

BAB V

KESIMPULAN, IMPLIKASI, DAN REKOMENDASI

A. Kesimpulan

Ada beberapa kesimpulan yang dapat kita ambil dari penelitian ini yang berkaitan dengan faktor pembelajaran, kelompok jurusan, kemampuan awal, kemampuan pembuktian, tahap pembuktian, tingkat pemahaman, sikap terhadap aljabar abstrak, keaktifan mahasiswa dalam pembelajaran, jenis kesulitan, dan jenis kesalahan pada pembuktian dalam aljabar abstrak, yaitu:

1. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian secara signifikan lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
2. Mahasiswa Nondik yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian secara signifikan lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa Nondik yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
3. Mahasiswa Dik yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian lebih baik (tetapi tidak signifikan) jika dibandingkan dengan mahasiswa Dik yang memperoleh pembelajaran secara biasa.

4. Mahasiswa kemampuan awal tinggi yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian secara signifikan lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
5. Mahasiswa kemampuan awal sedang yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian secara signifikan lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
6. Mahasiswa kemampuan awal rendah yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian secara signifikan lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
7. Tidak ada pengaruh bersama (interaksi) yang signifikan antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal terhadap kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak.
8. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap secara signifikan lebih positif terhadap aljabar abstrak jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
9. Mahasiswa kemampuan awal tinggi yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap lebih positif (tetapi tidak

- signifikan) terhadap aljabar abstrak jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
10. Mahasiswa kemampuan awal sedang yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap secara signifikan lebih positif terhadap aljabar abstrak jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
 11. Mahasiswa kemampuan awal rendah yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap secara signifikan lebih positif terhadap aljabar abstrak jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
 12. Ada pengaruh bersama (interaksi) yang signifikan antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal terhadap sikap dalam aljabar abstrak.
 13. Ada korelasi positif yang signifikan antara kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak dengan sikap terhadap aljabar abstrak.
 14. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai tahap kemampuan pembuktian lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
 15. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai tingkat pemahaman lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.



16. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS aktifitasnya lebih baik secara kuantitas dan kualitas jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
17. Kesulitan-kesulitan yang paling banyak dialami mahasiswa pada pembuktian dalam aljabar abstrak adalah: (1) kesulitan dalam 'menyatakan kembali persoalan dalam aljabar abstrak menjadi persoalan yang lebih operasional sehingga mengarah kepada pembuktian (reformulasi/representasi)' dan (2) kesulitan dalam 'memilih notasi yang tepat' yang dapat membantu proses pembuktian.
18. Jenis-jenis kesalahan yang dialami mahasiswa pada pembuktian dalam aljabar abstrak kebanyakan disebabkan oleh miskonsepsi yang bersumber pada anggapan mereka bahwa sifat-sifat bilangan real berlaku pada sembarang grup.

B. Implikasi

Fokus utama penelitian ini adalah untuk melihat efektivitas pembelajaran berdasarkan teori APOS dalam meningkatkan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak. Pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS yang dimaksudkan untuk mengembangkan kemampuan pembuktian tercermin dari sajian bahan ajar, intervensi dosen, interaksi antar komunitas kelas yang multi arah, dan penggunaan siklus pembelajaran ACE (aktivitas laboratorium, diskusi kelas, dan latihan).

Penggunaan siklus pembelajaran ACE dimaksudkan agar mahasiswa terbantu dalam melakukan konstruksi-konstruksi mental yang diperlukan untuk memahami ide-ide matematika. Melalui aktivitas laboratorium, mahasiswa diharapkan dapat memandang konsep-konsep abstrak dalam tataran yang lebih konkrit dan dapat memperoleh beberapa fakta tentang konsep tersebut. Selanjutnya, dengan berbekal pengalaman dari aktivitas laboratorium mahasiswa diajak untuk mendiskusikan konsep-konsep tersebut untuk memperoleh definisi dan konjektur. Melalui intervensi tidak langsung, mahasiswa diajak untuk membuktikan konjektur yang telah mereka buat, sehingga diperoleh lema atau teorema yang berkaitan dengan konsep tersebut. Untuk memperkokoh konsep-konsep, lema, dan teorema yang telah dimiliki mahasiswa maka mahasiswa diajak untuk menerapkan konsep-konsep, lema, dan teorema tersebut pada beberapa permasalahan dalam aljabar abstrak.

