BAB III
MODEL OPTIMISASI PADA MASALAH PERENCANAAN PRODUKSI

Bab ini membahas tentang masalah perencanaan produksi yang ada pada sebuah perusahaan. Karena penelitian ini bertujuan memberikan alternatif untuk memperbaiki sistem pada perencanaan produksi, maka model optimisasi yang dibentuk harus sesuai dengan masalah produksi yang ada pada sebuah perusahaan. Selanjutnya, model optimisasi yang digunakan adalah model *fuzzy goal programming* yang akan diselesaikan dengan metode Simpleks.

3.1 Masalah Perencanaan Produksi

Perencanaan produksi adalah langkah awal yang harus dilakukan sebelum kegiatan produksi. Perusahaan tentunya harus memiliki sistem perencanaan produksi yang baik untuk mengoptimalkan bahan baku yang tersedia sehingga perusahaan dapat memaksimalkan keuntungan dan meminimalkan biaya untuk produksi. Perencanaan produksi merupakan masalah optimisasi multi objektif karena terdapat beberapa tujuan yang ingin dicapai. Peran perusahaan dalam mengambil keputusan sangat diperlukan untuk memberikan tingkat kepuasan terhadap solusi yang diperoleh.

Penelitian ini membahas masalah perencanaan produksi pada sebuah perusahaan dengan ketersediaan bahan baku, waktu produksi, dan ongkos pekerja. Masalah perencanaan produksi pada perusahaan tersebut terdiri dari bagaimana memperoleh keuntungan yang maksimum dengan :

1. Meminimumkan biaya untuk memproduksi produk.
2. Meminimumkan ongkos pekerja untuk memproduksi produk.
3. Meminimumkan penggunaan waktu kerja mesin.

3.2 Model Optimisasi

Model perencanaan produksi dalam penelitian ini akan diselesaikan dengan pendekatan model *fuzzy goal programming.* Model tersebut dapat dibuat jika solusi optimal dari masing-masing tujuan sudah diperoleh dan perusahaan sudah mengambil keputusan mengenai target untuk masing-masing tujuan. Asumsi yang diambil dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Tidak ada produk yang cacat.
2. Lama kerja mesin tetap.
3. Banyaknya bahan baku tetap.
4. Mesin yang digunakan untuk proses produksi tidak ada yang rusak.
5. Proses produksi tidak ada hambatan.

Model optimisasi yang akan dibangun adalah model *linear programming*. Untuk keperluan pemodelan, didefinisikan parameter-parameter sebagai berikut :

q_i : harga satuan prodak ke-i

r_i : biaya bahan baku yang diperlukan untuk satuan prodak

c_i : biaya tenaga kerja yang diperlukan untuk memproduksi satu satuan produk ke-i

v_i : waktu yang diperlukan mesin untuk memproduksi satu satuan produk ke-i

a_{ji} : banyaknya bahan baku ke-j yang diperlukan untuk menghasilkan satu satuan prodak i

w_j : banyaknya bahan baku ke-j yang tersedia

Variable keputusan dari masalah perencanaan produksi adalah jenis produk yang dihasilkan peusahaan. Misal x_i menyatakan banyaknya produk jenis ke-i yang diproduksi, $i = 1, \dots, n$. Penyelesaian masalah perencanaan produksi adalah untuk memenuhi lima tujuan. Fungsi tujuan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Fungsi tujuan untuk memaksimumkan pendapatan.

   Maka banyaknya produk$x_i$yang diproduksi dengan harga jual q_i, $i = 1, \dots, n$. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

   Memaksimumkan :

   $$P(x) = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + \cdots + q_nx_n$$

2. Fungsi tujuan untuk memaksimumkan keuntungan.

   Banyaknya produk x_i yang akan diproduksi dengan harga jual produk q_i akan dikenakan biaya bahan baku r_i dan ongkos pekerja c_i. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

   Memaksimumkan :

$$Z(x) = (q_1 - c_1 - r_1)x_1 + (q_2 - c_1 - r_1)x_2 + (q_3 - c_3 - r_3)x_3 + \cdots + (q_n - c_n - r_n)x_n$$

3. Fungsi tujuan untuk meminimumkan biaya produksi.

   Banyaknya produk x_i yang akan diproduksi dengan biaya bahan baku produk r_i. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

   Meminimumkan :

   $$T(x) = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + \cdots + r_nx_n$$

4. Fungsi tujuan untuk meminimumkan ongkos pekerja.

   Banyaknya produk x_i yang akan diproduksi dengan ongkos pekerja c_i. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

