BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Prosedur Penelitian

Adapun prosedur penelitian yang dilakukan yaitu sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah untuk dijadikan topik pembahasan.
2. Melakukan studi literatur yang relevan dengan topik yang dibahas.
3. Menentukan metode penyelesaian yang akan digunakan.
4. Menentukan data yang akan digunakan dan metode pengumpulannya.
5. Mengolah dan mengalisis hasil tinjauan literatur dan data yang diperoleh.
6. Menarik kesimpulan sesuai dengan rumusan masalah.

3.2 Pengumpulan Data

Data yang digunakan adalah data sekunder yang diperoleh dari jurnal yang berjudul "*Alpha Power Pareto Distributions: Its Properties and Applications*" oleh Shumalla Ihthisam, Alamgir Khalil, Sadat Manzoor, Sajjad Ahmad Khan, dan Amjad Ali pada tahun 2019. Data tersebut mengenai waktu bertahan hidup pasien *myelogenous leukaemia* dengan banyak data adalah 33.

3.3 Langkah-langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan pada yaitu sebagai berikut:

1. Studi Literatur

   Studi literatur dilakukan untuk mendeskripsikan karakteristik dari distribusi APT-Pareto seperti fungsi distribusi kumulatif, fungsi kepadatan peluang, fungsi pembangkit momen, mean, variansi, fungsi tambahan seperti fungsi survival dan fungsi hazard, dan pengestimasian parameter.

2. Mengumpulkan Data

Data yang digunakan merupakan data sekunder yang diperoleh dari jurnal yang berjudul "*Alpha Power Pareto Distributions: Its Properties and Applications*" oleh Shumalla Ihthisam, Alamgir Khalil, Sadat Manzoor, Sajjad Ahmad Khan, dan Amjad Ali pada tahun 2019. Data tersebut mengenai waktu bertahan hidup pasien *myelogenous leukaemia* dengan banyak data adalah 33.

3. Uji Statistik Deskriptif

   Dilakukan untuk mengetahui statistik deskriptif dari data waktu bertahan hidup pasien *myelogeous leukemia* dengan bantuan *software minitab 17.*

4. Menentukan Nilai Estimasi Parameter

   Dengan bantuan *software* Rstudio, dapat diperoleh nilai estimasi parameter untuk distribusi Pareto dan distribusi APT-Pareto

5. Uji Kolmogorov Smirnov

   Uji KS dilakukan untuk meguji kecocokan distribusi Pareto dan distribusi APT-Pareto pada data waktu bertahan hidup pasien *myelogeous leukemia* dengan bantuan *microsoft excel*.

6. Memilih Distribusi Terbaik

   Pemilihan distribusi terbaik ditentukan dengan membandingkan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC). Distribusi yang memiliki nilai AIC paling rendah, dipilih menjadi distribusi terbaik.

7. Menarik Kesimpulan

3.4 Distribusi *Alpha Power Transformation* Pareto

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai *Alpha Power Transformation* (APT) atau metode transformasi *alpha power*. Pada bagian ini, akan dibahas mengenai distribusi APT-Pareto yang merupakan pengembangan dari distribusi Pareto dengan penambahan parameter α ke dalamnya.

Berikut merupakan pembahasan mengenai fungsi kepadatan peluang, fungsi distribusi kumulatif, fungsi pembangkit momen, momen, ekspektasi dan varians, fungsi *survival*, fungsi *hazard*, serta pengestimasian parameter dari distribusi APT-Pareto.

3.4.1 Fungsi Distribusi Kumulatif

Misalkan X adalah variabel acak yang berdistribusi APT-Pareto, yang dinotasikan dengan $X \sim APTP(\alpha, \beta)$ maka *F(x)* adalah *cdf* atau fungsi distribusi kumulatif dari distribusi APT-Pareto yang dihasilkan dengan mensubstitusikan persamaan (2.17) dari distribusi Pareto ke dalam persamaan (2.22), yaitu:

$$F_{APTP}(x) = F_{APT}(F(x))$$
$$= \begin{cases} \frac{\alpha^{(1-(x)^{-\beta})} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - x^{-\beta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - x^{-\beta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Sehingga fungsi distribusi kumulatif dari distribusi APT-Pareto dengan dua parameter α, β adalah sebagai berikut:

$$F_{APTP}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1}{\alpha - 1}, \ \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - x^{-\beta}, \ \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.4.2 Fungsi Kepadatan Peluang