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa pembelajaran berdasarkan teori APOS secara efektif dapat meningkatkan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak. Kemampuan mahasiswa dalam pembuktian sangat bergantung kepada kualitas skema yang dimiliki oleh mahasiswa tersebut. Dengan demikian, proses pembelajaran harus difokuskan pada usaha-usaha agar mahasiswa dapat mengkonstruksi skema yang berkualitas. Untuk itu diperlukan adanya model tahapan-tahapan pembelajaran dalam aljabar abstrak yang dapat membantu mahasiswa melakukan konstruksi mental dan sekaligus mengarahkan intervensi tidak langsung yang dilakukan dosen.

Secara garis besarnya, materi aljabar abstrak terdiri dari dua hal pokok, yaitu konsep (definisi) dan sifat yang berkaitan dengan konsep (lema atau teorema). Pembelajaran berdasarkan teori APOS mensyaratkan agar konsep (definisi) dan sifat (lema atau teorema) dalam aljabar abstrak disajikan sedemikian rupa sehingga memungkinkan mahasiswa dapat mengkonstruksi pengetahuannya secara bertahap melalui interaksi multi arah dengan atau tanpa intervensi dari dosen. Berikut ini diberikan tahapan-tahapan dalam pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS yang merupakan implikasi langsung hasil penelitian ini terhadap pembelajaran dalam aljabar abstrak. Tahapan-tahapan pembelajaran aljabar abstrak yang diusulkan ini diharapkan dapat menjamin peningkatan kualitas kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak dan dapat membantu dosen dalam mempersiapkan bahan ajar dan memposisikan diri dalam pembelajaran berdasarkan paradigma teori APOS.

Tahapan-tahapan dalam penyajian konsep:

1. Dalam memperkenalkan suatu konsep (definisi) dalam aljabar abstrak, proses pembelajaran dimulai dengan sajian masalah yang memuat tantangan bagi mahasiswa untuk berfikir. Masalah tersebut harus dipilih sedemikian rupa sehingga berkaitan dengan konsep yang akan diperkenalkan dan juga harus cukup konkrit bagi mahasiswa, masalah juga dapat dimunculkan melalui kode-kode ISETL.
2. Mahasiswa diajak melakukan perenungan untuk mengkonstruksi konsep (definisi). Dalam hal ini dosen dapat melakukan intervensi tidak langsung

berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar mahasiswa dan memberikan bantuan melalui teknik *scaffolding*.

3. Kepada mahasiswa disajikan permasalahan dalam aljabar abstrak yang memuat tantangan untuk berpikir bagaimana penerapan konsep yang telah dimiliki pada permasalahan tersebut. Dalam hal ini dosen dapat melakukan intervensi tidak langsung berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar mahasiswa dan memberikan bantuan melalui teknik *scaffolding*.

Tahapan-tahapan dalam penyajian lema atau teorema

1. Dalam memperkenalkan suatu sifat (lema atau teorema) dalam aljabar abstrak, proses pembelajaran dimulai dengan sajian masalah yang mengarah kepada penemuan fakta-fakta dan memuat tantangan untuk berpikir. Fakta-fakta tersebut dapat diperoleh secara manual maupun dengan menggunakan fungsi-fungsi dalam bahasa pemrograman ISETL. Masalah tersebut harus dipilih sedemikian rupa sehingga berkaitan dengan sifat yang akan diperkenalkan dan juga harus cukup konkrit bagi mahasiswa.
2. Mahasiswa diajak melakukan perenungan untuk mengkonstruksi konjektur tentang suatu sifat (lema/teorema) dalam aljabar abstrak. Dalam hal ini dosen dapat melakukan intervensi tidak langsung berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar mahasiswa dan memberikan bantuan melalui teknik *scaffolding*.

