

# BAB I

## PENDAHULUAN

### A. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan mata pelajaran yang senantiasa hadir pada setiap jenjang pendidikan, mulai dari sekolah dasar sampai ke perguruan tinggi. Karakteristik matematika berbeda dengan karakteristik ilmu lainnya. Pengetahuan matematika adalah pengetahuan yang dibentuk melalui berpikir tentang pengalaman akan sesuatu objek atau kejadian tertentu. Menurut Gallgher & Reid (Suparno, 2001), pengetahuan ini diperoleh dari abstraksi berdasarkan koordinasi, relasi, atau penggunaan objek (abstraksi reflektif). Pengetahuan matematika dapat berkembang hanya bila anak bertindak terhadap objek itu.

Belajar matematika di tingkat perguruan tinggi umumnya melibatkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, seperti kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi, bukan sekedar mengingat pengetahuan faktual ataupun aplikasi sederhana dari berbagai formula atau prinsip. Menurut Moise (Ayers et al., 1988), ini menyebabkan banyak mahasiswa mengalami kesulitan mempelajari topik-topik standar yang terdapat dalam kurikulum perguruan tinggi, misalnya topik-topik seperti fungsi komposisi, limit, dan induksi matematika.

Aljabar abstrak merupakan generalisasi dari aljabar (sistem matematika) yang diajarkan pada tingkat persekolahan. Aljabar abstrak dibangun dari beberapa aksioma yang memungkinkan kita memandang berbagai sistem matematika pada tingkat persekolahan sebagai suatu hal yang khusus dari suatu sistem matematika yang lebih abstrak.

Matakuliah aljabar abstrak merupakan salah satu matakuliah dalam kurikulum jurusan/program studi matematika dan pendidikan matematika di semua Perguruan Tinggi di Indonesia. Melalui perkuliahan aljabar abstrak, mahasiswa dapat menyoroti hal-hal yang umum dari berbagai sistem matematika yang sudah mereka kenal sebelumnya, dan mahasiswa mempunyai kesempatan untuk memperoleh pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep-konsep seperti identitas dan invers. Apakah yang serupa, misalnya antara identitas untuk perkalian bilangan real, identitas untuk perkalian matriks, dan identitas untuk komposisi fungsi? Adakah konsep yang umum dibalik invers fungsi, invers matriks, dan invers perkalian suatu bilangan? Dalam aljabar abstrak, mahasiswa juga dapat belajar tentang pentingnya peran timbal balik antara konsep matematika dan bahasa, yaitu: (1) pentingnya bahasa yang teliti dalam matematika dan (2) pentingnya matematika dalam mendukung bahasa yang teliti.

Berdasarkan pengalaman sebagai mahasiswa S1 dan S2 di ITB dan pengalaman sebagai dosen matakuliah aljabar abstrak di jurusan Matematika FMIPA UNAND Padang, aljabar abstrak merupakan matakuliah yang sulit untuk dipelajari dan juga sulit untuk diajarkan. Dari sisi mahasiswa, kesulitan ini misalnya disebabkan oleh: (1) konsep-konsep dalam aljabar abstrak sangat abstrak, (2) banyak contoh-contoh yang berkenaan dengan konsep, tidak dikenali dengan baik oleh mahasiswa, (3) banyak mahasiswa yang belum terbiasa dengan pembuktian deduktif. Hal seperti ini ternyata tidak hanya terjadi di Indonesia, tetapi juga di negara-negara maju seperti yang dinyatakan oleh Leron & Dubinsky (1995) dan Lajoie (Carlson, 2003). Semua ini berujung pada rendahnya

kualitas pemahaman mahasiswa dalam aljabar abstrak (Dubinsky et al., 1994).

Menurut Baylis & Driscoll (Hart, 1994) Bukti/pembuktian merupakan jantung dari matematika dan berpikir matematika (Swan & Rigway, 2004). Dengan demikian, dalam mengevaluasi keberhasilan siswa/mahasiswa dalam pembelajaran matematika juga harus dievaluasi kekhasan dari bidang studi matematika itu sendiri, yaitu membuktikan (Ruseffendi, 1991). Menurut Reid (Sabri, 2004), Bukti/pembuktian membuat matematika unik dan berbeda dari disiplin ilmu lainnya. Melalui tugas pembuktian, dosen dapat melihat: (1) bagaimana kemampuan mahasiswa dalam berargumentasi secara logis, (2) bagaimana mahasiswa menggunakan contoh dan lawan contoh untuk mendukung argumentasinya, (3) kelemahan-kelemahan apa saja yang dialami mahasiswa dalam bernalar, dan (4) miskonsepsi apa yang sering dialami mahasiswa. Peranan bukti/pembuktian yang sangat sentral dalam pedagogi matematika tidak diragukan lagi. Misalnya, Epp (Sabri, 2003) menyatakan bahwa salah satu pendekatan yang paling baik untuk mengembangkan kemampuan berpikir abstrak siswa/mahasiswa adalah melalui keterlibatan yang bermakna dalam mengkonstruksi/menyelesaikan pembuktian-pembuktian matematika.