Fungsi kepadatan peluang atau *pdf* dari distribusi APT-Pareto dapat diperoleh dengan mendiferensiasikan $F_{APTP}(x)$ satu kali terhadap *x*. Sehingga diperoleh fungsi kepadatan peluang dari distribusi APT-Pareto, yaitu:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Untuk $\alpha > 0, \ \alpha \neq 1$

$$f_{APTP}(x) = \frac{dF_{APTP}(x)}{dx}$$
$$= \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha - 1} (\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1)$$
$$= \frac{1}{\alpha - 1} \frac{d}{dx} (\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1)$$
$$= \frac{1}{\alpha - 1} (\alpha^{1-x^{-\beta}}) log\alpha (x^{-\beta-1}\beta)$$
$$= \frac{\beta log\alpha}{\alpha - 1} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1}$$

- Untuk $\alpha = 1$

$$f_{APTP}(x) = \frac{dF_{APTP}(x)}{dx}$$
$$= \frac{d}{dx}(1 - x^{-\beta})$$
$$= \beta x^{-\beta-1}$$

Sehingga *pdf* atau fungsi kepadatan peluang dari distribusi APT-Pareto adalah:

$$f_{APTP}(x) = \begin{cases} \frac{\beta log\alpha}{\alpha-1}\alpha^{1-x^{-\beta}}x^{-\beta-1}, \ \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ \beta x^{-\beta-1}, \ \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Setelah didapatkan bentuk fungsi kepadatan peluang dari distribusi APT-Pareto, akan dibuktikan bahwa fungsi kepadatan peluang tersebut memenuhi sifat-sifat fungsi kepadatan peluang dari variabel acak kontinu.

1. Akan dibuktikan bahwa $f_{APTP}(x) > 0$ untuk $x > 0$ dan $\alpha, \beta > 0$.

- Untuk $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

  Karena $x, \alpha, \beta > 0$ maka $0 < x^{-\beta} < 1$

  Karena $x, \alpha, \beta > 0$ maka $x^{-\beta-1} > 0$

  Karena $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ dan $0 < x^{-\beta} < 1$, maka $\alpha^{1-x^{-\beta}} > 0$

  1) Kasus ketika $0 < \alpha < 1$

     $\frac{1}{\alpha-1} < -1 < 0$

     $\beta log\alpha < 0$

     Maka $\frac{\beta log\alpha}{\alpha-1} > 0$

  2) Kasus ketika $\alpha > 1$

     $\frac{1}{\alpha-1} > 0$

     $\beta log\alpha > 0$

     Maka $\frac{\beta log\alpha}{\alpha-1} > 0$

  Maka $f_{APTP}(x) = \frac{\beta log\alpha}{\alpha-1}\alpha^{1-x^{-\beta}}x^{-\beta-1} > 0.$

- Untuk $\alpha = 1$

  Karena $x, \alpha, \beta > 0$ maka $x^{-\beta-1} > 0$

Maka $\beta x^{-\beta-1} > 0$.

Sehingga didapatkan bukti bahwa $f_{APTP}(x) > 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\int_0^\infty f_{APTP}(x)\ dx = 1$

- Untuk $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

  $\int_0^\infty f_{APTP}(x)\ dx = \int_0^\infty \frac{\beta log\alpha}{\alpha-1} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1}\, dx$

  Misalkan $u = log\alpha^{1-x^{-\beta}}$,

  maka $du = \beta log\alpha\ \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1}\, dx$

  Ketika $x = 0$, maka $u = 1$ dan ketika $u \to \infty$, maka $u = \alpha$.

  Sehingga,

  $$\int_0^\infty f_{APTP}(x)\ dx = \int_1^\alpha \frac{1}{\alpha-1} du$$
  $$= \frac{1}{\alpha-1} u\Big|_1^\alpha$$
  $$= \frac{1}{\alpha-1}(\alpha-1)$$
  $$= 1$$

- Untuk $\alpha = 1$

  $$\int_0^\infty f_{APTP}(x)\, dx = \int_0^\infty \beta x^{-\beta-1}\, dx$$
  $$= \lim_{x\to\infty} \beta \frac{1}{-\beta-1+1} x^{-\beta-1+1}\Big|_0^\infty$$
  $$= \lim_{x\to\infty} \beta \frac{1}{-\beta} x^{-\beta}\Big|_0^\infty$$
  $$= \lim_{x\to\infty} -x^{-\beta}\Big|_0^\infty$$
  $$= -x^{-\beta} - (-x^{-\beta})$$
  $$= 1$$

Dari pembuktian 1 dan 2, terbukti bahwa persamaan (3.2) merupakan fungsi kepadatan peluang.

