

**SIFAT INKLUSI DAN PERUMUMAN KETAKSAMAAN HÖLDER PADA
RUANG BARISAN ORLICZ**

SKRIPSI

diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika Konsentrasi Analisis



Oleh

Pradipta Swiantana Prayoga

NIM 1603478

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
2020**

**SIFAT INKLUSI DAN PERUMUMAN KETAKSAMAAN HÖLDER PADA
RUANG BARISAN ORLICZ**

Oleh
Pradipta Swiantana Prayoga

Sebuah skripsi yang diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika Konsentrasi Analisis

© Pradipta Swiantana Prayoga 2020
Universitas Pendidikan Indonesia
Agustus 2020

Hak cipta dilindungi undang-undang.
Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian, dengan dicetak
ulang, difotokopi, atau cara lainnya tanpa izin dari penulis.

LEMBAR PENGESAHAN

PRADIPTA SWIANTANA PRAYOGA

**SIFAT INKLUSI DAN PERUMUMAN KETAKSAMAAN HÖLDER PADA
RUANG BARISAN ORLICZ**

disetujui dan disahkan oleh pembimbing:

Pembimbing I



Dr. Al Azhary Masta, M.Si.

NIP. 199006102015041001

Pembimbing II

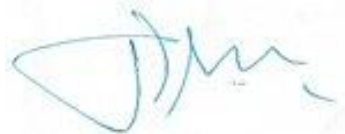


Siti Fatimah, S.Pd., M.Si., Ph.D.

NIP. 196808231994032002

Mengetahui,

Ketua Departemen Pendidikan Matematika,



Dr. Dadang Juandi, M.Si.

NIP. 19640117199202100

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz” ini beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri. Saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai etika ilmu yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran etika keilmuan atau ada klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandung, Agustus 2020

Penulis,

Pradipta Swiantana Prayoga

NIM 1603478

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim. Alhamdulillah rabbi 'alamin, dengan izin Allah *subhanahu wa Ta'ala* dan berkat pertolongan dari-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz”. Shalawat serta salam semoga tercurah limpahkan kepada Nabi Muhammad *shallallahu 'alaihi wasallam* yang telah menuntun umatnya menuju jalan yang lurus, kemudian kepada para sahabatnya, keluarganya, dan umatnya hingga akhir zaman.

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengkaji keberlakuan sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz dengan memanfaatkan hasil yang telah diperoleh pada ruang Orlicz kontinu. Salah satu cara yang digunakan untuk membuktikan hal keberlakuan tersebut adalah dengan menggunakan norma dari barisan karakteristik pada \mathbb{Z} .

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih sangat jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangatlah dibutuhkan agar menjadi pembelajaran berharga bagi penulis.

Bandung, Agustus 2020

Penulis

UCAPAN TERIMAKASIH

Empat tahun sudah penulis melakukan proses menuntut ilmu di Universitas Pendidikan Indonesia pada program studi Matematika hingga berakhir pada penyusunan skripsi ini. *Alhamdulillah*, semuanya dapat berjalan dengan lancar dikarenakan murni pertolongan dari Allah *subhanahu wa Ta'ala*. Pada proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa dalam pengerjaannya tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu, bapak, dan kedua kakak penulis yang senantiasa memberikan dukungan berupa doa, semangat, motivasi, dan berbagai kebaikan lainnya yang begitu banyak sekali untuk penulis.
2. Bapak Dr. Al Azhary Masta, M.Si., selaku pembimbing I yang dengan sabar memperbaiki begitu banyak kesalahan dalam proses penyusunan skripsi ini, meluangkan waktu yang begitu banyak untuk memberikan bimbingan, arahan, ilmu, motivasi, dan saran kepada penulis baik dalam proses penyusunan skripsi maupun dalam menjalani kehidupan perkuliahan ini.
3. Ibu Siti Fatimah, S.Pd., M.Si., Ph.D., selaku pembimbing II yang dengan sabar meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, ilmu, motivasi, dan saran kepada penulis dalam proses penyusunan skripsi.
4. Bapak Dr. H. Dadang Juandi, M.Si., selaku ketua Departemen Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia yang telah mendukung dan memfasilitasi penulis selama menjalani proses perkuliahan.
5. Bapak Dr. H. Cece Kustiawan, M.Si., selaku ketua Program Studi Matematika yang telah mendukung dan memfasilitasi penulis selama menjalani proses perkuliahan.
6. Ibu Entit Puspita, S.Pd., M.Si., dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan, motivasi, dan saran kepada penulis selama proses perkuliahan.
7. Seluruh dosen dan staf Departemen Pendidikan Matematika yang senantiasa tulus memberikan ilmu kepada penulis selama mengikuti proses perkuliahan dan banyak sekali memberikan ilmu yang berharga, menjadi teladan dalam

