# BAB III
# METODE BINOMIAL DIPERCEPAT

## 3.1 Deskripsi Umum

Metode Binomial dipercepat merupakan pengembangan dari metode Binomial CRR. Metode Binomial dipercepat dikembangkan oleh T.R Klassen yang merupakan perbaikan dari Hull dan White yaitu metode Binomial CRR. Pada metode Binomial CRR, semakin banyak partisi waktu $(N)$ pada waktu $[0, T]$ maka harga opsi yang dihasilkannya pun akan mendekati model kontinu *Black-Scholes* (Seydel, R.U., 2008:20). Makin banyak partisi waktu maka makin banyak pula proses perhitungan harga opsi $V_{ji}$. Setiap $N$ yang berubah pada metode Binomial CRR mengakibatkan keadaan $K$ selalu berubah terhadap node pada waktu jatuh tempo. Ini menyebabkan terjadinya osilasi (naik turun) harga opsi terhadap $N$, sehingga kekonvergenan terhadap *Black-Scholes* sangat lambat (Klassen, 2001).

Untuk mempercepat kekonvergenan harga opsi metode Binomial CRR ke harga opsi metode *Black-Scholes* dilakukan dengan cara ekstrapolasi Richardson yaitu mengeliminasi faktor koreksi $\frac{1}{N}$ yang semakin membesar pada setiap pergerakan $N$. Sebelum menggunakan ekstrapolasi Richardson, terlebih dahulu dilakukan pemulusan (*smooth*) kurva yang biasa disebut *Middle of Tree* (MOT) (Klassen, 2001).

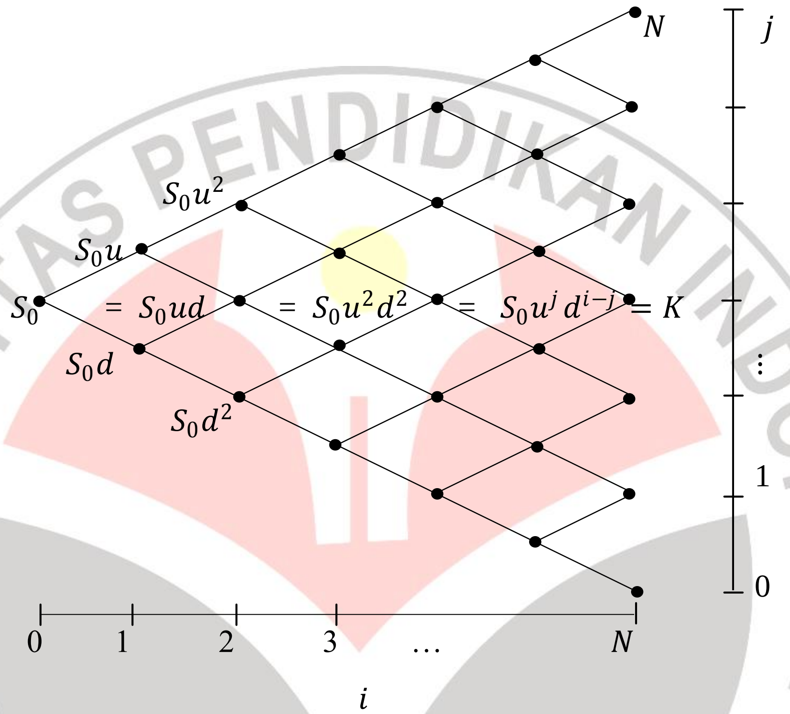
## 3.2 *Middle of Tree* (MOT)

*Middle of Tree* (MOT) adalah pemulusan kurva dengan meletakkan harga $K$ di tengah pohon Binomial pada saat waktu jatuh tempo sehingga harga $K$ selalu tetap terhadap node setiap nilai $N$ yang berubah. Untuk menghilangkan osilasi pada harga opsi Eropa menggunakan metode Binomial CRR, partisi waktu dipisahkan menjadi $N$ ganjil dan $N$ genap (Klassen, 2001).