Bukti/pembuktian memainkan peranan penting dalam aljabar abstrak (Findel, 2001), ini karena aljabar abstrak sarat dengan definisi, lema, dan teorema. Agar mahasiswa dapat memahami aljabar abstrak dengan baik maka mahasiswa dituntut untuk dapat memahami setiap lema dan teorema yang dipelajari. Salah satu syarat agar hal tersebut tercapai adalah mahasiswa harus mempunyai kemampuan dalam membuktikan lema dan teorema yang dipelajari

dan dapat membuktikan beberapa permasalahan yang terkait dengan penerapan definisi, lema, dan teorema. Dengan demikian, meningkatkan pemahaman mahasiswa dalam aljabar abstrak dapat dilakukan melalui peningkatan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian. Hal ini sesuai dengan yang disarankan oleh Hanna (Findel, 2001), yaitu bahwa pemahaman dalam matematika hendaknya dipromosikan melalui pembuktian matematika. Menurut Hanna (Sabri, 2003), pembelajaran matematika tanpa disertai dengan pembuktian tidak mencerminkan teori dan praktek bermatematika.

Pembuktian matematika pada tingkat perguruan tinggi bentuknya lebih formal dan lebih akurat dibandingkan dengan pembuktian di sekolah dasar dan sekolah menengah (Lee, 2004). Tidak semua mahasiswa dapat melakukan ini. Finlow-Bates (1996), Selden & Selden (2003a), Epp (2003), William & Senk (Lee, 2002), dan Douek (2004) menyatakan bahwa sebagian besar mahasiswa masih kesulitan dalam menulis pembuktian matematika. Salah satu penyebabnya berkenaan dengan pandangan mahasiswa itu sendiri terhadap bukti/pembuktian, seperti yang dinyatakan oleh Downs & Downs (2002), bahwa kadang-kadang mahasiswa memandang bukti formal sebagai permainan manipulasi lambang-lambang matematika yang tak bermakna. Pandangan seperti ini pada akhirnya membuat mahasiswa tak dapat memahami bukti yang sederhana sekalipun.

Agar dapat membuat pembuktian matematika dengan baik, mahasiswa dituntut memiliki pengetahuan-pengetahuan prasyarat, misalnya logika matematika dan metode pembuktian dalam matematika. Dimilikinya pengetahuan prasyarat tidak serta merta menjamin mahasiswa dapat mengembangkan dan

mengkomunikasikan suatu bukti/pembuktian. Menurut Solow (1990), untuk dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu pembuktian matematika dengan baik, siswa/mahasiswa dituntut untuk memiliki kreativitas, intuisi, dan pengalaman dalam pembuktian. Memiliki intuisi berarti memiliki kemampuan untuk membuat konjektur yang merupakan bagian yang sangat penting dalam proses pembuktian matematika. Hanya dengan intuisi kita dapat memutuskan apa yang harus kita buktikan (Bloch, 2000). Sedangkan memiliki kreativitas berarti memiliki kemampuan untuk menyatakan persoalan dalam berbagai model yang operasional (Ervynck, 1991). Kreativitas, intuisi, dan pengalaman dalam pembuktian dapat dikembangkan dan disediakan melalui pembelajaran, seperti halnya seorang musisi yang meningkatkan keterampilan musiknya melalui belajar/latihan (Bloch, 2000). *Setting* pembelajaran yang memberi peluang kepada siswa/mahasiswa untuk melakukan berbagai representasi dan melakukan refleksi dapat mengembangkan kemampuan siswa/mahasiswa dalam membuat pembuktian (Maher & Martino, 1996).

Dengan mengacu kepada empat pilar pendidikan universal, Sumarmo (2000) menyatakan bahwa pembelajaran matematika (aljabar abstrak) meliputi: (1) belajar memahami (*learning to know*), (2) belajar melaksanakan (*learning to do*), (3) belajar menjadi diri sendiri (*learning to be*), (4) belajar hidup dalam kebersamaan yang damai dan harmonis (*learning to live together in peace and harmony*).

Melalui proses *learning to know*, mahasiswa memahami/mengetahui secara bermakna: fakta, konsep, prinsip, hukum, teori, model dan idea

matematika, hubungan antar idea tersebut dan alasan yang mendasarinya, serta menggunakan idea itu untuk menjelaskan dan memprediksi proses matematika. Hal ini dipertegas oleh Asiala et al. (1997a) yang menyatakan bahwa ada dua isu penting dalam *learning to know*, yaitu: (1) berkenaan dengan kualitas penguasaan konsep dan (2) berkenaan dengan kemampuan penggunaan konsep tersebut bila diperlukan.