belajar, dan memberikan dukungan bagi penulis selama menjalani proses perkuliahan.

8. Teman-teman kelas Matematika C angkatan 2016 yang telah berjuang bersama-sama dalam waktu yang tidak singkat dan saling membantu satu sama lain dalam kebaikan serta saling mendoakan untuk kesuksesan bersama; seluruh mahasiswa Departemen Pendidikan Matematika angkatan 2016; kakak, teman, serta adik di Unit Kegiatan Mahasiswa Belajar Alquran Intensif (UKM BAQI); yang semuanya mewarnai berbagai proses menuntut ilmu selama di UPI.
9. Pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang turut membantu dan memotivasi dalam penyusunan skripsi ini.

Jazakumullahu khairaa, semoga Allah *subhanahu wa Ta'ala* membalas mereka semua dengan kebaikan yang begitu banyak.

Bandung, Agustus 2020

Penulis

ABSTRAK

Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz

Oleh: Pradipta Swiantana Prayoga

Ruang Orlicz adalah perumuman dari ruang Lebesgue yang dikenalkan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pada tahun 1931. Terdapat dua versi ruang Orlicz, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz. Topik utama penelitian ini adalah mengenai ruang barisan Orlicz. Pada penelitian ini, penulis memperlihatkan syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan keberlakuan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz. Lebih jauh lagi, penulis memperoleh syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz. Salah satu cara yang digunakan untuk membuktikan hal tersebut adalah dengan menggunakan norma dari barisan karakteristik pada \mathbb{Z} .

Kata kunci: ruang Orlicz, ruang barisan Orlicz, sifat inklusi, ketaksamaan Hölder.

ABSTRACT

Inclusion Properties and Generalization of Hölder's Inequality of Orlicz Sequence Spaces

By: Pradipta Swiantana Prayoga

Orlicz spaces are generalization of the Lebesgue spaces which was introduced by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz in 1931. There are two versions of Orlicz spaces, namely continuous Orlicz spaces and Orlicz sequence spaces. The main topic of this study was about Orlicz sequence spaces. In this study, the author showed the sufficient and necessary conditions for inclusion properties and Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces. Furthermore, the author obtained the sufficient and necessary conditions for generalization of Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces. One of the keys to prove these results was by using the norm of the characteristic sequence in \mathbb{Z} .

Keywords: Orlicz spaces, Orlicz sequence spaces, inclusion properties, Hölder's inequality.

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	ii
KATA PENGANTAR.....	iii
UCAPAN TERIMAKASIH.....	iv
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR LAMPIRAN	x
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Tujuan Penelitian	3
1.4. Manfaat Penelitian	3
1.5. Sistematika Penulisan.....	3
BAB II KAJIAN PUSTAKA	5
2.1. Ruang Barisan	5
2.2. Ruang Banach	8
2.3. Lema Fatou.....	11
2.4. Fungsi Young	14
BAB III METODE PENELITIAN	19
BAB IV RUANG ORLICZ.....	20
4.1. Ruang Orlicz	20
4.2. Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz	28
4.3. Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Orlicz.....	32
BAB V RUANG BARISAN ORLICZ	36

5.1. Ruang Barisan Orlicz	36
5.2. Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz	45
5.3. Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz.....	50
BAB VI PENUTUP	56
6.1. Simpulan	56
6.2. Saran.....	57
DAFTAR PUSTAKA	58
LAMPIRAN.....	61

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Riwayat Hidup Penulis	61
---	----

