

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ruang Orlicz L_ϕ pertama kali dikenalkan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pada tahun 1931 sebagai perumuman dari ruang Lebesgue L_p untuk $1 \leq p < \infty$ (Orlicz, 1992, hlm. 203). Terdapat dua versi ruang Orlicz yang berbeda, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz (Kamthan & Gupta, 1981, hlm. 297; Lindenstrauss & Tzafriri, 1971, hlm. 137). Adapun pembahasan mengenai ruang Orlicz kontinu di antaranya telah banyak dibahas oleh M. A. Krasnoselskii dan Y. B. Rutickii pada tahun 1961 (Abbas, 2013, hlm. 2342). Adapun ruang barisan Orlicz yang merupakan perumuman dari ruang barisan *summable-p* ℓ_p , untuk $1 \leq p < \infty$, pertama kali dikenalkan oleh J. Lindenstrass dan L. Tzafriri pada tahun 1971 (Khusnussa'adah & Supama, 2019, hlm. 1). Selanjutnya, penulisan ruang Orlicz kontinu pada penelitian ini cukup ditulis dengan ruang Orlicz.

Penelitian tentang sifat inklusi pada ruang Orlicz dimulai oleh Welland pada tahun 1966 dengan memberikan syarat cukup sifat inklusi pada ruang Orlicz (Welland, 1966). Selanjutnya, Kufner, John, dan Fučik melengkapi hasil yang diperoleh Welland pada tahun 1977, dengan memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz untuk domain fungsi yang berukuran hingga (Kufner dkk., 1977). Pada tahun 1989, Maligranda mengembangkan hasil yang diperoleh Welland dan Kufner dkk. dengan memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz untuk domain fungsi berukuran tak hingga (Maligranda, 1989). Pada tahun 2018, Masta melakukan penelitian mengenai syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz, namun dengan cara yang berbeda dari yang dilakukan oleh Maligranda (Masta, 2018).

Hal yang menarik untuk ditelusuri adalah bagaimana syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan beberapa ketaksamaan norma pada ruang barisan Orlicz dengan memanfaatkan hasil yang telah diperoleh pada ruang Orlicz. Salah satu ketaksamaan yang banyak dibahas adalah ketaksamaan Hölder yang pertama kali dikenalkan oleh L. J. Rogers dan O. Hölder pada tahun 1888. Ketaksamaan Hölder memiliki peran penting pada beberapa cabang dari matematika modern, seperti

analisis riil, analisis kompleks, analisis numerik, probabilitas dan statistika, persamaan diferensial, dan lain-lain (Zhao & Cheung, 2016, hlm. 211).

Pembuktian ketaksamaan Hölder pertama kali dilakukan oleh L. J. Rogers di tahun 1888. Kemudian pada tahun 1889, O. Hölder membuktikan ketaksamaan tersebut dalam bentuk yang lebih umum. Terdapat hal yang menarik bahwa meskipun ketaksamaan ini ditemukan oleh mereka berdua, namun ketaksamaan tersebut lebih dikenal dengan ketaksamaan Hölder saja, bukan dengan Ketaksamaan Rogers atau Ketaksamaan Rogers-Hölder (Albuquerque, Araujo, Pellegrino, & Seoane-Sepúlveda, 2017, hlm. 199). Pembahasan mengenai hal tersebut bisa dilihat pada (Maligranda, 1998).

Penelitian ketaksamaan Hölder pada ruang Lebesgue dan ruang Orlicz banyak dibahas oleh banyak peneliti pada beberapa dekade ini, di antaranya pada tahun 1965, O'Neil memberikan syarat cukup dan perlu ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz (O'Neil, 1965). Selanjutnya, pada tahun 2000 W. Cheung memberikan syarat cukup perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Lebesgue (Cheung, 2000). Pada tahun 2016, Masta, Gunawan, dan Setya-Budhi mengembangkan hasil yang telah diperoleh Cheung dengan memberikan syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Lebesgue (Masta dkk., 2017). Kemudian pada tahun 2018, Ifronika, Masta, Nur, dan Gunawan mengembangkan hasil yang telah diperoleh O'Neil dengan memberikan syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz (Ifronika dkk., 2018).

Berdasarkan uraian di atas, karena banyaknya penelitian yang mengkaji sifat inklusi serta ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz, maka hal tersebut menjadi motivasi bagi penulis untuk meneliti keberlakuan syarat cukup dan perlu sifat inklusi serta ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan di atas, maka permasalahannya dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana struktur dari ruang barisan Orlicz terkait ketaksamaan norma pada ruang tersebut?
2. Bagaimana syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz?

3. Bagaimana keberlakuan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Mempelajari struktur dari ruang barisan Orlicz terkait ketaksamaan norma pada ruang tersebut.
2. Memberikan syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz.
3. Mempelajari keberlakuan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat digunakan oleh pembaca sebagai alternatif bahan rujukan dalam memperluas sekaligus memperdalam penguasaan materi ruang Orlicz, khususnya tentang ruang barisan Orlicz. Hasil penelitian ini juga diharapkan dapat memberikan manfaat bagi peneliti lain yang mengkaji topik penelitian serupa dalam hal memberikan inspirasi untuk mengembangkan penelitian lebih lanjut tentang ruang barisan Orlicz dan sifat-sifatnya.

1.5. Sistematika Penulisan

Hasil penelitian ini dipublikasikan dalam bentuk skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika Konsentrasi Analisis. Skripsi ini terbagi menjadi enam bab utama, yaitu Bab I Pendahuluan, Bab II Kajian Pustaka, Bab III Metodologi Penelitian, Bab IV Ruang Orlicz, Bab V Ruang Barisan Orlicz, dan Bab VI Penutup.

Pada Bab I berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada Bab II berisi teori-teori pendukung yang digunakan pada Bab IV dan Bab V yang terbagi menjadi empat sub bab utama, yaitu ruang barisan, ruang Banach, lema Fatou, dan fungsi Young.

Pada Bab III berisi penjabaran mengenai penemuan topik penelitian, metode penelitian, dan langkah-langkah penelitian yang dilakukan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.

Pada Bab IV berisi teori dan struktur ruang Orlicz yang selanjutnya dimanfaatkan sebagai dasar teori bagi struktur pada ruang barisan Orlicz, di antaranya adalah ruang Orlicz merupakan ruang Banach. Kemudian juga berisi tentang sifat inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz. Lebih jauh lagi, pada bab ini dibahas syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz.

Pada Bab V berisi pengkajian struktur ruang barisan Orlicz berdasarkan sifat-sifat yang telah disampaikan pada Bab IV. Selain itu, bab ini berisi pemaparan mengenai sifat inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz, serta bukti bahwa ruang barisan Orlicz merupakan ruang Banach. Lebih jauh lagi, pada bab ini dibahas syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

Pada Bab VI berisi simpulan mengenai penelitian yang telah dilakukan dan saran mengenai penelitian lanjutan mengenai topik ini.