BAB III

PENERAPAN TEKNIK *COLUMN GENERATION* PADA PENYELESAIAN MASALAH *CUTTING STOCK* DENGAN PENGELASAN

Bab ini membahas masalah *Cutting Stock* dengan Pengelasan, model *Cutting stock* dengan pengelasan, dan langkah kerja teknik *Column Generation* dalam menyelesaikan masalah Cutting Stock dengan Pengelasan.

3.1 Masalah Cutting Stock dengan Pengelasan

Penelitian ini membahas tentang bagaimana menyelesaikan masalah *cutting stock* dengan pengelasan. Masalah tersebut dapat digambarkan sebagai berikut. Terdapat bahan baku dengan ukuran L dan n jenis permintaan dengan panjang l_i, masing-masing diminta sebanyak d_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Selanjutnya, permintaan disebut sebagai final. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan banyaknya bahan baku minimum yang digunakan untuk memenuhi semua permintaan. Pemenuhan permintaan dapat dilakukan dengan cara memotong bahan baku atau mengelas beberapa bahan baku kemudian memotongnya sesuai dengan permintaan. Adapun asumsi-asumsi yang diambil adalah sebagai berikut:

1. Hanya terdapat satu ukuran bahan baku.
2. Bahan baku yang tersedia cukup untuk memenuhi permintaan.
3. Banyaknya pengelasan tidak melebihi banyaknya seluruh bahan baku yang tersedia.

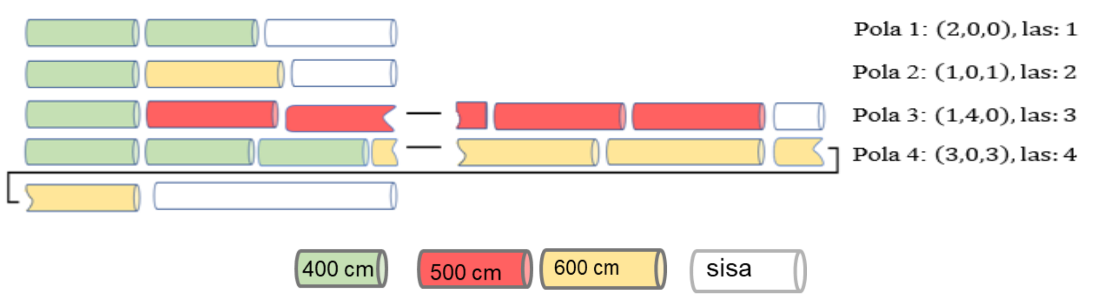
Dalam penelitian ini, masalah *cutting stock* dengan pengelasan akan diselesaikan melalui pembangunan model optimisasi untuk menentukan pola pemotongan dan pola pengelasan yang optimal agar banyaknya bahan baku yang dibutuhkan untuk memenuhi semua permintaan adalah sesedikit mungkin. Model optimisasi akan dibangun menggunakan pendekatan *column generation*. Dengan demikian, terdapat tiga jenis model optimisasi yang harus dikontruksi, yaitu model

master yang berupa model program linear dari masalah *cutting stock* dengan pengelasan, model *integer programming* yang digunakan untuk membangkitkan
sebuah pola pemotongan dan pola pengelasan, dan model *integer programming* tambahan untuk memenuhi sisa permintaan yang diakibatkan pembulatan ke bawah solusi optimal teknik *column generation*.

3.2 Representasi Pola Pemotongan dan Pola Pengelasan

Sebelum membangun model optimisasi masalah *cutting stock* dengan pengelasan, terlebih dahulu didefinisikan pola pemotongan dan pola pengelasan yang akan digunakan dalam model. Dalam penelitian ini pola pemotongan dan pengelasan direpresentasikan dalam matriks A yang berukuran $m \times n$, dimana m menyatakan banyaknya permintaan dan n menyatakan banyaknya pola pemotongan dengan pengelasan. Pengelasan dalam pola direpresentasikan dalam matriks W yang berukuran $1 \times n$, dimana n berasosiasi dengan kolom pada matriks A. Matriks W memuat banyaknya pengelasan pada pola n. Untuk memperjelas pendefinisian pola pemotongan dan pola pengelasan.