3. Mahasiswa diajak membuktikan konjektur yang telah mereka buat untuk memperoleh suatu sifat (lema/teorema) dalam aljabar abstrak. Dalam hal ini dosen dapat melakukan intervensi tidak langsung berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar mahasiswa dan memberikan bantuan melalui teknik *scaffolding*.
4. Kepada mahasiswa disajikan permasalahan dalam aljabar abstrak yang memuat tantangan untuk berpikir bagaimana penerapan lema/teorema yang telah dimiliki pada permasalahan tersebut. Dalam hal ini dosen dapat melakukan intervensi tidak langsung berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar mahasiswa dan memberikan bantuan melalui teknik *scaffolding*.

Konsep dan sifat dalam aljabar adalah dua hal yang tak terpisahkan. Setiap konsep pasti mempunyai sifat tertentu, sifat menggambarkan kekhasan dari suatu konsep. Dengan demikian tahapan-tahapan penyajian konsep dan sifat dapat dinyatakan seperti pada Gambar 5.1.

Sebagai ilustrasi, berikut ini disajikan suatu permasalahan yang berkaitan dengan konsep grup dan sifat-sifat grup. Dalam memperkenalkan konsep grup (definisi grup) pembelajaran dapat diawali dengan permasalahan sebagai berikut.

Perhatikan himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu $Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 12 ($+_{12}$). Periksa apakah:

- (1) Setiap a, b di Z_{12} maka $a +_{12} b$ juga di Z_{12} ?
- (2) Setiap a, b, c di Z_{12} maka $(a +_{12} b) +_{12} c = a +_{12} (b +_{12} c)$?
- (3) Ada unsur e di Z_{12} sehingga untuk setiap a di Z_{12} maka $e +_{12} a = a +_{12} e = a$?
- (4) Setiap a di Z_{12} ada b di Z_{12} sehingga $a +_{12} b = b +_{12} a = e$?

Perhatikan himpunan permutasi pada $S = \{1,2,3\}$, yaitu $S_3 = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$ terhadap operasi komposisi fungsi (\circ).

Periksa apakah:

- (1) Setiap a, b di S_3 maka $a \circ b$ juga di S_3 ?
- (2) Setiap a, b, c di S_3 maka $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$?
- (3) Ada unsur e di S_3 sehingga untuk setiap a di S_3 maka $e \circ a = a \circ e = a$?
- (4) Setiap a di S_3 ada b di S_3 sehingga $a \circ b = b \circ a = e$?

Sekarang nyatakan himpunan Z_{12} dan S_3 dengan G dan operasi $+_{12}$ dan \circ dengan $*$, apa yang saudara peroleh?

Melalui kedua permasalahan diatas mahasiswa digiring untuk menemukan konsep grup (definisi grup), yaitu himpunan G beserta operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G memenuhi aksioma grup, yaitu asosiatif, tutup, ada unsur identitas, dan setiap unsur di G mempunyai invers.

Dalam memperkenalkan suatu sifat grup (lema), pembelajaran dapat diawali dengan permasalahan sebagai berikut.

Lengkapi Tabel 5.1 berikut dengan menggunakan fungsi-fungsi ISETL atau dengan menghitung secara manual.

Tabel 5.1
Beberapa Fakta tentang Sifat-Sifat Grup

Grup	$(a^{-1})^{-1}$	$(ab)^{-1}$	$b^{-1} a^{-1}$	Orde(a)	orde(a^{-1})
$(\mathbb{Z}_{20}, +_{20})$ $a = 15, b = 17$					
$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ $a = 1, b = 7$					
(S_4, \circ) $a = [4,2,1,3], b = [4,2,1,3]$					
(S_3, \circ) $a = [2,1,3], b = [2,1,3]$					
$(\mathbb{Z}_5\text{-nol}, \cdot_5)$ $a = 4, b = 3$					
$(\mathbb{Z}_7\text{-nol}, \cdot_7)$ $a = 5, b = 2$					