3.4.3 Fungsi *Survival*

Misalkan variabel acak *X* merupakan waktu ketahanan hidup yang berdistribusi APT-Pareto dengan fungsi kepadatan peluang $f_{APTP}(x)$ dan fungsi distribusi kumulatif $F_{APTP}(x)$. Fungsi *survival* dari variabel acak X diperoleh dari satu dikurangi dengan *cdf* nya, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{APTP}(x) = 1 - F_{APTP}(x)$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - (1 - x^{-\beta}), & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha - 1 - (\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1)}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ x^{-\beta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha - \alpha^{1-x^{-\beta}}}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ x^{-\beta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh, fungsi *survival* dari distribusi APT-Pareto adalah:

$$S_{APTP}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha - \alpha^{1-x^{-\beta}}}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ x^{-\beta}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

3.4.4 Fungsi *Hazard*

Fungsi *hazard* dari distribusi APT-Pareto adalah hasil pembagian dari fungsi kepadatan peluang (*pdf*) dengan fungsi *survival* nya, yaitu:

$$h_{APTP}(x) = \frac{f_{APTP}(x)}{S_{APTP}(x)}$$

- Untuk $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

$$h_{APTP}(x) = \frac{\dfrac{\beta log\alpha}{\alpha - 1} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1}}{\dfrac{\alpha - \alpha^{1-x^{-\beta}}}{\alpha - 1}}$$

$$= \frac{\beta log\alpha}{\alpha - 1} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^{1-x^{-\beta}}} \right)$$

$$= \frac{\beta log\alpha}{\alpha - \alpha^{1-x^{-\beta}}} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1}$$

- Untuk $\alpha = 1$

$$h_{APTP}(x) = \frac{\beta x^{-\beta-1}}{x^{-\beta}}$$

$$= \frac{\beta}{x}$$

Sehingga didapatkan fungsi hazard dari distribusi APT-Pareto adalah sebagai berikut:

$$h_{APTP}(x) = \begin{cases} \frac{\beta log\alpha}{\alpha-\alpha^{1-x^{-\beta}}} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1}, \ \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ \frac{\beta}{x}, \ \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

3.4.5 Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan X adalah variabel acak berdistribusi APT-Pareto dengan *pdf* atau fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$g(x) = f_{APTP}(x) = \frac{log\alpha}{\alpha - 1} \beta x^{-\beta-1} \alpha^{1-x^{-\beta}}$$

$$= \frac{\alpha log\alpha}{\alpha - 1} \beta x^{-\beta-1} \alpha^{-x^{-\beta}}$$

Selanjutnya dicari bentuk deret dari $x^{-\beta}$ untuk memudahkan mencari fungsi pembangkit momen dari distribusi APT-Pareto. Misal $z = x^{-\beta}$, maka:

$$g(x) = \frac{\alpha log\alpha}{\alpha-1} \beta x^{-\beta-1} \alpha^{-z} \tag{3.5}$$

Misalkan $h(z) = \alpha^{-z}$, maka dengan ekspansi deret McLaurin:

$$h(z) = h(0) + h'(0)z + \frac{h"(0)}{2!} z^2 + \cdots$$

Diperoleh:

$$\alpha^{-z} = 1 - z \log \alpha + z^2 \frac{(log\alpha)^2}{2!} - z^3 \frac{(log\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^k}{k!} z^k \tag{3.6}$$

Substitusikan persamaan (3.5) kedalam persamaan (3.6), dimana $z = x^{-\beta}$, sehingga diperoleh:

$$g(x) = \frac{\alpha log\alpha}{\alpha - 1} \beta x^{-\beta-1} \alpha^{-z}$$

$$= \frac{\alpha log\alpha}{x(\alpha - 1)} \beta x^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^k (x^{-\beta})^k}{k!}$$

$$= \frac{\alpha(-log\alpha)}{x(1 - \alpha)} \beta x^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1} (x^{-\beta})^k}{k!}$$

$$= \frac{\alpha}{x(1-\alpha)} \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1}(x^{-\beta})^{k+1}}{k!}$$

$$= \frac{\alpha\beta}{x(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1}(x^{-\beta})^{k+1}}{k!} \tag{3.7}$$