Berikut adalah contoh masalah pemotongan bahan baku. Misalkan terdapat bahan baku berukuran 1300 cm dengan permintaan final berukuran 400 cm, 500 cm, dan 600 cm. Misalkan konsumen meminta setiap final masing-masing sebanyak 7, 4, dan 4. Beberapa contoh pola pemotongan digambarkan pada Gambar 3.1 dimana terdapat pengelasan pada pola ke-2 dan ke-3.



Gambar 3. 1 Empat Pola pemotongan dengan pengelasan

Misalkan bahan baku dipotong menjadi 2 final berukuran 400, maka terdapat sisa sebanyak 500 cm. Pola pemotongan tanpa pengelasan lainnya adalah bahan baku dipotong menjadi 1 final berukuran 400 dan 1 final berukuran 600 cm. Contoh pola pemotongan lain adalah dengan mengelas 2 buah bahan baku kemudian memotongannya menjadi sebuah final berukuran 400 cm dan 4 buah final berukuran 500 cm. Pola pemotongan lainnya adalah dengan mengelas 3 buah bahan baku kemudian pemotongannya menjadi 3 final berukuran 400 cm dan 3 final berukuran 600 cm. Empat pola pemotongan tersebut direpresentasikan sebagai matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dengan

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pola pemotongan dan pengelasan contoh di atas belum merupakan pola pemotongan dan pengelasan yang mungkin. Pada kenyataannya, banyaknya pola pemotongan dan pengelasan dari sejumlah final ada banyak sekali. Oleh karena itu, mencari seluruh pola pemotongan dan pengelasan dari seluruh final yang diminta tidak efisien. Teknik *column generation* diawal prosesnya hanya membutuhkan sebagian kecil pola pemotongan dan pengelasan yang mungkin.

3.3 Model Optimasi Cutting Stock dengan Pengelasan

Penelitian ini menggunakan teknik *column generation* untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* dengan pengelasan. Oleh karena itu, model optimisasi dari masalah tersebut terdiri dari dua model yaitu model master dan submodel pembangkit kolom.

3.3.1 Model Master

Model master merupakan model utama dari teknik *column generation* untuk memperoleh solusi yang optimal. Model tersebut akan dibangun dengan mengadaptasi model master Gilmore dan Gomory (1963) yang dimodifikasi dengan memuat pengelasan. Untuk menurunkan model master terlebih dahulu didefinisikan himpunan dan parameter yang digunakan sebagai berikut:

D : Himpunan final

P : Himpunan pola pemotongan dan pengelasan

a_{ij} : Banyaknya final i pada pola pemotongan j

d_i : Banyaknya permintaan final i

w_j : Banyaknya pengelasan pada pola x_j

Adapun variabel keputusan pada model didefinisikan sebagai berikut:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{pola Pemotongan dan pengelasan } j \text{ terpilih sebagai solusi} \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

Pada permasalah *cutting stock* dengan pengelasan akan dicari banyaknya bahan baku menimum yang dibutuhkan untuk memenuhi permintaan final d_i dengan menentukan pola pemotongan dan pengelasan dari bahan baku. Sebuah pola pemotongan bisa memuat pengelasan atau tidak memuat pengelasan. Oleh karena itu fungsi tujuan dari masalah *cutting stock* dengan pengelasan dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\text{minimum: } \sum_{j \in P} x_j\,(w_j + 1)$$

Kendala dari model master menjamin bahwa semua permintaan final terpenuhi. Kendala ini diekspresikan sebagai berikut:

$$\sum_{j \in P} a_{ij} x_j \geq d_i, \forall\, i \in D.$$

Selengkapnya model master dituliskan dalam model berikut:

Meminumkan: $$\sum_{j \in P} x_j\left(w_j + 1\right),$$

terhadap:

$$\sum_{j \in P} a_{ij} x_j \geq d_i, \forall\, i \in D,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \forall\, j \in P,$$

$$w_j \geq 0, w_j \in Z, \forall\, j \in P.$$

3.3.2 Submodel Pembangkit Kolom

Submodel pembangkit kolom digunakan untuk menghasilkan sebuah pola pemotongan dan perngelasan. Kolom ini diperlukan untuk memperbaiki solusi dari model master. Jika terdapat pola pemotongan dan pengelasan baru yang dapat menurunkan nilai fungsi tujuan dari solusi model master, pola pemotongan dan pengelasan baru ini akan ditambahkan sebagai kolom baru pada matriks (a_{ij}) di model master. Terlebih dahulu akan didefinisikan himpunan dan parameter dari submodel pembangkit kolom sebagai barikut:

K : Banyaknya bahan baku minimum untuk memproduksi final

l_i : Panjang final *i*

π : Biaya pengelasan

λ_i : *Shadow price*

L : Panjang bahan baku

Adapun variabel keputusan pada submodel didefinisikan sebagai berikut:

y_i = Banyaknya final jenis *i* pada suatu pola pemotongan

w = Banyaknya pengelasan dalam sebuah pola pemotongan

K adalah konstanta dalam submodel pembangkit kolom. K merepresentasikan banyaknya bahan baku minimum untuk memproduksi final. Banyaknya bahan baku minimum yang dibutuhkan adalah akumulasi panjang dari setiap final yang dimuat pada bahan baku yang disusun sesedikit mungkin. Jadi, K=$\left\lceil\frac{\sum_{i\in D} l_i d_i}{L}\right\rceil$.

Teknik *column generation* dikenal oleh Gilmore dan Gomory (1961), untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* satu dimensi. Teknik ini didasari oleh metode simpleks yang direvisi, dimana kita dapat menentukan solusi fisibel basis dari $(n+m)\times(n+m)$ submatriks dari matriks koefisien yang nonsingular. Submatriks ini disebut matriks basis, dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{B}$. Untuk mencari matriks $\boldsymbol{B}$ dari model master, kita cukup mencari $(n\times n)$ submatriks yang merepresentasikan *n* buah pola pemotongan dan pengelasan yang berbeda untuk setiap bahan baku. Submatriks $(n\times n)$ ini dinotasikan $\boldsymbol{D}$. Pola pemotongan dan pola pengelasan ini bisa diawali dengan memilih sebuah matriks diagonal orde n dimana setiap entri dari diagonal ke-i berisikan jumlah final *i* maksimum yang mungkin ditempatkan pada sebuah bahan baku. $m\times(n\times m)$ submatriks sisanya adalah matriks yang setipa entrinya bernilai 1. Setelah menentukan matriks $\boldsymbol{B}$, solusi fisibel diperoleh dari relasi $x_B = B^{-1}b$, dimana $b = n_i$.

Untuk menentukan apakah solusi yang diperoleh optimal atau tidak, sebuah kolom y=$(y_1,\ldots,y_n)^T$ dibangkitkan. Misal π adalah *shadow price* dalam pengelasan dari matriks $\mathbf{cP}^{-1}$ dengan **c** adalah matriks baris berdimensi m yang entriknya adalah banyaknya pengelasan setiap pola pemotongan dengan pengelasan. **P** adalah matriks diagonal berode m yang semua entrinya bernilai 1. *Reduced cost* yang berasosiasi dengan basis $\boldsymbol{B}$ untuk setipa bahan baku adalah

$$(w+1)-\sum_{i\in D}\lambda_i y_i - \pi w$$

Shadow price λ dengan elemen $\lambda_i,\ i = 1,2,\dots,n$ adalah $\lambda = 1_m D^{-1}$ adalah *shadow price* yang berasosiasi dengan masing-masing final i, dimana 1_m adalah matriks baris berdimensi m yang semua entriknya bernilai 1. Kondisi optimal tercapai jika minimum *reduced cost* bernilai non negative. Jika *reduced cost* bernilai negative, kolom baru *y* akan masuk sebagai basis. Kolom baru akan terus dibangkitkan selama kondisi optimal model master belum tercapai.