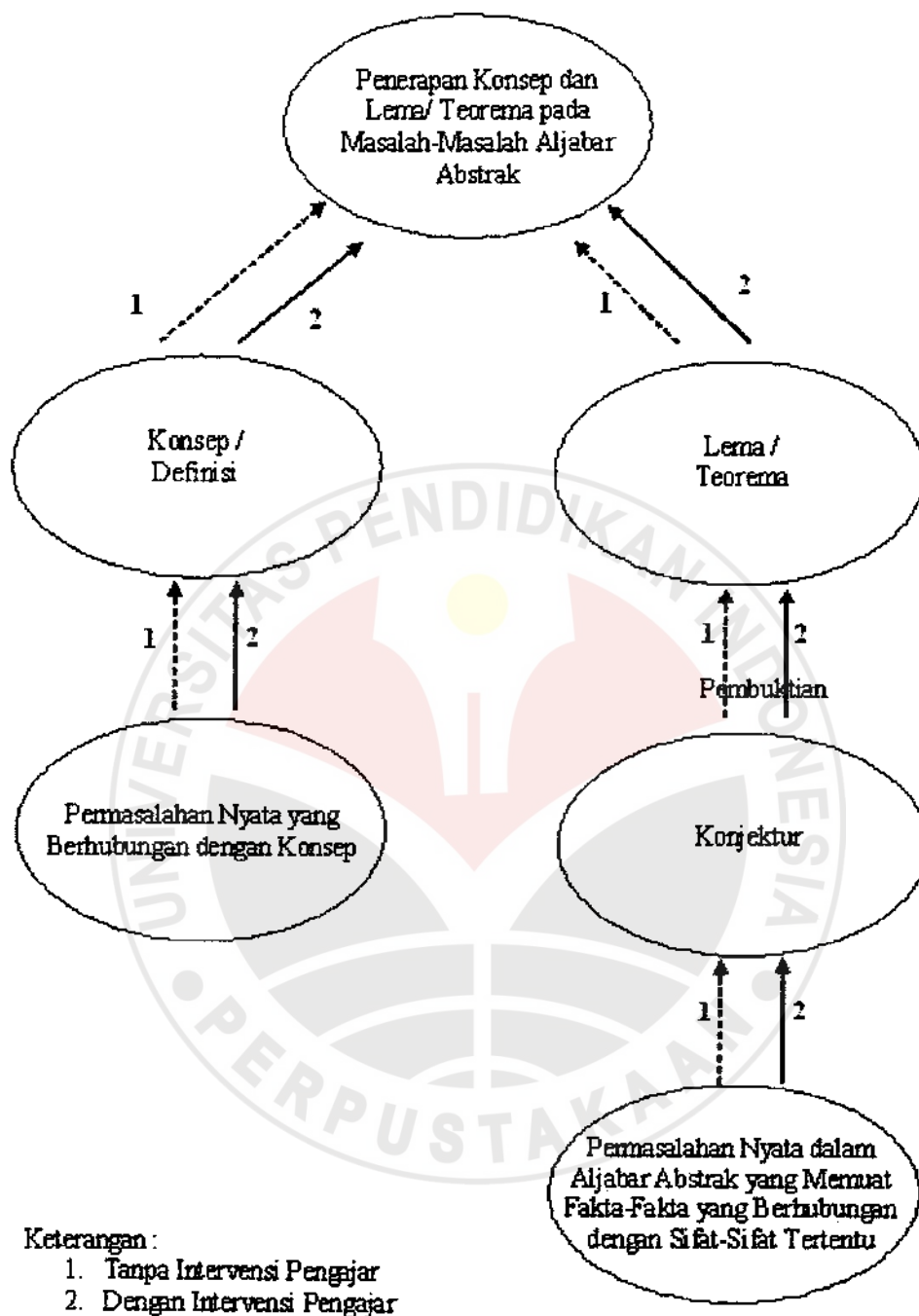
Melalui fakta-fakta di atas mahasiswa digiring untuk membuat konjektur tentang sifat-sifat grup, yaitu:

jika G suatu grup dan a, b di G maka berlaku

$$(1) (a^{-1})^{-1} = a,$$

$$(2) (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1},$$

$$(3) \text{orde}(a) = \text{orde}(a^{-1}).$$



Gambar 5.1
Model Tahapan-Tahapan Penyajian Konsep dan Sifat dalam Aljabar Abstrak Berdasarkan Teori APOS

Dari hasil analisis terhadap jawaban mahasiswa, baik tertulis maupun lisan, diperoleh bahwa mahasiswa masih kesulitan dalam melakukan reformulasi/representasi dan membuat notasi yang dapat membantu dalam

pembuktian. Karena itu dalam pembelajarannya, terutama yang berkaitan dengan penerapan definisi dan lema/teorema pada permasalahan aljabar abstrak, hal ini perlu mendapat perhatian khusus. Mahasiswa perlu didorong dan diberi kesempatan untuk membiasakan diri melakukan reformulasi/representasi dan menggunakan notasi-notasi standar dalam kegiatan pembelajaran aljabar abstrak.