Melalui proses *learning to do*, mahasiswa didorong melaksanakan proses matematika (*doing math*) secara aktif untuk memacu peningkatan perkembangan intelektualnya. Dalam hal ini guru/dosen berperan sebagai penyedia permasalahan matematika dan sebagai fasilitator. Permasalahan harus dipilih sedemikian rupa sehingga siswa/mahasiswa dipaksa untuk berpikir bukan saja tentang fakta-fakta matematika, tetapi juga tentang proses berpikir yang mereka lakukan, hal ini akan dapat mengembangkan kematangan pengetahuan matematika mereka (Galovich, 1995).

Melalui proses *learning to be*, mahasiswa menghargai atau mempunyai apresiasi terhadap nilai-nilai dan keindahan akan produk dan proses matematika, yang ditunjukkan dengan sikap senang, bekerja keras, ulet, sabar, disiplin, jujur, mempunyai motif berprestasi yang tinggi, dan mempunyai rasa percaya diri. Aspek-aspek afektif tersebut mendukung usaha siswa/mahasiswa untuk meningkatkan kecerdasan dan mengembangkan keterampilan intelektual dirinya secara berkelanjutan. Keyakinan (*belief*) dan sikap seseorang terhadap matematika, berpengaruh besar terhadap keberhasilan orang tersebut dalam matematika (Galovich, 1995; Ma, 1997).

Melalui proses *learning to live together in peace and harmony*, siswa/mahasiswa bersosialisasi dan berkomunikasi dalam matematika. Ini dilakukan melalui: bekerja dan belajar bersama dalam kelompok kecil (*cooperative learning*), saling menghargai pendapat orang lain, menerima pendapat yang berbeda, belajar mengemukakan pendapat, dan bersedia *sharing ideas* dengan orang lain dalam kegiatan matematika. Menurut Slavin (1995), melalui bekerja dan belajar bersama dalam kelompok kecil siswa/mahasiswa dapat meningkatkan prestasinya.

Lebih lanjut Sumarmo (2000) menyatakan bahwa untuk mendukung berlangsungnya keempat pilar dalam pendidikan universal, diperlukan perubahan pandangan dalam pembelajaran matematika, yaitu: (1) dari pandangan kelas sebagai kumpulan individu ke arah kelas sebagai masyarakat belajar, (2) dari pandangan pencapaian jawaban yang benar saja ke arah logika dan peristiwa matematika sebagai verifikasi, (3) dari pandangan guru/dosen sebagai pengajar ke arah guru/dosen sebagai pendidik, motivator, fasilitator, dan manajer belajar, (4) dari penekanan pada mengingat prosedur penyelesaian ke arah pemahaman dan penalaran matematika melalui penemuan kembali (*reinvention*), (5) dari memandang dan memperlakukan matematika sebagai kumpulan konsep dan prosedur yang terisolasi ke arah hubungan antar konsep, idea matematika, dan aplikasinya.

Disamping itu, pembelajaran matematika yang diberikan harus dapat mengasah mahasiswa agar mereka memiliki kompetensi dasar dalam matematika, yaitu: pemahaman, pemecahan masalah, penalaran, koneksi matematik, dan



Komunikasi matematik. Kemampuan komunikasi matematik misalnya muncul dalam bentuk: (1) membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi, (2) membaca dengan pemahaman suatu presentasi matematika tertulis, dan (3) mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematika. Kemampuan penalaran matematik misalnya muncul dalam bentuk: (1) menarik kesimpulan secara logik, (2) menyusun dan menguji konjektur, menyusun pembuktian langsung, tak langsung, dan menggunakan induksi matematik, (3) merumuskan lawan contoh (*counter examples*), dan (4) menyusun argumen yang *valid*. Kemampuan koneksi matematik misalnya muncul dalam bentuk: memahami representasi ekuivalen konsep yang sama (Sumarmo, 2000).

Menurut Solow (1990), bukti/pembuktian merupakan rangkaian argumentasi untuk meyakinkan orang lain yang dinyatakan dalam bahasa matematika. Seseorang akan dapat membuat suatu pembuktian yang *valid* bila orang tersebut menguasai semua kompetensi dasar dalam matematika, karena aktivitas pembuktian dalam matematika melibatkan penggunaan semua kompetensi dasar dalam matematika

Dengan pendekatan pembelajaran biasa, pembelajaran aljabar abstrak meliputi: (1) penyampaian materi kepada mahasiswa dalam bentuk penyampaian definisi, lema/teorema serta buktinya, (2) pemberian tugas-tugas, dan (3) diakhiri dengan ujian tulis. Dengan metode seperti ini jelas pembelajaran hanya berjalan satu arah, mahasiswa kurang aktif, belajarnya kurang bermakna, dan tidak jarang suatu konsep hanya dipahami sebagai hafalan (bukan sebagai pengertian). Akibatnya, konsep tersebut mudah dilupakan dan bahkan sering suatu konsep



matematika dipahami secara keliru oleh mahasiswa. Semua ini pada akhirnya menyebabkan mahasiswa tidak dapat menerapkan dengan baik konsep-konsep dan teorema-teorema yang telah dipelajarinya dalam menyelesaikan soal-soal latihan. Secara umum, pembelajaran matematika secara biasa (terutama di perguruan tinggi), lebih menekankan pada isi teori matematika (matematika sebagai produk) daripada mengungkap alasan-alasan dan pemikiran dibalik isi teori matematika (matematika sebagai proses) (Downs & Downs, 2002).