Fungsi pembangkit momen untuk variabel acak kontinu didefinisikan dengan:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_1^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \tag{3.8}$$

Dengan ekspansi deret Taylor, diketahui:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tx)^j}{j!}$$

Dari persamaan (3.5), ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan kedalam persamaan (3.6), maka diperoleh:

$$M_x(t) = \int_1^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{x(1-\alpha)} \frac{(-log\alpha)^{k+1}(x^{-\beta})^{k+1}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tx)^j}{j!} dx$$

$$= \int_1^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{x(1-\alpha)} \frac{(-log\alpha)^{k+1}(x^{-\beta})^{k+1}}{k!} \frac{(tx)^j}{j!} dx$$

$$= \int_1^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!} \frac{t^j}{j!} x^{j-1} (x^{-\beta})^{k+1} dx$$

$$= \int_1^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!} \frac{t^j}{j!} x^{-\beta k-\beta+j-1} dx$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1} t^j}{k!\, j!} \int_1^{\infty} x^{-\beta k-\beta+j-1} dx$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1} t^j}{k!\, j!} \frac{1}{k\beta - j + \beta}$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1} t^j}{k!\, j!\, (k\beta - j + \beta)}$$

Sehingga diperoleh fungsi pembangkit momen dari distribusi APT-Pareto adalah:

$$M_x(t) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1} t^j}{k!j!(k\beta-j+\beta)} \tag{3.9}$$

3.4.6 Momen

Misalkan X peubah acak yang berdistribusi APT-Pareto, maka momen ke-r didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X^r) = \int_1^\infty x^r f_X(x)dx$$

Dengan mendiferensiasi persamaan (3.9) dan memasukkan t = r, akan diperoleh momen ke-r dari distribusi APT-Pareto yaitu:

$$E(X^r) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!}\left[\frac{r!}{(k\beta-r+\beta)}\right] \quad (3.10)$$

3.4.7 Mean

Dengan memasukkan r = 1 ke dalam persamaan (3.10) nya, akan diperoleh ekspektasi dari distribusi APT-Pareto sebagai berikut:

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!}\left[\frac{1}{(k\beta+\beta-1)}\right] \quad (3.11)$$

Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi *survival* pada persamaan (3.3), ekspektasi fungsi residual didefinisikan sebagai harapan waktu hidup tambahan dimana suatu komponen bertahan hingga waktu t. Ekspektasi fungsi residual, dinotasikan dengan $\mu(t)$ adalah sebagai berikut:

$$\mu(t) = \frac{1}{S(t)}\left(E(t) - \int_0^t xf(x)dx\right) - t, t \geq 0 \quad (3.12)$$

Dimana

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{\beta\alpha log\alpha}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-log\alpha)^k}{k!(k\beta+\beta-1)}(-t^{-(k\beta+\beta-1)}) \quad (3.13)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3), (3.11) dan (3.13) kedalam persamaan (3.12), $\mu(t)$ dapat ditulis sebagai:

$$\mu(t) = \frac{1}{S(t)}\left(E(t) - \int_0^t xf(x)dx\right) - t$$

$$= \frac{1}{\frac{\alpha-\alpha^{1-t^{-\beta}}}{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!}\left[\frac{1}{(k\beta+\beta-1)}\right]\right.$$

$$\left. - \frac{\beta\alpha log\alpha}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-log\alpha)^k}{k!\,(k\beta+\beta-1)}(-t^{-(k\beta+\beta-1)}\right) - t$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^{1-t^{-\beta}}} \left(\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!} (1^{-((k\beta+\beta-1)}) \right.$$

$$\left. - \frac{\beta\alpha log\alpha}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k}}{k!\,(k\beta+\beta-1)} (-t^{-(k\beta+\beta-1)} \right) - t$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha(1 - \alpha^{-t^{-\beta}})} \left(\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1}}{k!} (1^{-(k\beta+\beta-1)}) \right.$$