Solusi optimal akan menghasilkan pola pemotongan dan pengelasan yang fisibel dengan nilai *reduced cost* yang berasosiasi dengan x_B untuk setiap bahan baku minimum. Dengan kata lain, *reduced cost* $\sum_{i\in D}\frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1}$ akan menjadi fungsi objktif. Pada submodel pembangkit kolom dicari pola potong dan pengelasan yang akan menjadi pola baru pada model master, yaitu:

$$\textbf{maksimum}: \sum_{i\in D}\frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1}$$

Adapun kendala-kendala dari model *cutting stock* dengan pengelasan adalah sebagai berikut:

1. Total panjang seluruh yang dimuat oleh sebuah pola yang merepresentasikan kolom baru tidak boleh melebihi panjang bahan baku atau bahan baku hasil pengelasan. Kendala ini diekpresikan sebagai berikut:

$$\sum_{i\in D} l_i y_i \leq L + wL$$

2. Dalam membangkitkan sebuah kolom yang merepresentasikan sebuah pola pemotongan dan pengelasan, pengelasan bertujuan untuk menghubungkan dua bahan baku atau lebih. Oleh karena itu, banyaknya pengelasan tidak mungkin lebih banyak dari bahan baku yang tersedia untuk membuat sebuah pola pemotongan dan pengelasan. Kendala ini diekspresikan sebagai berikut.

$$w \leq K - 1$$

Selengkapnya submodel pembangkit kolom dituliskan dalam model berikut:

Maksimumkan:

$$\sum_{i\in D}\frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1}$$

Terhadap:

$$\sum_{i\in D} l_i y_i \leq L + wL$$

$$w \leq K - 1, \qquad \forall i \in D$$

$$y_i \geq 0, y_i \in Z, \;\; \forall i \in D$$

Pada subbab selanjutnya akan dibahas cara kerja keseluruhan dari teknik *column generation*.

3.3.3 Cara Kerja teknik Column Generation dalam Menyelesaikan Masalah Cutting Stock dengan Pengelasan

Model *cutting stock* dengan pengelasan diselesaikan dengan mengadaptasi teknik *column generation* pada model *cutting stock* dalam penelitian (Bisschop, 2006) yang telah dimodifikasi dengan memuat pengelasan, yaitu menggunakan teknik *column generation*. Misalkan P adalah himpunan kolom dari model master.

Langkah awal dalam menyelesaikan model master adalah dengan membentuk *Restriced Master Problem* (RMP) yaitu model master yang hanya menggunakan subhimpunan $P' \subset P$, dimana P adalah himpunan semua pola pemotongan dengan pengelasan yang fisibel. Salah satu cara dalam membentuk RMP adalah dengan memilih secara acak kolom yang mengoptimalkan fungsi objektif. Sehingga didapat RMP untuk masalah ini. Berikut adalah model RMP:

Meminumkan: $$\sum_{j \in P'} x_j \left(w_j + 1\right),$$

terhadap:

$$\sum_{j \in P} a_{ij} x_j \geq d_i, \forall\, i \in D,$$

$$x_j \in \{0,1\}\,, \forall\, j \in P',$$

$$w_j \geq 0, w_j \in \mathbb{Z}, \forall\, j \in P'.$$

Salah satu cara menentukan P' adalah dengan memuatkan setiap pola pemotongan untuk setiap ukuran final. Setiap pola tidak memuat pengelasan. Masing-masing pola terdiri dari jumlah panjang maksimum setiap final yang mungkin dapat dipotong dari setiap bahan baku.Misalkan P' adalah matriks diagonal, dimana nilai selain diagonalnya bernilai nol. Diagonalnya matriks P' adalah jumlah setiap final pada sebuah pola pemotongan. Misalkan Bahan baku memiliki panjang 1000 cm dengan panjang setiap final adalah 300 cm,400 cm, 500 cm, 600 cm. Bahan baku dipotong menjadi 3 final berukuran 300 cm. Pola lainnya adalah memotong bahan baku menjadi 2 final berukuran 400 cm. Pada pola lainnya adalah bahan baku dipotong menjadi 2 final berukuran 500 cm. Pola terakhir adalah dengan memotong bahan baku menjadi 1 final berukuran 600 cm. Pola pemotongan fisibel direpresentasikan sebagai berikut:

$$P' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prosedur dalam *column generation* bersifat iteratif, dimana setiap iterasi terdiri dari:

a. Optimisasi *Restriced Master Problem* (RMP) untuk menentukan nilai optimal terkini dari fungsi objektif model diatas dan pengali dua y. RMP adalah model master yang dibatasi pada subhimpunan kolom yang ada.

b. Optimisasi submodel pembangkit kolom, yaitu mencar, jika masih ada suatu kolom $j \in P$ dengan *reduced cost*; $1 - \sum_{i \in D} \frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1} < 0$.

Algoritma *column generation* untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* dengan pengelasan adalah sebagai berikut:

1. Dekomposisikan masalah menjadi 2 bagian, yaitu
   a. Model master
   b. Submodel pembangkit kolom
2. Bentuk RMP, yaitu model master pada P'.
3. Selesaikan RMP sehingga diperoleh solusi optimal terkini dari RMP dan variabel dual yang bersuaian.
4. Bentuk submodel pembangkit kolom menggunakan *shadow price* λ dari langkah 3.
5. Selesaikan submodel pembangkit kolom. Jika $reduced\ cost$ setiap variabel nonbasis yaitu $1 - \sum_{i \in D} \frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1} \geq 0$, maka diperoleh solusi optimal RMP yang juga merupakan solusi optimal bagi model master. Jika *reduced cost* : $1 - \sum_{i \in D} \frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1} < 0$, maka tambahakan kolom baru ke RMP dari submodel pembangkit kolom dan selesaikan model RMP yang baru tersebut.
6. Ulangi langkah 3 hingga diperoleh kondisi optimal.

3.3.4 Mixed Integer Programming (MIP) untuk Memenuhi Kekurangan Permintaan

Masalah *cutting stock* dengan pengelasan yang sudah diselesaikan dengan teknik *column generation* memperoleh solusi optimal berupa bilangan yang tidak bulat. Untuk memperoleh solusi bilangan bulat Novianingsih, dkk. (2007) memperkenalkan model *Mixed Integer Programming* (MIP). Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa sisa final dipenuhi hanya melalui pemotongan bahan baku tanpa pengelasan. Untuk memenurunkan model master terlebih dahulu didefinisikan himpunan dan parameter yang digunakan sebagai berikut.

F : Himpunan final yang belum terpenuhi

T : Himpunan bahan baku tambahan

K : Himpunan pola pemotongan

Adapun variabel keputusan pada model didefinisikan sebagai berikut:

x_{ik} = banyaknya final i pada pola pemotongan k

T_t^k= sisa pemotongan dari bahan baku t dengan pola pemotongan k

Banyak bahan baku yang digunakan untuk menjadi pola potong dalam memehuni final yang belum diproduksi pada teknik *column generation* ditentukan sebelum model MIP dilaksanakan. Menentukan banyaknya bahan baku awal sebagai konstanta dalam model adalah dengan cara mengakumulasikan banyaknya panjang final yang belum diproduksi dibagi panjang bahan baku.