Dalam pembelajaran secara biasa, ada aspek tujuan kurikuler yang sulit untuk dicapai/ditingkatkan, yaitu sikap mahasiswa terhadap aljabar abstrak. Hasil penelitian Clark et al. (1999) tentang pembelajaran aljabar abstrak secara biasa, memperlihatkan bahwa 15 dari 22 orang mahasiswa bersikap negatif terhadap aljabar abstrak. Mengingat adanya hubungan antara sikap terhadap matematika dengan prestasi dalam matematika, maka sangatlah penting bagi dosen untuk dapat memilih pendekatan pembelajaran yang dapat membangkitkan sikap positif mahasiswa terhadap matematika.

Pembelajaran aljabar abstrak yang bagaimanakah dikatakan berhasil? Keberhasilan dalam pembelajaran meliputi dua hal penting, yaitu: (1) berhasil dalam hasil belajar dan (2) berhasil dalam proses belajar. Keberhasilan dalam hasil belajar dapat dilihat dari prestasi mahasiswa yang semakin meningkat dalam penguasaan konsep-konsep aljabar abstrak, terutama meningkatnya kemampuan mahasiswa dalam pembuktian. Keberhasilan dalam proses pembelajaran dapat dilihat melalui aktifitas mahasiswa selama pembelajaran dan sikap yang ditunjukkan mahasiswa selama dan setelah mereka memperoleh pembelajaran.



Belajar pada dasarnya adalah proses yang aktif, keaktifan siswa/mahasiswa dalam mengkonstruksi pengetahuan dapat membantu mereka untuk berdiri sendiri dalam perkembangan kognitif mereka. Mereka akan terbantu menjadi orang yang kritis menganalisis suatu hal karena mereka berpikir dan bukan meniru saja. Melalui belajar dengan aktif siswa/mahasiswa dapat memperluas wawasannya (Sumarmo, 2000; Suparno, 1997; Ruseffendi, 1991).

Sikap mahasiswa terhadap aljabar abstrak dapat dipandang sebagai cerminan proses pembelajaran yang terjadi di kelas. Proses pembelajaran yang memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk aktif melakukan aktivitas matematika dan diberi kesempatan untuk berinteraksi serta bernegosiasi baik dengan sesama mahasiswa maupun dengan dosen, akan memungkinkan mahasiswa merasa tidak tertekan, tidak cemas, rasa percaya dirinya muncul, dan termotivasi untuk belajar. Bila hal ini benar-benar terjadi dalam proses pembelajaran, bukan mustahil sikap positif mahasiswa terhadap aljabar abstrak akan tumbuh. Mengingat adanya korelasi positif antara sikap terhadap matematika (aljabar abstrak) dengan hasil belajar (Ruseffendi, 1991; Galovich, 1995; Ma, 1997) maka meningkatkan prestasi mahasiswa juga dapat dilakukan melalui pemilihan pendekatan pembelajaran yang dapat meningkatkan sikap positif mahasiswa terhadap matematika (aljabar abstrak), terutama harus dipilih pendekatan pembelajaran yang dapat mengurangi kecemasan siswa/mahasiswa dalam belajar, karena menurut Buxton (Becker & Pence, 1994) kecemasan dapat mengurangi prestasi siswa/mahasiswa dalam matematika (aljabar abstrak) (Ma, 1999). Dalam batas tertentu, rasa cemas dapat mendorong usaha belajar lebih giat.

Adakah pendekatan pembelajaran yang dapat memenuhi ketiga hal berikut: (1) mengakomodasi empat pilar pendidikan universal, (2) dapat meningkatkan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak, (3) dapat meningkatkan keaktifan mahasiswa dalam belajar, dan (4) dapat meningkatkan ketertarikan mahasiswa terhadap aljabar abstrak? Dengan kata lain, adakah pendekatan pembelajaran yang memungkinkan mahasiswa mempunyai kesempatan luas untuk berkreaitivitas, mengasah intuisi, dan melakukan *doing math* dalam suasana kelas yang menyenangkan dan menantang?

Salah satu cara yang menjanjikan suatu keberhasilan yang dapat dicoba oleh dosen dalam pembelajaran matematika di perguruan tinggi adalah dengan mempertimbangkan proses-proses mental yang terjadi pada pikiran mahasiswa dalam memahami suatu konsep. Dengan mengetahui bagaimana suatu konsep dikonstruksi, dosen akan dapat membantu konstruksi mental tersebut. Misalnya melalui pendekatan pembelajaran yang melibatkan penggunaan komputer, karena penggunaan komputer dapat menstimuli terjadinya konstruksi mental dalam memahami konsep-konsep matematika (Ayers et al., 1988). Disamping itu, pembelajaran yang menggunakan komputer merupakan hal yang menyenangkan bagi siswa/mahasiswa (Nooriafshar, 2003).