$$\left. - \frac{\beta\alpha log\alpha}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k}}{k!\,(k\beta+\beta-1)} (-t^{-(k\beta+\beta-1)} \right) - t$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha(1 - \alpha^{-t^{-\beta}})} \left(\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \right.$$

$$- \frac{\beta\alpha log\alpha}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k+1-1}}{k!\,(k\beta+\beta-1} \left(1^{-(k\beta+\beta-1)}\right)$$

$$\left. - (-t^{-(k\beta+\beta-1)} \right) - t$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha(1 - \alpha^{-t^{-\beta}})} \left(\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \right.$$

$$\left. - \frac{\beta\alpha log\alpha}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k}}{k!\,(k\beta+\beta-1)} \left(1 + t^{-(k\beta+\beta-1)}\right) \right) - t$$

$$= \frac{\beta\alpha log\alpha}{(1 - \alpha^{-t^{-\beta}})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k}}{k!\,(k\beta+\beta-1)} \left(1 + t^{-(k\beta+\beta-1)}\right) - t$$

Sehingga diperoleh fungsi residual dari distribusi APT-Pareto adalah

$$\mu(t) = \frac{\beta\alpha log\alpha}{(1-\alpha^{-t^{-\beta}})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-log\alpha)^{k}}{k!(k\beta+\beta-1)} \left(1 + t^{-(k\beta+\beta-1)}\right) - t \qquad (3.14)$$

3.4.8 Estimasi Parameter Distribusi APT-Pareto

Pada bagian ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter dari distribusi APT-Pareto dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum. Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ adalah variabel acak yang berdistribusi APT-Pareto dengan parameter α, β. Untuk menaksir parameter, akan dicari terlebih dahulu fungsi *likelihood*. Fungsi *likelihood* merupakan fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak yang bergantung pada parameter α, β. Maka fungsi *likelihood* dari distribusi APT-Pareto adalah sebagai berikut:

$$L(\alpha, \beta; x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \alpha, \beta)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \alpha, \beta)$$

Karena $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ merupakan variabel acak berdistribusi APT-Pareto dengan fungsi kepadatan peluang seperti pada persamaan (3.2), maka fungsi *likelihood* dari *X* dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\alpha, \beta; x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \alpha, \beta)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta log\alpha}{\alpha - 1} \alpha^{1 - x_i^{-\beta}} x_i^{-\beta - 1}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{log\alpha}{\alpha - 1} \beta \alpha^{1 - x_i^{-\beta}} x_i^{-\beta - 1}$$
$$= \beta^n \left(\frac{log\alpha}{\alpha - 1}\right)^n \alpha^{n - \sum x_i^{-\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\beta - 1}$$

(3.15)

Sehingga diperoleh fungsi likelihood dari distribusi APT-Pareto adalah sebagai berikut:

$$L(\alpha, \beta; x) = \beta^n \left(\frac{log\alpha}{\alpha - 1}\right)^n \alpha^{n - \sum x_i^{-\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\beta - 1}$$

Dari persamaan (3.15) diperoleh fungsi *log-likelihood*-nya sebagai berikut:

$$\log L(\alpha, \beta; x) = log\left[\beta^n \left(\frac{log\alpha}{\alpha - 1}\right)^n \alpha^{n - \sum x_i^{-\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\beta - 1}\right]$$
$$= nlog\beta + nlog\left(\frac{log\alpha}{\alpha - 1}\right) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\beta}) log\alpha + (-\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} logx_i \qquad (3.16)$$

Kemudian, dicari nilai α, β yang dapat memaksimumkan fungsi $\log L(\alpha, \beta; x)$ dengan mendiferensiasikan fungsi *log-likelihood* tersebut secara parsial terhadap setiap paremeternya dan kemudian disamakan dengan nol, maka diperoleh pengestimasi untuk setiap parameternya yaitu:

- Turunan pertama terhadap α

$$\frac{\partial \log L(\alpha,\beta;x)}{\partial\alpha} = 0$$

$$= n\left(\frac{\alpha-1}{log\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{log\alpha}{(\alpha-1)^2}\right) + \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\beta}}{\alpha} = 0$$

$$= \frac{n(\alpha-1-\alpha\log\alpha)}{\alpha(\alpha-1)log\alpha} + \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\beta}}{\alpha} = 0 \qquad (3.17)$$