   Meminimumkan :

   $$B(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

5. Fungsi tujuan untuk meminimalkan waktu kerja mesin.

   Banyaknya produk x_i yang akan diproduksi dengan waktu kerja mesin yang diperlukan untuk memproduksi produk v_i. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

   Meminimumkan :

   $$U(x) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + \cdots + v_nx_n$$

Adapun kendala-kendala dari model adalah banyaknya bahan baku ke j, $j = 1, \dots, m$ yang digunakan untuk memproduksi produk ke i dengan ketersediaan bahan baku w_j. Secara matematis, kendala ini dapat dinyatakan dengan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n \leq w_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n \leq w_2$$

$$\vdots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{ji}x_i + \cdots + a_{jn}x_n \leq w_j$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n \leq w_m$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, n \; j = 1, \dots, m$$

Selengkapnya, model multi objektif *linear programming* dari masalah perencanaan produksi adalah sebagai berikut:

Memaksimumkan

$$P(x) = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + \cdots + q_nx_n$$

Memaksimumkan

$$Z(x) = (q_1 - c_1 - r_1)x_1 + (q_2 - c_1 - r_1)x_2 + (q_3 - c_3 - r_3)x_3 + \cdots + (q_n - c_n - r_n)x_n$$

Meminimumkan

$$T(x) = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + \cdots + r_nx_n$$

Meminimumkan

$$B(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

Meminimumkan

$$U(x) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + \cdots + v_nx_n$$

Dengan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n \leq w_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n \leq w_2$$

$$\vdots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{ji}x_i + \cdots + a_{jn}x_n \leq w_j$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n \leq w_m$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n \; j = 1, \ldots, m$$

3.3 Model *Fuzzy Goal Programming* dari Masalah Perencanaan Produksi

Dalam masalah perencanaan produksi, tidak hanya dilihat dari banyaknya produk yang ingin diproduksi secara maksimal, tetapi harus memperhatikan aspek-aspek yang mempengaruhinya baik itu dari ketersediaan bahan baku ataupun tujuan lain yang harus terpenuhi. Untuk menyelesaikan masalah dengan

beberapa tujuan yang ingin dicapai dapat menggunakan model *goal programming*. Dalam penyelesaiannya *goal programming* harus melakukan pembobotan terhadap fungsi tujuannya. Pemberian bobot pada fungsi tujuan sangat mempengaruhi solusi optimal dari model *goal programming*. dengan kata lain, solusi model *goal programming* sensitive terhadap perubahan koefisien fungsi tujuannya. Untuk mengatasi masalah ini diperlukan model *fuzzy goal* programming.

Untuk membuat model *fuzzy goal programming,* tahapan pertama yang harus dilakukan adalah mencari solusi optimal dari masing-masing fungsi tujuan dengan menggunakan metode simpleks. Solusi optimal tersebut akan menjadi dasar untuk membentuk fungsi keanggotaan *fuzzy.* Selanjutnya membentuk model *fuzzy goal programming* dengan satu fungsi tujuan dengan beberapa kendala.

3.3.1 Fungsi Keanggotaan *Fuzzy* dari Masalah Perencanaan Produksi

Model pada sub bab 3.2 memuat beberapa tujuan yang ingin dicari solusi optimalnya, dengan mempertimbangkan bahan baku yang tersedia. Solusi optimal dapat diperoleh dari masing-masing tujuan dengan menggunakan metode simpleks, yang mana solusi optimal tersebutakan menjadi dasar untuk membentuk fungsi keanggotaan *fuzzy*. Terdapat empat tujuan dalam pembentukan keanggotaan *fuzzy*.Misalkan:

Z^* sebagai nilai maksimum $Z(x)$

T^* sebagai nilai minimum $\mathrm{T}(x)$

B^* sebagai nilai minimum $\mathrm{B}(x)$

U^* sebagai nilai minimum $\mathrm{U}(x)$

Z^* adalah keuntungan maksimum, T^* adalah biaya produksi minimum, B^*adalah ongkos pekerja minimum, dan U^* adalah waktu kerja mesin minimum yang mana solusi optimal dari masing-masing fungsi tujuan akan menjadi batas maksimum dan minimum pada fungsi keanggotaan *fuzzy*.