Refleksi, yang merupakan respon terhadap kejadian, aktivitas, atau pengetahuan yang baru diterima merupakan bagian yang sangat penting dalam pembelajaran. Misalnya, ketika dosen telah memperagakan suatu bukti/pembuktian teorema, mahasiswa merenung 'Kalau begitu cara saya membuktikan ini keliru. Ya! Mestinya, dengan cara yang baru saya pelajari ini,

pembuktiannya ringkas dan padat'. Mahasiswa mengendapkan apa yang baru dipelajarinya sebagai struktur pengetahuan yang baru, yang merupakan pengayaan atau revisi dari pengetahuan sebelumnya. Menurut Asiala et al. (1997a), belajar dalam kelompok kecil memberi peluang yang lebih besar kepada mahasiswa untuk melakukan refleksi.

Dalam proses pembelajaran pembuktian, dalam topik matematika apapun, kepada mahasiswa harus ditunjukkan berbagai peran/kegunaan dari pembuktian. Menurut Sabri (2004), *setting* pembelajaran yang mengadopsi perspektif konstruktivisme dapat memfasilitasi pembelajaran pembuktian matematika.

Teori APOS merupakan suatu pendekatan pembelajaran yang dikhususkan untuk pembelajaran matematika di tingkat perguruan tinggi, yang mengintegrasikan penggunaan komputer, belajar dalam kelompok kecil, dan memperhatikan konstruksi-konstruksi mental yang dilakukan oleh mahasiswa dalam memahami suatu konsep matematika. Konstruksi-konstruksi mental tersebut adalah: *aksi (action)*, *proses (process)*, *objek (object)*, dan *skema (schema)* yang disingkat dengan *APOS* (Dubinsky & McDonald, 2001).

Teori APOS pada dasarnya menganut paham konstruktivisme, khususnya konstruktivisme yang dikembangkan oleh Vygotsky, yaitu konstruktivisme sosial. Menurut Dubinsky & McDonald (2001), pengetahuan dan pemahaman matematika yang dimiliki mahasiswa merupakan hasil konstruksi dan interaksi mahasiswa tersebut dengan orang lain dalam memahami ide-ide matematika. Pengetahuan dan pemahaman matematika dikonstruksi mahasiswa melalui tahapan konstruksi mental: *aksi, proses, objek, dan skema (APOS)*. Sedangkan

interaksi antar mahasiswa (mahasiswa pandai dengan mahasiswa kurang pandai) dan interaksi mahasiswa dengan dosen dimaksudkan untuk mengembangkan apa yang oleh Vygotsky disebut sebagai *zone of proximal development* (ZPD), yaitu jarak antara tingkat perkembangan sesungguhnya (didefinisikan sebagai kemampuan pemecahan masalah secara mandiri) dengan tingkat perkembangan potensial (didefinisikan sebagai kemampuan pemecahan masalah dibawah bimbingan orang dewasa atau melalui kerja sama dengan teman sejawat yang lebih mampu) (Suharta, 2002; Morrone et al., 2004).

Siklus pembelajaran dalam teori APOS meliputi: (1) aktivitas di laboratorium komputer, (2) diskusi kelas, dan (3) latihan. Melalui aktivitas laboratorium, mahasiswa dapat mereduksi konsep-konsep yang abstrak menjadi lebih konkrit, yaitu dengan mengeksplorasi contoh atau bukan contoh yang berhubungan dengan konsep dan sifat-sifat dari konsep tersebut (Asiala et al., 1997a). Menurut Leron & Dubinsky (1995), kegiatan di laboratorium dimaksudkan untuk memberikan kesempatan yang lebih besar munculnya intuisi tentang konsep-konsep matematika. Hal yang hampir senada juga dikemukakan oleh Lakatos (1976), bahwa pendekatan pembelajaran yang melibatkan percobaan/penyelidikan dapat memberi peluang munculnya intuisi kepada mahasiswa dalam memahami suatu teorema. Kegiatan diskusi kelas memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk mengajukan berbagai cara atau strategi yang mungkin saja lebih efisien dari yang ditemukan oleh mahasiswa lainnya, berargumentasi dalam diskusi kelas akan merupakan latihan yang sangat berharga dalam usaha meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam bernalar secara

deduktif, dan pada akhirnya dapat meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematika (Alibert & Thomas, 1991).