Karena masih banyaknya mahasiswa yang mengira bahwa operasi biner dengan lambang ‘ \cdot ’ adalah operasi perkalian dalam bilangan real, maka dalam pembelajaran harus dipilih lambang-lambang untuk operasi biner yang tidak mudah dikaitkan dengan operasi-operasi biner yang sudah mahasiswa kenal pada matematika persekolahan.

Dari penelitian ini diperoleh bahwa mahasiswa kemampuan awal sedang mempunyai perkembangan/peningkatan kemampuan pembuktian yang paling baik. Ini berarti bahwa ZPD berkembang optimal pada kemampuan awal sedang. Dengan demikian, walaupun kualitas masukan universitas-universitas yang dijadikan populasi pada penelitian ini tidak setara dengan ITB dan UGM (lihat Rif'at, 2001), tetapi dengan kualifikasi dosen yang baik (mempunyai kompetensi dalam bidang studi dan menguasai teori belajar) maka prestasi mahasiswa pada universitas-universitas tersebut tidak akan jauh berbeda dengan mahasiswa ITB dan UGM.

C. Rekomendasi

Berangkat dari kesimpulan dan implikasi terhadap pembelajaran dari penelitian ini maka diperoleh beberapa rekomendasi yang perlu mendapat

perhatian dari semua pihak yang berkepentingan terhadap penggunaan pendekatan teori APOS dalam pembelajaran matematika pada tingkat universitas (khususnya dalam pembelajaran aljabar abstrak) atau bahkan untuk penelitian lebih lanjut. Rekomendasi-rekomendasi tersebut adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini menunjukkan bahwa pendekatan pembelajaran berdasarkan teori APOS: (1) dapat meningkatkan kemampuan pembuktian, (2) dapat meningkatkan tingkat-tingkat pemahaman, (3) dapat meningkatkan tahap-tahap pembuktian, (4) cocok untuk semua tingkat kemampuan awal, terutama kemampuan awal sedang dan rendah, (5) dapat menumbuhkan sikap positif terhadap aljabar abstrak, dan (6) dapat membuat mahasiswa terlibat aktif dalam pembelajaran. Dengan demikian, pendekatan pembelajaran berdasarkan teori APOS sangat potensial untuk diterapkan dalam pembelajaran matematika pada tingkat universitas, khususnya dalam pembelajaran aljabar abstrak.
2. Agar implementasi pendekatan pembelajaran berdasarkan teori APOS dapat berjalan sebagaimana yang diharapkan maka ada beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu: (1) pastikan bahwa permasalahan yang dipakai untuk mengawali pembelajaran (baik untuk memperkenalkan konsep maupun untuk memperkenalkan sifat-sifat tertentu) bervariasi dan sesuai dengan pengetahuan yang telah diperoleh mahasiswa (agar mahasiswa terbantu dalam melakukan konstruksi mental), (2) pastikan bahwa pembelajaran telah mengacu kepada tahapan-tahapan dalam memperkenalkan konsep dan sifat-sifat dalam aljabar abstrak, (3) pastikan bahwa intervensi dosen dalam

pembelajaran proporsional dengan kebutuhan mahasiswa, dengan kata lain bahwa intervensi dosen semata-mata dimaksudkan untuk mengembangkan ZPD yang dimiliki mahasiswa, dan (4) pastikan bahwa mahasiswa telah memperoleh latihan yang cukup dalam rangka memperkuat konsep-konsep dan lema/teorema yang mereka telah pelajari.