Harga $K$ selalu terletak di tengah pohon Binomial pada saat waktu jatuh tempo dengan cara mengubah parameter $u$ dan $d$. Oleh karena harga $K$ harus terletak di tengah pohon Binomial pada saat waktu jatuh tempo, maka (Amami, 2013)

$$S_0ud = S_0u^2d^2 = S_0u^3d^3 = \cdots = S_0u^j\,d^{i-j} = K$$

dengan $i = 1,2,\ldots,N$; $j = 0,1,2,\ldots,i$ yang diilustrasikan pada gambar 3.1




Gambar 3.1
Pohon Binomial dengan $\boldsymbol{K}$ di Tengah Pohon Binomial

Karena pada saat waktu jatuh tempo, harga $K$ harus terletak di tengah node-node pohon Binomial, sehingga akibatnya

$$S_0(ud)^{\frac{N}{2}} = K \tag{3.1}$$

Pada metode Binomial CRR, harga saham akan naik atau turun bergantung pada parameter $u$ dan $d$ sesuai dengan rumus (2.49), yaitu

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Sedangkan parameter $u$ dan $d$ pada metode Binomial dipercepat diubah dengan menambahkan variabel $C_1$ dan $C_2$ pada eksponensial parameter $u$ dan $d$. Penambahan variabel $C_1$ dan $C_2$ membuat node harga saham akan bergerak sehingga keadaan $K$ selalu berada di tengah-tengah jumlah node pohon binomial pada saat waktu jatuh tempo sehingga didapatkan parameter $u$ dan $d$ sebagai berikut:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}+C_1} \qquad\qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}+C_2} \tag{3.2}$$

Substitusi persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1) sehingga diperoleh

$$S_0\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}+C_1}.\, e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}+C_2}\right)^{\frac{N}{2}} = K$$

$$\Leftrightarrow S_0\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}+C_1-\sigma\sqrt{\Delta t}+C_2}\right)^{\frac{N}{2}} = K$$

$$\Leftrightarrow S_0(e^{C_1+C_2})^{\frac{N}{2}} = K$$

$$\Leftrightarrow e^{(C_1+C_2)\frac{N}{2}} = \frac{K}{S_0}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[e^{(C_1+C_2)\frac{N}{2}}\right] = \ln\frac{K}{S_0}$$

$$\Leftrightarrow (C_1+C_2)\frac{N}{2} = \ln\frac{K}{S_0}$$

$$\Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{2\ln\left({}^{K}/{}_{S_0}\right)}{N}$$

Dari persamaan di atas lakukan pemilihan $C_1$ dan $C_2$ sebagai berikut:

$$C_1 = C_2 = \frac{\ln\left({}^{K}/{}_{S_0}\right)}{N} \tag{3.3}$$

Substitusi persamaan (3.3) ke dalam persamaan (3.2) sehingga parameter $u$ dan $d$ pada metode Binomial dipercepat adalah sebagai berikut:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{\ln\left({}^{K}/{}_{S_0}\right)}{N}} \qquad\qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{\ln\left({}^{K}/{}_{S_0}\right)}{N}} \tag{3.4}$$

Dari persamaan di atas, maka untuk $N$ genap, harga $K$ tepat berada pada tengah node pohon Binomial, sedangkan untuk N ganjil, harga $K$ berada di tengah antara dua node.

Pemulusan kurva dengan metode MOT ini digunakan untuk menghilangkan osilasi pada metode Binomial CRR.