Kegiatan latihan dimaksudkan untuk memberikan kesempatan kepada mahasiswa menerapkan konsep dan sifat yang sudah dikuasai untuk menyelesaikan beberapa persoalan dalam matematika. Dengan kegiatan ini mahasiswa akan memperoleh banyak pengalaman tentang bagaimana liku-liku penerapan konsep dan sifat dalam menyelesaikan suatu persoalan dalam aljabar abstrak. Dengan demikian, pembelajaran berdasarkan teori APOS memberi peluang kepada mahasiswa untuk berkreaitivitas, memperoleh intuisi, dan memperoleh pengalaman dalam bermatematika. Ini berarti, teori APOS 'cukup menjanjikan' kalau dipakai sebagai pendekatan dalam pembelajaran aljabar abstrak, terutama untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian. Jadi, pembelajaran berdasarkan teori APOS memungkinkan mahasiswa memperoleh prasyarat yang diperlukan untuk dapat membuat bukti/pembuktian dengan baik dalam matematika, yaitu prasyarat yang dikemukakan oleh Solow (1990), yang menyatakan bahwa untuk dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu pembuktian matematika dengan baik, kita dituntut untuk memiliki kreativitas, intuisi, dan pengalaman dalam pembuktian.

Selain faktor pembelajaran, ada faktor lain yang juga dapat diduga berkontribusi terhadap kemampuan mahasiswa dalam pembuktian dan terhadap sikap mahasiswa dalam aljabar abstrak. Misalnya: (1) kemampuan awal mahasiswa (tinggi, sedang, dan rendah) dan (2) kelompok jurusan (jurusan matematika dan jurusan pendidikan matematika).

Menurut Galton (Ruseffendi, 1991), setiap mahasiswa mempunyai kemampuan yang berbeda dalam memahami matematika, dari sekelompok mahasiswa yang tidak dipilih secara khusus, akan selalu kita jumpai mahasiswa yang kemampuannya tinggi, sedang, dan rendah, karena kemampuan mahasiswa (termasuk kemampuan dalam matematika) menyebar secara distribusi normal. Perbedaan kemampuan yang dimiliki mahasiswa tidak semata-mata merupakan bawaan dari lahir, tetapi juga bisa karena pengaruh lingkungan (Ruseffendi, 1991). Dengan demikian, pemilihan pendekatan pembelajaran harus diarahkan agar dapat mengakomodasi kemampuan mahasiswa yang pada umumnya adalah heterogen. Ada kemungkinan mahasiswa yang kemampuannya sedang atau rendah, namun apabila pendekatan pembelajaran yang digunakan 'cocok' dengan mereka, maka pemahaman mereka akan menjadi lebih baik.

Menurut Allen (Mustapa, 2001), banyak penelitian memperlihatkan bahwa mahasiswa yang memiliki kemampuan tinggi akan memperoleh prestasi yang tinggi (Krutetskii, 1976), tidak peduli metode belajar apapun yang diterapkan. Tetapi mahasiswa yang berkemampuan sedang atau rendah akan mendapatkan manfaat dari penerapan strategi-strategi pembelajaran seperti: (1) respon dan partisipasi aktif dan (2) umpan balik yang bersifat korektif. Dengan memperhatikan apa yang dibutuhkan untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian dan menimbang karakteristik pembelajaran berdasarkan teori APOS, penulis berpendapat bahwa pendekatan teori APOS dapat mengakomodasi semua tingkat kemampuan awal mahasiswa dalam pembelajaran aljabar abstrak untuk meningkatkan kemampuan pembuktian.

Perbedaan struktur kurikulum antara jurusan matematika (Nondik) dengan jurusan pendidikan matematika (Dik) juga dapat diduga berkontribusi terhadap perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak. Kurikulum Nondik terdiri dari 132-138 sks matakuliah bidang studi (MKBS) sedangkan kurikulum Dik hanya terdiri dari 112 sks. Walaupun terdapat perbedaan dalam struktur kurikulum, tetapi kompetensi dalam MKBS yang dikembangkan dan yang harus dimiliki oleh lulusan jurusan/program studi Nondik dan Dik adalah sama. Untuk MKBS dengan nama dan bobot sks yang sama, lingkup dan kedalaman materi kuliah untuk jurusan/program studi Nondik sama persis dengan program studi Dik. Demikian juga halnya dengan pengelolaan pembelajaran dan penetapan standar kelulusan (UPI, 2003).

Perbedaan jumlah MKBS bisa saja menyebabkan perbedaan mahasiswa Nondik dan Dik dalam kematangan bermatematika dan pada akhirnya dapat mempengaruhi kualitas pemahaman mahasiswa terhadap suatu matakuliah, misalnya matakuliah aljabar abstrak. Penelitian yang dilakukan oleh Stylianides & Philippou (2004) menunjukkan bahwa mahasiswa Nondik (*mathematics majors*) mempunyai pemahaman yang lebih baik dalam penggunaan metode pembuktian kontraposisif jika dibandingkan dengan mahasiswa Dik (*education majors*).