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, N. M. (2013). Some Properties On Orlicz Sequence Spaces. *Journal of Babylon University/Pure and Applied Sciences*, 21, 2340-2345.
- Albuquerque, N., Araujo, G., Pellegrino, D., & Seoane-Sepúlveda, J. B. (2017). Hölder's Inequality: Some Recent and Unexpected Applications. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 24(2), 199-225.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Urbana: John Wiley & Sons, Inc.
- Cheung, W.-S. (2000). Generalization of Hölder's Inequality. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 7-10.
- Driver, K. B. (2003). *Analysis Tools with Applications*. Springer.
- Fatimah, S., Masta, A. A., Ifronika, Wafiqoh, R., & Agustine, P. C. (t.t.). A sufficient condition for generalized Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces. (*Draft*).
- Gunawan, H., Kikianty, E., & Schwanke, C. (2017). Discrete Morrey Spaces and Their Inclusion Properties. *Mathematische Nachrichten*, 291(8-9), 1-14.
- Hudzik, H., & Maligranda, L. (2011). Anemiya norm equals Orlicz norm in general. *Indagationes Mathematicae*, 11(4), 573-585.
- Ifronika, Masta, A. A., Nur, M., & Gunawan, H. (2018). Generalized hölder's inequality in Orlicz spaces. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 22(1), 25-34.
- Kamthan, P. K., & Gupta, M. (1981). *Sequence Spaces and Series*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Khusnussa'adah, N., & Supama. (2019). Completeness of Sequence Spaces Generated by an Orlicz Function. *Jurnal Eksakta: Jurnal Ilmu-ilmu MIPA*, 19(1), 1-14.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Canada: John Wiley & Sons Inc.
- Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (1977). *Function Spaces*. Czechoslovakia: Noordhoff International Publishing.
- Léonard, C. (2007). *Orlicz Spaces*. Retrieved Januari 8, 2020, from <http://leonard.perso.math.cnrs.fr/papers/Leonard-Orlicz%20spaces.pdf>

- Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1971). On Orlicz Sequence Spaces I. *Israel Journal of Mathematics*, 10, 379-390.
- Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). *Classical Banach Spaces I and II*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Luxemburg, W. A. (1955). *Banach Function Spaces*. Thesis: Technische Hogeschool te Delft.
- Maddox, I. J. (1970). *Elements of Functional Analysis* (1st ed.). Cambridge: The University Press.
- Maligranda, L. (1989). *Orlicz Spaces and Interpolation*. Departamento de Matemática: Universidade Estadual de Campinas.
- Maligranda, L. (1998). Why Hölder's Inequality Should Be Called Rogers' Inequality. *Mathematical & Inequalities Applications*, 1, 69-83.
- Maligranda, L., & Mastyló, M. (2000). Inclusion Mappings between Orlicz Sequence Spaces. *Journal of Functional Analysis* 176, 264-279.
- Masta, A. A. (2018). *Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz-Morrey*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2016). Inclusion property of Orlicz and weak Orlicz spaces. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 48-3, 193-203.
- Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2017). An inclusion property of Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Physics: Conference Series*, 893.
- Nakano, H. (1951). *Topology and Linear Topological Spaces*. Tokyo: Maruzen Company.
- O'Neil, R. (1965). Fractional Integration in Orlicz Spaces. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115, 300-328.
- Orlicz, W. (1992). *Linear Functional Analysis (Series in Real Analysis Volume 4)*. Singapore: World Scientific.
- Rao, M., & Ren, Z. (1991). *Theory of Orlicz spaces*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). *Convex Functions*. New York and London: Academic Press, Inc.

- Royden, H. I., & Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis* (4th ed.). New York: Prentice Hall.
- Sawano, Y. (2003). *A Handbook of Harmonic Analysis*. Retrieved Mei 19, 2020, from <http://www.comp.tmu.ac.jp/yoshihiro/teaching/harmonic-analysis/harmonicanalysis->
- Taqiyuddin, M., & Masta, A. A. (2018). Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Functions. *IOP Conference Series: Materials Science and and Engineering*.
- Welland, R. (1966). Inclusion relations among Orlicz spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(135).
- Zhao, C.-J., & Cheung, W. S. (2016). Hölder's Reverse Inequality and Its Applications. *Publications de l'Institut Mathématique*, 99(113), 211-216.