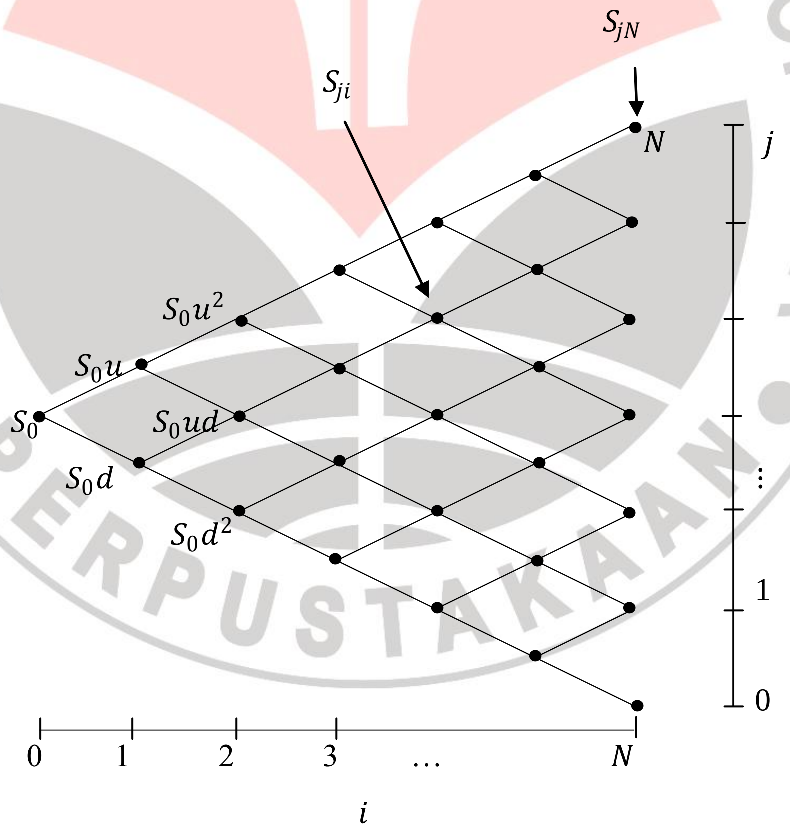
## 3.3 Perhitungan Harga Saham

$S_{ji}$ adalah harga saham pada partisi waktu ke-$i$ dan kenaikan ke-$j$ dengan $i = 1,2, . . , N$ dan $j = 0,1, \ldots, i$. Harga saham diskrit $S_{ji}$ untuk setiap $t_i$ sampai $t_N = T$ dapat dihitung setelah parameter $u$ dan $d$ diketahui. Harga saham awal yang digunakan untuk perhitungan $S_{ji}$ adalah harga saham pada waktu $t_0 = 0$ $(S_0)$. Agar bersesuaian seperti notasi matriks, harga saham awal dinotasikan dengan $S_{00}$. Untuk menghitung kemungkinan nilai harga saham $S_{ji}$, kita menggunakan rumus

$$S_{ji} = S_0 u^j d^{i-j} \tag{3.5}$$

dengan $i = 1,2, \ldots, N$ dan $j = 0,1, \ldots, i$.

Proses perhitungan harga saham dilustrasikan pada gambar 3.2




Gambar 3.2
Pohon Binomial dengan $\boldsymbol{N}$ Partisi

### 3.4 Penentuan Harga Opsi Eropa

Nilai *payoff* pada waktu $T$, yang dinotasikan $V_{jN}$ didapat dari persamaan (2.2) dan (2.3) yang didefinisikan sebagai berikut:

a. Opsi *Call*

$$C_{jN} = maks\{S_{jN} - K, 0\} \qquad j = 0,1,\dots,N \tag{3.6}$$

b. Opsi *Put*

$$P_{jN} = maks\{K - S_{jN}, 0\} \qquad j = 0,1,\dots,N \tag{3.7}$$

Dimulai dari $V_{jN}$, harga opsi $V$ pada setiap waktu $t_i$ diperoleh dengan bekerja secara mundur dari waktu $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots$ agar mendapatkan harga opsi pada waktu $t_0$, dinotasikan $V_{00}$. Berdasarkan asumsi 3 pada metode Binomial berlaku bahwa

$$E(S_{ji+1}) = S_{ji}\,.\,e^{r.\Delta t} \tag{3.8}$$

Ekspektasi pada model diskrit adalah $E(X) = \sum_x x.f(x)$ sehingga ekspektasi pada model harga saham diskrit adalah

$$E(S_{ji+1}) = pS_{ji}\,u + (1-p)S_{ji}\,d$$

Sehingga persamaan (3.8) menjadi

$$pS_{ji}\,u + (1-p)S_{ji}\,d = S_{ji}\,e^{r.\Delta t}$$

Notasi $S_{ji}\,u$ artinya harga saham akan naik pada partisi waktu ke-$(i+1)$ dan kenaikan ke-$(j+1)$. Sedangkan $S_{ji}\,d$ artinya harga saham akan turun pada partisi waktu ke-$(i+1)$ dan kenaikan ke-$j$ sehingga

$$pS_{j+1,i+1} + (1-p)S_{j,i+1} = S_{ji}\,e^{r.\Delta t}$$

Asumsi 3 pada metode Binomial juga berlaku untuk harga opsi karena harga opsi bergantung pada harga saham sehingga

$$E(V_{i+1}) = V_i.\,e^{r.\Delta t}$$

atau

$$E(V_{ji+1}) = V_{ji}\,.\,e^{r.\Delta t} \tag{3.9}$$

Ekspektasi pada model diskrit adalah $E(X) = \sum_x x.f(x)$ sehingga ekspektasi pada model harga opsi diskrit adalah