Studi tentang pembelajaran dengan pendekatan teori APOS telah banyak dilakukan, baik di luar maupun di dalam negeri (Asiala et al., 1997b, 1997c, 1998; Brown et al. 1997; Clark et al. 1999; Nurlaelah & Usdiana, 2003; Astuti et al., 2004). Di luar negeri, *Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC)* telah mengembangkan beberapa model-model



pembelajaran untuk topik-topik matematika universitas yang didasarkan kepada teori APOS, misalnya Asiala et al. (1997b) mengembangkan pembelajaran tentang pemahaman grafik dan turunan. Khusus untuk pembelajaran dalam aljabar abstrak, misalnya Asiala et al. (1997c, 1998) mengembangkan pembelajaran tentang koset, subgrup normal, grup kosien, grup permutasi, dan grup simetri. Brown et al. (1997) mengembangkan pembelajaran tentang operasi biner, grup, dan subgrup, sedangkan Clark et al. (1999) meneliti tentang sikap terhadap aljabar abstrak. Di dalam negeri, Nurlaelah & Usdiana (2003) menerapkan teori APOS untuk pembelajaran Matakuliah MAT 523 (Struktur Aljabar I) dengan subjeknya adalah mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung, sedangkan Astuti et al. (2004) menerapkan teori APOS untuk pembelajaran Matakuliah MA 3231 (Struktur Aljabar) dengan subjeknya adalah mahasiswa Jurusan Matematika Institut Teknologi Bandung (ITB). Melalui data yang terkumpul diperoleh kesimpulan bahwa pembelajaran berdasarkan teori APOS dapat meningkatkan pemahaman dan sikap positif terhadap aljabar abstrak.

Ada beberapa hal yang masih perlu untuk diungkap lebih jauh yang berhubungan dengan pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS, yaitu: (1) Apakah pemahaman dan sikap mahasiswa dalam aljabar abstrak meningkat secara signifikan? (2) Bagaimana pengaruh kemampuan awal mahasiswa terhadap pemahaman dan sikap dalam aljabar abstrak? (3) Apakah teori APOS dapat dipakai untuk meningkatkan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak?

Sejauh ini, penelitian yang menggunakan teori APOS untuk pembelajaran aljabar abstrak, baik yang dilakukan di Indonesia maupun di luar negeri,

semuanya bersifat kualitatif (tidak menggunakan uji statistik) dan belum ada yang secara khusus meneliti pengaruh teori APOS dalam meningkatkan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak. Dengan demikian, dirasakan perlu untuk melakukan penelitian tentang penggunaan teori APOS dalam pembelajaran aljabar abstrak terutama untuk mengungkap apakah pembelajaran berdasarkan teori APOS memberikan kontribusi yang berbeda secara signifikan terhadap kemampuan mahasiswa dalam pembuktian jika dibandingkan dengan pembelajaran secara biasa?

#### **B. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah, hal utama yang menjadi pokok perhatian dalam penelitian ini adalah untuk melihat ada tidaknya perbedaan kontribusi antara pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan pembelajaran secara biasa terhadap kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak dan terhadap sikap mahasiswa dalam aljabar abstrak. Rumusan masalah yang selengkapny adalah sebagai berikut:

1. Apakah terdapat perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa?
2. Apakah terdapat perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa Nondik yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa Nondik yang memperoleh pembelajaran secara biasa?

3. Apakah terdapat perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa Dik yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa Dik yang memperoleh pembelajaran secara biasa?
4. Apakah terdapat perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal tinggi yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa?
5. Apakah terdapat perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal sedang yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa?
6. Apakah terdapat perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal rendah yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa?
7. Apakah ada pengaruh bersama antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal terhadap kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak?
8. Apakah terdapat perbedaan sikap terhadap aljabar abstrak antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa?
9. Apakah terdapat perbedaan sikap terhadap aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal tinggi yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori

- APOS dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa?
10. Apakah terdapat perbedaan sikap terhadap aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal sedang yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa?
  11. Apakah terdapat perbedaan sikap terhadap aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal rendah yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa?
  12. Apakah ada pengaruh bersama antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal terhadap sikap dalam aljabar abstrak?
  13. Apakah ada korelasi positif antara kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak dengan sikap terhadap aljabar abstrak?
  14. Apakah terdapat perbedaan tahap kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa?
  15. Apakah terdapat perbedaan tingkat pemahaman (pemahaman setingkat aksi, proses, objek, dan skema) dalam aljabar abstrak antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa?



16. Apakah terdapat perbedaan dalam keaktifan mahasiswa selama pembelajaran antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa?
17. Kesulitan-kesulitan/kendala apa yang dialami mahasiswa pada pembuktian dalam aljabar abstrak?
18. jenis-jenis kesalahan apa saja yang dialami mahasiswa dalam pembuktian tentang aljabar abstrak?

### **C. Pentingnya Masalah**

Dengan mengetahui tingkat keefektifan teori APOS dalam meningkatkan kualitas pembelajaran aljabar abstrak, yaitu dengan mengetahui: (1) seberapa jauh teori APOS berhasil dalam meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian, (2) seberapa jauh teori APOS berhasil dalam meningkatkan sikap positif mahasiswa terhadap aljabar abstrak, dan (3) seberapa jauh teori APOS berhasil dalam meningkatkan keaktifan mahasiswa dalam pembelajaran aljabar abstrak jika dibandingkan dengan pembelajaran secara biasa, kita akan dapat memutuskan apakah teori APOS dapat dipakai sebagai salah satu alternatif pembelajaran matematika di perguruan tinggi di Indonesia, khususnya dalam pembelajaran aljabar abstrak.