- Turunan pertama terhadap β

$$\frac{\partial \log L(\alpha,\beta;x)}{\partial\beta} = 0$$

$$= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} logx_i - log\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\beta}\, logx_i = 0$$

$$= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\beta}\, logx_i log\alpha - \sum_{i=1}^{n} logx_i = 0 \qquad (3.18)$$

Dengan menurunkan kembali persamaan (3.17) dan (3.18), diperoleh

$$\frac{\partial^2 logl}{\partial\alpha^2} = \frac{n}{(\alpha-1)^2} - \frac{nlog\alpha+n}{\alpha^2 log^2\alpha} - \frac{n-\sum x_i^{-\beta}}{\alpha^2} \qquad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 logl}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\sum x_i^{-\beta}\, logx_i}{\alpha} \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 logl}{\partial\beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - log\alpha\sum x_i^{-\beta}\,(logx_i)^2 \qquad (3.21)$$

Misalkan $(\hat{\alpha},\hat{\beta})=(\frac{\partial\log L(\alpha,\beta;x)}{\partial\alpha}, \frac{\partial\log L(\alpha,\beta;x)}{\partial\beta})$. Secara analitik, ukuran maksimum *likelihood* untuk α,β didapatkan dengan menyelesaikan $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$. Akan tetapi, persamaan-persamaan tersebut merupakan persamaan non-linear sehingga akan sulit untuk diselesaikan secara eksplisit. Oleh karena itu, penaksiran $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ dapat diperoleh secara numerik.

Untuk menyelesaikan persamaan non-linear ini, dapat digunakan metode Newton-Rhapson dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menginput data sebanyak *n*

2. Menentukan nilai estimasi awal parameter pada masing-masing variabel.
3. Tentukan fungsi likelihood dan fungsi log-likelihoodnya.
4. Mencari turunan-turunan fungsi sistem persamaan non-linear terhadap masing-masing variabelnya.
5. Akan dihasilkan turunan parsial pertamanya berbentuk matriks sebagai berikut

$$L(\alpha,\beta;x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \log L(\alpha,\beta;x)}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial \log L(\alpha,\beta;x)}{\partial\beta} \end{bmatrix}$$

6. Lalu mencari turunan kedua dari bentuk $\log L(\alpha,\beta;x)$ terhadap masing-masing parameternya. Diperoleh turunan keduanya sebagai berikut

- Turunan parsial kedua terhadap α

$$\frac{\partial^2 logl}{\partial\alpha^2} = \frac{n}{(\alpha-1)^2} - \frac{nlog\alpha + n}{\alpha^2 log^2\alpha} - \frac{n - \sum x_i^{-\beta}}{\alpha^2}$$

- Turunan parsial kedua terhadap β

$$\frac{\partial^2 logl}{\partial\beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - log\alpha \sum x_i^{-\beta}\,(logx_i)^2$$

Maka diperoleh matriks Hessian yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$H(\alpha,\beta;x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 logl}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2 logl}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 logl}{\partial\alpha\partial\beta} & \dfrac{\partial^2 logl}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}$$

7. Didefinisikan bentuk umum persamaan Newton-Rhapson.

$$\begin{pmatrix} \alpha^{k+1} \\ \beta^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{k} \\ \beta^{k} \end{pmatrix} - H^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \ln L}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial\beta} \end{pmatrix}$$

8. Dari hasil tersebut lalu substitusikan nilai estimasi awal parameternya ke dalam matriks H.
9. Lakukan iterasi sampai didapatkan nilai estimasi yang konvergen.

Kemudian untuk melakukan perhitungan, dapat digunakan *software* RStudio dengan bahasa pemrograman R. Fungsi yang digunakan yaitu fungsi nlminb pada R. Fungsi nlminb pada *software* R adalah fungsi optimasi yang ditulis oleh Gay (1990) di Bell Labs, yang selanjutnya diimpor ke software R oleh Dauglas Bates. Fungsi nlminb menggunakan metode optimasi Newton (Nash dan Varadhan, 2011).

Untuk memastikan hasil penaksiran $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ yang didapatkan dengan program R sudah memaksimalkan fungsi *likelihood*, nilai $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ yang didapatkan kemudian dimasukkan kedalam persamaan (3.19) dan (3.21) dan haruslah bernilai negatif.