$$E(V_{ji+1}) = pV_{ji}\,u + (1-p)V_{ji}\,d$$

Akibatnya persamaan (3.9) menjadi

$$pV_{ji}\,u + (1-p)V_{ji}\,d = V_{ji}\,e^{r.\Delta t}$$

Notasi $V_{ji}\,u$ artinya harga opsi $V$ pada partisi waktu ke-$i$ dan kenaikan ke-$j$ akan naik pada partisi waktu ke-$(i+1)$ dan kenaikan ke-$(j+1)$. Sedangkan $V_{ji}\,d$ artinya harga opsi $V$ pada partisi waktu ke-$i$ dan kenaikan ke-$j$ akan turun pada partisi waktu ke-$(i+1)$ dan kenaikan ke-$j$ sehingga diperoleh

$$pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1} = V_{ji}\,e^{r.\Delta t}$$

atau

$$V_{ji} = e^{-r.\Delta t}\left(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}\right) \tag{3.10}$$

dengan $j = 0,1,\dots,i$ dan $i = N-1,\dots,0$

Rumus harga opsi (3.10) dapat digunakan untuk opsi *call* Eropa maupun opsi *put* Eropa sebagai berikut:

a. Untuk opsi *call* Eropa

$$C_{ji} = e^{-r.\Delta t}\left(pC_{j+1,i+1} + (1-p)C_{j,i+1}\right) \tag{3.11}$$

dengan $j = 0,1,\dots,i$ dan $i = N-1,\dots,0$

b. Untuk opsi *put* Eropa

$$P_{ji} = e^{-r.\Delta t}\left(pP_{j+1,i+1} + (1-p)P_{j,i+1}\right) \tag{3.12}$$

dengan $j = 0,1,\dots,i$ dan $i = N-1,\dots,0$

Jadi, $V_{00}$ yaitu harga opsi pada waktu $t_0$ didapat dengan $V_{jN}$ akan bekerja secara mundur dengan menggunakan rumus (3.11) untuk menghitung opsi *call* Eropa dan rumus (3.12) untuk menghitung opsi *put* Eropa.

## 3.5 Ekstrapolasi Richardson

Aproksimasi harga opsi *Black-Scholes* memiliki bentuk *error* dengan bentuk prediksi yaitu fungsi polinomial, yang bergantung pada sebuah parameter yaitu interval waktu $(\Delta t)$. Untuk setiap interval waktu $\Delta t > 0$, rumus $V(\Delta t)$ yang merupakan aproksimasi harga opsi *Black-Scholes*, yang dinotasikan $V_{BS}$ dan *truncation error* dari aproksimasi ini adalah

$$V_{BS} - V(\Delta t) = k_1.\Delta t + k_2(\Delta t)^2 + k_3(\Delta t)^3 + \cdots \tag{3.13}$$

atau

$$V_{BS} = V(\Delta t) + k_1.\Delta t + k_2(\Delta t)^2 + k_3(\Delta t)^3 + \cdots \tag{3.14}$$

dengan $k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots$ adalah konstanta.

Tujuan dari ekstrapolasi adalah menghasilkan rumus *truncation error* dengan orde lebih tinggi. Berdasarkan metode ektrapolasi Richardson pada bab II, didapat aproksimasi $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ untuk $V_{BS}$ dengan menghilangkan suku $\Delta t = \frac{T}{N}$ yaitu faktor koreksi $\frac{1}{N}$ yaitu:

$$V_{BS} = V_2(\Delta t) - \frac{k_2}{2}(\Delta t)^2 - \frac{3k_3}{4}(\Delta t)^3 - \cdots \tag{3.15}$$

Definisikan $V_1(\Delta t) \equiv V(\Delta t)$, sehingga

$$V_2(\Delta t) = V\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \left[V\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - V(\Delta t)\right] \tag{3.16}$$

Aproksimasi $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ untuk $V_{BS}$ dengan menghilangkan suku $(\Delta t)^2 = \frac{T^2}{N^2}$ yaitu faktor koreksi $\frac{1}{N^2}$, yaitu:

$$V_{BS} = V_3\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{k_3}{8}(\Delta t)^3 + \cdots \tag{3.17}$$

Definisikan

$$V_3(\Delta t) = V_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{V_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - V_2(\Delta t)}{3} \tag{3.18}$$