### **D. Tujuan Penelitian**

Berdasarkan permasalahan-permasalahan yang disebutkan pada bagian rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak (perbedaan skor dan perbedaan tahap) ditinjau dari faktor pembelajaran atau faktor kemampuan awal.
2. Untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak (aksi, proses, objek, skema) antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang pembelajarannya secara biasa.
3. Untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang kesulitan-kesulitan/kendala yang dialami mahasiswa pada pembuktian dalam aljabar abstrak.
4. Untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang jenis-jenis kesalahan yang dialami mahasiswa pada pembuktian dalam aljabar abstrak.
5. Untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan aktifitas belajar antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang pembelajarannya secara biasa.
6. Untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan sikap terhadap aljabar abstrak ditinjau dari faktor pembelajaran atau faktor kemampuan awal.
7. Untuk memperoleh kesimpulan dan implikasi dalam pembelajaran tentang teori APOS yang bermanfaat bagi staf dosen dalam kaitannya dengan upaya meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematika, khususnya dalam aljabar abstrak.

## **E. Hipotesis Penelitian**

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, maka penelitian ini mengajukan beberapa hipotesis sebagai berikut:

1. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian lebih baik secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
2. Mahasiswa Nondik yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian lebih baik secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa Nondik yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
3. Mahasiswa Dik yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian lebih baik secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa Dik yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
4. Mahasiswa dengan kemampuan awal tinggi yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan pendekatan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian lebih baik secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
5. Mahasiswa dengan kemampuan awal sedang yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian

- lebih baik secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
6. Mahasiswa dengan kemampuan awal rendah yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian lebih baik secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
  7. Ada interaksi yang signifikan antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal terhadap kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak.
  8. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap lebih positif secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.
  9. Mahasiswa dengan kemampuan awal tinggi yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap lebih positif secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
  10. Mahasiswa dengan kemampuan awal sedang yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap lebih positif secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.
  11. Mahasiswa dengan kemampuan awal rendah yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai sikap lebih positif secara signifikan jika dibandingkan dengan mahasiswa yang kemampuan awalnya sama tetapi memperoleh pembelajaran secara biasa.



12. Ada interaksi yang signifikan antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal terhadap sikap mahasiswa dalam aljabar abstrak.
13. Ada korelasi positif yang signifikan antara kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak dengan sikap terhadap aljabar abstrak.

#### **F. Definisi Istilah**

1. Pendekatan teori APOS adalah suatu pendekatan pembelajaran matematika pada tingkat perguruan tinggi yang mempunyai karakteristik sebagai berikut:  
(1) pengetahuan matematika dikonstruksi oleh mahasiswa melalui tahapan konstruksi mental APOS, (2) menggunakan komputer, (3) mahasiswa belajar dalam kelompok kecil, (4) menggunakan siklus pembelajaran: aktivitas laboratorium, diskusi kelas, dan latihan (Asiala et al, 1997a).
2. Kemampuan pembuktian dalam aljabar abstrak adalah: (1) kemampuan untuk memvalidasi bukti-bukti yang berhubungan dengan aljabar abstrak dan (2) kemampuan untuk mengkonstruksi bukti yang berhubungan dengan jenis-jenis pembuktian yang sering muncul dalam aljabar abstrak (Hart, 1994; Selden & Selden, 2003a).
3. Sikap mahasiswa terhadap matematika (aljabar abstrak) menurut Neale (Ma, 1997) adalah ukuran suka atau tidak suka mahasiswa tersebut terhadap matematika, yaitu kecenderungan mahasiswa tersebut untuk terlibat secara aktif atau menghindar dari kegiatan matematika termasuk juga kesan mahasiswa terhadap pembelajarannya (Ruseffendi, 1991).

4. Kemampuan awal mahasiswa adalah klasifikasi kemampuan mahasiswa dalam suatu kelas (kontrol dan eksperimen) yang diketahui berdasarkan skor tes materi prasyarat, terdiri dari tiga kelompok yaitu: tinggi, sedang, dan rendah. Kriteria pengelompokannya dinyatakan dalam Tabel 1.1.

Tabel 1.1  
Kriteria Pengelompokan Kemampuan Awal Mahasiswa

Kemampuan Awal	Kriteria
Tinggi	Mahasiswa yang memperoleh skor 70% atau lebih dari skor total
Sedang	Mahasiswa yang memperoleh skor di atas 30% dan dibawah 70% dari skor total
Rendah	Mahasiswa yang memperoleh skor 30% atau kurang dari skor total