} + (c_{31} - u_3)x_{31} - v_1 \\ &= (10 - 0)x_{11} + (7 + 8)x_{21} + (5 - 0)x_{31} + 4 \\ &= 10x_{11} + 15x_{21} + 5x_{31} + 4\end{aligned}$$

Dengan kendala

$$9x_{11} + 6x_{21} + 3x_{31} \leq 11$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Solusi optimal untuk *subproblem* agen 1 diperoleh $z = 4$, dengan variabel keputusannya $x_{11} = 0, x_{21} = 0$, dan $x_{31} = 0$

***Subproblem* agen 2**:

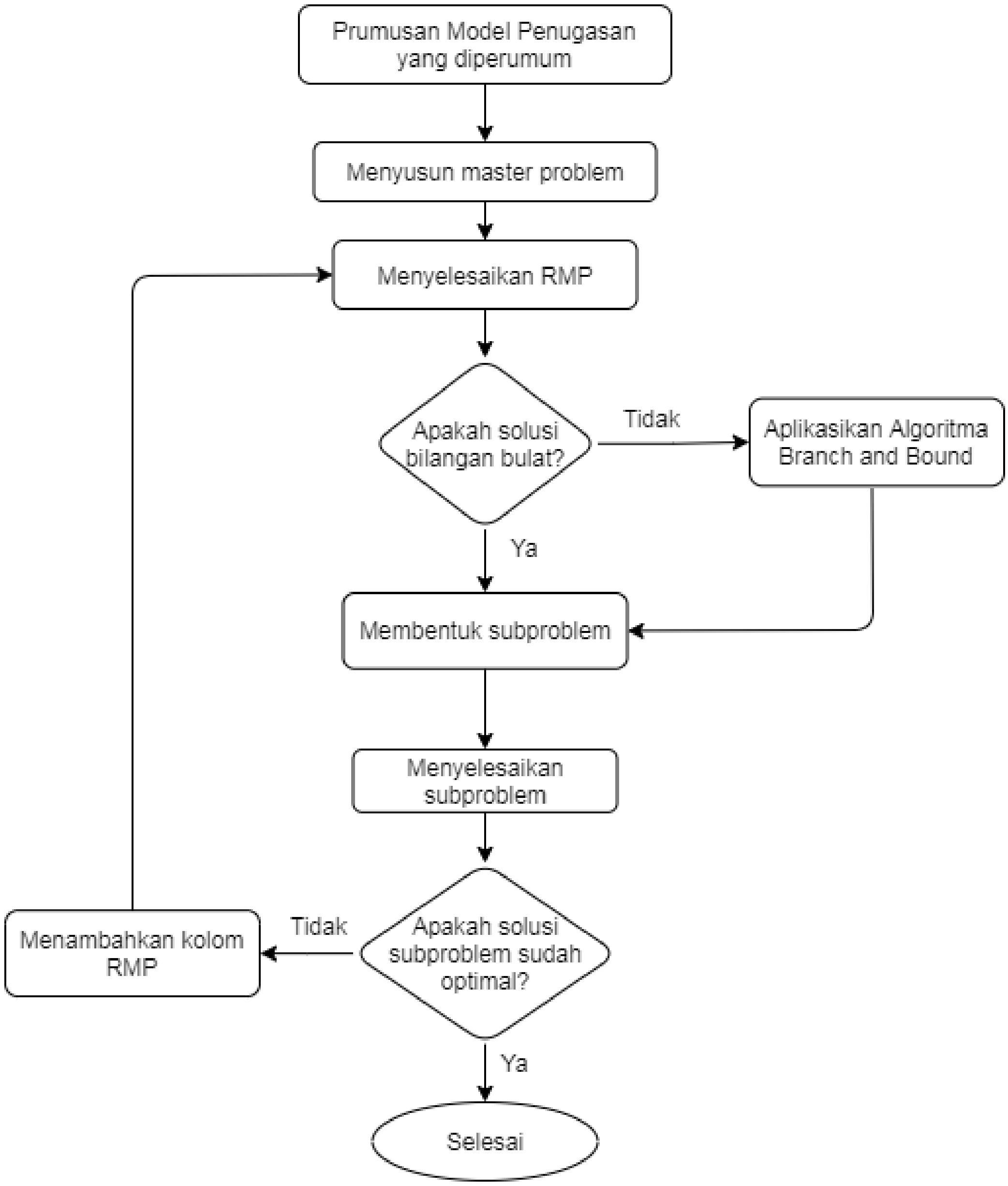
$$\begin{aligned}(KP_2) \quad min\, z &= (c_{12} - u_1)x_{12} + (c_{22} - u_2)x_{22} + (c_{32} - u_3)x_{32} - v_2 \\ &= (6 - 0)x_{12} + (8 + 8)x_{22} + (11 - 0)x_{32} + 6 \\ &= 6x_{12} + 16x_{22} + 11x_{32} + 6\end{aligned}$$

Dengan kendala

$$5x_{12} + 7x_{22} + 9x_{32} \leq 15$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Solusi optimal untuk *subproblem* agen 2 diperoleh $z = 6$, dengan variabel keputusannya $x_{12} = 0, x_{22} = 0$, dan $x_{32} = 0$. Karena *subproblem* untuk kedua agen bernilai ≥ 0, maka solusi optimal pada *RMP* juga solusi untuk *master problem*. Artinya solusi optimal untuk contoh tersebut adalah 18, dengan ketentuan penugasan $z_1^3 = (0, 1, 1)$ artinya agen 1 mengerjakan tugas 2 dan tugas 3, dan $z_2^1 = (1, 0, 0)$ artinya agen 2 hanya mengerjakan tugas 1.

Selengkapnya langkah kerja metode *B&P* dapat dilihat dari *flowchart* pada Gambar 3.1.



Gambar 3. 1 Flowchart teknik penyelesaian