Misalkan F himpunan final yang belum terpenuhi. Banyaknya bahan baku yang akan memehuni permintaan adalah sebagai berikut:

$$min_{ekstra} = \left\lceil \frac{\sum_{i \in F} l_i d_i}{L} \right\rceil$$

Banyaknya bahan baku tambahan dinotasikan $card(T) = min_{ekstra}$, yang merupakan hasil pembulatan keatas. Setiap bahan baku tambahan dinotasikan t. Dalam meminimumkan sisa pemotongan terdapat kemungkinan memuat sisa atau tidak memuat sisa.

$$minimum: \sum_{t \in T} (ord(t) - card(T) - 1)\, T_t^k$$

Kendala untuk fungsi tujuan MIP adalah sebagai berikut. Dalam sebuah pemotongan bisa memuat sisa atau tidak memuat sisa. Final yang termuat dalam sebuah pola pemotongan tidak selalu memiliki jumlah panjang yang sama dengan panjang bahan baku. Pola potong dengan sisa pada pola potong pastilah memiliki panjang yang sama dengan bahan baku. Kendala ini diekspresikan sebagai berikut:

$$\sum_{i \in F} l_i x_{ik} + T_t^k = L \ \ \forall k \in K$$

Selengkapnya *mixed integer programming* dituliskan dalam model berikut:

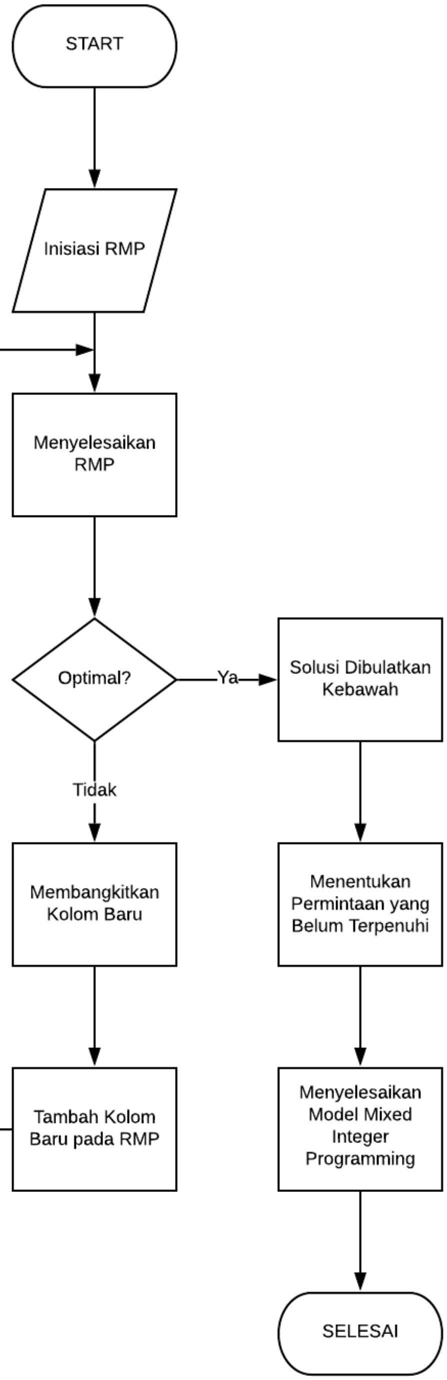
Minimumkan: $$\sum_{t \in T} (ord(t) - card(T) - 1)\, T_t^k$$

Terhadap:

$$\sum_{i \in F} l_i x_{ik} + T_t^k = L \ \ \forall k \in K$$

$$T_t^k \geq 0\,, x_{ik} \geq 0$$

Adapun cara kerja keseluruhan dari teknik *column generation* dalam menyelesaikan masalah *cutting stock* dengan pengelasan digambarkan dalam diagram alir pada Gambar 3.2.



Gambar 3. 2 Flowchart teknik Column Generation