Untuk suatu $m$, $V_{BS}$ dapat dirumuskan sebagai

$$V_{BS} = V(\Delta t) + \sum_{j=1}^{m-1} k_j (\Delta t)^j + \mathcal{O}(\Delta t^m) \tag{3.19}$$

dengan $j = 2,3, \ldots, m$. Aproksimasi $\mathcal{O}\left(\Delta t^j\right)$ dapat dirumuskan sebagai

$$V_j(\Delta t) = V_{j-1}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{V_{j-1}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - V_{j-1}(\Delta t)}{2^{j-1} - 1} \tag{3.20}$$

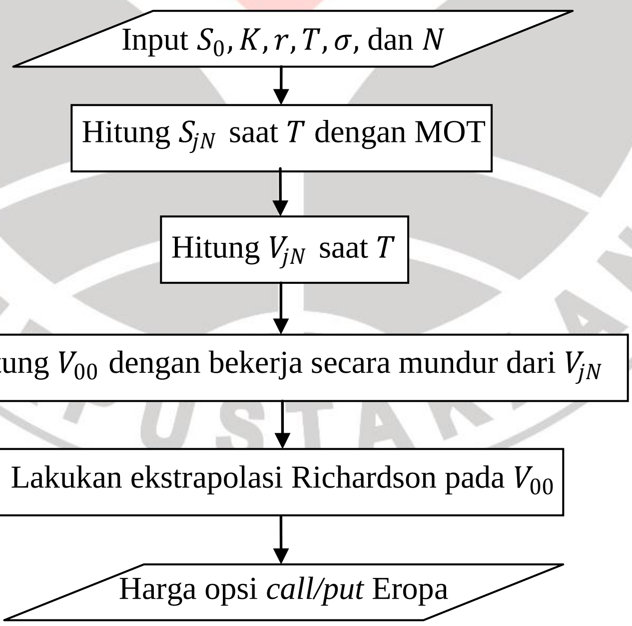
Tabel 3.1 menunjukkan urutan perhitungan aproksimasi harga opsi (angka menunjukkan urutan) dengan $m = 6$. Harga opsi pada kolom pertama didapatkan dengan melakukan perhitungan kembali $S_{jN}$, $V_{jN}$, dan $V_{00}$ sesuai dengan interval waktunya. Sedangkan harga opsi kolom kedua hingga kolom keenam didapatkan dengan menggunakan persamaan (3.20).

Tabel 3.1
Perhitungan Nilai Aproksimasi $\boldsymbol{V_{BS}}$

| $\mathcal{O}(\Delta t)$ | $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ | $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ | $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ | $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ | $\mathcal{O}(\Delta t^6)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V_1(\Delta t) \equiv V(\Delta t)$ | | | | | |
| $V_1\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \equiv V\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ | $V_2(\Delta t)$ | | | | |
| $V_1\left(\frac{\Delta t}{4}\right) \equiv V\left(\frac{\Delta t}{4}\right)$ | $V_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ | $V_3(\Delta t)$ | | | |
| $V_1\left(\frac{\Delta t}{8}\right) \equiv V\left(\frac{\Delta t}{8}\right)$ | $V_2\left(\frac{\Delta t}{4}\right)$ | $V_3\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ | $V_4(\Delta t)$ | | |
| $V_1\left(\frac{\Delta t}{16}\right) \equiv V\left(\frac{\Delta t}{16}\right)$ | $V_2\left(\frac{\Delta t}{8}\right)$ | $V_3\left(\frac{\Delta t}{4}\right)$ | $V_4\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ | $V_5(\Delta t)$ | |
| $V_1\left(\frac{\Delta t}{32}\right) \equiv V\left(\frac{\Delta t}{32}\right)$ | $V_2\left(\frac{\Delta t}{16}\right)$ | $V_3\left(\frac{\Delta t}{8}\right)$ | $V_4\left(\frac{\Delta t}{4}\right)$ | $V_5\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ | $V_6(\Delta t)$ |

## 3.6 Algoritma Penentuan Harga Opsi Eropa menggunakan Metode Binomial Dipercepat

Penentuan harga opsi Eropa, dimulai dengan memasukan parameter $S_0, K, r, T, \sigma,$ dan $N$. Adapun langkah-langkah menentukan harga opsi Eropa menggunakan metode Binomial dipercepat dapat dilihat pada gambar 3.3




Gambar 3.3
Algoritma Harga Opsi Eropa dengan Metode Binomial Dipercepat