3. Karena masih adanya kelemahan pada sebagian besar mahasiswa dalam melakukan reformulasi/representasi dan dalam membuat notasi yang mendukung pembuktian dalam aljabar abstrak maka dalam proses pembuktian lema/teorema atau dalam menyelesaikan soal-soal latihan, mahasiswa harus diberikan kesempatan yang seluas-luasnya, terutama kepada mahasiswa kelompok sedang dan rendah, untuk menyampaikan reformulasi/representasi atau notasi matematika yang mereka pikirkan. Selanjutnya, dari pendapat yang berkembang mahasiswa digiring untuk memperoleh reformulasi/representasi dan notasi yang standar dalam aljabar abstrak.
4. Dalam pendekatan teori APOS, dosen berperan sebagai fasilitator (intervensi tidak langsung), peran ini tidaklah mudah. Dengan demikian dosen yang mengasuh matakuliah aljabar abstrak haruslah dosen yang berpengalaman dalam mengajar dan mempunyai kompetensi yang memadai. Ini dimaksudkan agar dosen dapat berimprovisasi dalam menanggapi berbagai pertanyaan dari mahasiswa atau dalam memberi *hint* agar tepat sasaran.
5. Keberhasilan suatu pembelajaran tidak hanya ditentukan oleh hasil belajar tetapi juga oleh keaktifan mahasiswa dalam pembelajaran, karena itu dalam penerapan pendekatan teori APOS di lapangan alat evaluasi yang digunakan

harus lebih luas (tidak cukup hanya melalui tes tertulis). Alat evaluasi harus mampu mengevaluasi seluruh kegiatan mahasiswa selama pembelajaran, misalnya menilai mahasiswa yang mengajukan pertanyaan dan yang merespon pendapat teman atau dosen yang relevan dengan pembelajaran dan menilai mahasiswa yang menemukan sesuatu dalam pembelajaran (misalnya menemukan lema atau dapat menyelesaikan suatu masalah dalam aljabar abstrak).

6. Populasi pada penelitian ini terbatas pada mahasiswa jurusan matematika FMIPA UNAND dan FMIPA UNP dan mahasiswa jurusan pendidikan matematika UNP. UNAND dan UNP tergolong pada universitas-universitas yang mahasiswa barunya paling sedikit 25% tergolong pada skor NEM dan skor UMPTN rendah (lihat Rif'at, 2001). Dengan demikian perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk mengetahui bagaimana pengaruh pendekatan teori APOS terhadap peningkatan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak pada mahasiswa matematika/pendidikan matematika pada universitas-universitas yang kualitas masukan mahasiswa barunya berada di bawah kualitas masukan UNAND dan UNP, yaitu universitas-universitas di Sumatra Barat selain UNAND dan UNP, misalnya: Universitas Bung Hatta, STKIP PGRI, dan sebagainya. Ini penting mengingat dalam pembelajaran berdasarkan teori APOS, mahasiswa 'diceburkan' secara sengaja ke dalam lingkungan ketidakseimbangan yang memuat sebanyak mungkin materi yang akan dipelajari. Dengan pengetahuan awal yang dimilikinya setiap mahasiswa (kelompok mahasiswa) mencoba untuk memahami permasalahannya, yaitu

mereka mencoba menyelesaikan masalah, menjawab pertanyaan, atau memahami gagasannya (Asiala et al., 1997a). Ada kemungkinan pengetahuan awal pada mahasiswa-mahasiswa Bung Hatta, STKIP PGRI, dan sebagainya tidak memadai untuk dapat berperan dalam pembelajaran berdasarkan teori APOS.

7. Kemampuan mahasiswa dalam mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu pembuktian sangat bergantung kepada *keaktivitas* yang dimiliki oleh mahasiswa tersebut. Dengan demikian perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk mengetahui bagaimana teori APOS dapat mengembangkan kreativitas mahasiswa.
8. Matakuliah aljabar abstrak merupakan salah satu matakuliah transisi dimana mahasiswa mulai diajak untuk bekerja dengan konsep abstrak (menggunakan definisi, lema, dan teorema dalam menyelesaikan suatu permasalahan dalam aljabar abstrak). Dengan demikian, perlu diteliti lebih lanjut penggunaan teori APOS pada pembelajaran matakuliah-matakuliah yang keabstrakannya lebih tinggi seperti teori ukuran, analisis fungsional, topologi, dan sebagainya.