Tahapan selanjutnya adalah peran penting perusahaan untuk mengambil keputusan dalam menentukan tingkat keuntungan terendah dengan biaya produksi

dan ongkos pekerja tertinggi dan juga waktu kerja mesin tertinggi. Pengambilan keputusan dalam model dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Serendah-rendahnya keuntungan adalah $\bar{Z}$.
2. Setinggi-tingginya waktu kerja mesin adalah $\bar{U}$.
3. Setinggi-tingginya biaya produksi adalah $\bar{T}$.
4. Setinggi-tingginya ongkos pekerja adalah $\bar{B}$.

Fungsi keanggotaan *fuzzy* yang digunakan pada permasalahan perencanaan produksi ini adalah linier. Secara matematis, pembentukan fungsi keanggotaan untuk setiap fungsi tujuan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_z(x) = \begin{cases} 1 & , Z(x) \geq Z^* \\ \dfrac{Z(x) - \bar{Z}}{Z^* - \bar{Z}} & , \bar{Z} \leq Z(x) \leq Z^* \\ 0, & Z(x) \leq \bar{Z} \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & B(x) \leq B^* \\ \dfrac{\bar{B} - B(x)}{\bar{B} - B^*}, & B^* \leq B(x) \leq \bar{B} \\ 0, & B(x) \geq \bar{B} \end{cases}$$

$$\mu_T(x) = \begin{cases} 1, & T(x) \leq T^* \\ \dfrac{\bar{T} - T(x)}{\bar{T} - T^*}, & T^* \leq T(x) \leq \bar{T} \\ 0, & T(x) \geq \bar{T} \end{cases}$$

$$\mu_U(x) = \begin{cases} 1, & U(x) \leq U^* \\ \dfrac{\bar{U} - U(x)}{\bar{U} - U^*}, & U^* \leq U(x) \leq \bar{U} \\ 0, & U(x) \geq \bar{U} \end{cases}$$

3.3.2 Model *Fuzzy Goal Programming*

Untuk membentuk model *fuzzy goal programming*, perlu dicari terlebih dahulu solusi optimal dari masing-masing tujuan dan mendefinisikan fungsi keanggotaan *fuzzy*. Kendala yang terdapat dalam model ini merupakan kendala dari model *linear programming* sebelumnya yaitu yang berhubungan dengan bahan baku pembuatan produk, dan fungsi keanggotaan *fuzzy*. Secara matematis, model *fuzzy goal programming* dapat dinyatakan sebagai berikut :

Memaksimumkan: λ

Dengan kendala:

$$\frac{Z(x) - \bar{Z}}{Z^* - \bar{Z}} \geq \lambda$$

$$\frac{\bar{B} - B(x)}{\bar{B} - B^*} \geq \lambda$$

$$\frac{\bar{T} - T(x)}{\bar{T} - T^*} \geq \lambda$$

$$\frac{\bar{U} - U(x)}{\bar{U} - U^*} \geq \lambda$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n \leq w_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n \leq w_2$$

$$\vdots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{ji}x_i + \cdots + a_{jn}x_n \leq w_j$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n \leq w_m$$

$$\lambda, x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n \; j = 1, \ldots, m$$

3.4 Teknik Penyelesaian *Fuzzy Goal Programming*

Model *fuzzy goal programming* dari masalah perencanaan produksi adalah akanmodel *linear programming.* Oleh karena itu, model tersebut dapat diselesaikan dengan metode simpleks.Langkah-langkah untuk menyelesaikan model *fuzzy goal programming* adalah dengan mengubah bentuk model *linear programming* ke dalam bentuk tabel. Langkah-langkah perhitungan dalam metode simpleks adalah sebagai berikut:

1. Membentuk tabel simpleks awal
2. Menetapkan variabel basis dan variabel non basis.

3. Untuk masalah maksimasi, periksa persamaan Z, pilih variabel non basis yang mempunyai koefisien negatif terbesar sebagai *entering variable*. Jika tidak ada, maka solusi sudah optimal.
4. Menentukan *leaving variable* dari variabel basis dengan rasio terkecil.
5. Elemen pada perpotongan *entering coulumn* (kolom pada *entering variable*)dan *pivot equation* (variabel basis yang berhubungan dengan *leaving variable*) merupakan elemen pivot dimana pada perhitungan pertama elemen pivot bernilai 1.
6. Selanjutnya, dilakukan perhitungan kedua dengan metode Gauss Jordan kecuali pada baris yang menjadi *new pivot equation.*
7. Setelah perhitungan selesai, akan diperoleh table iterasi pertama.
8. Periksa kembali persamaan Z, apakah solusi sudah optimal atau tidak.

Tabel 3.1 Tabel Simpleks Awal untuk Model*Fuzzy Goal Programming*

VB	x_1	$\cdots$	x_n	λ	A_1	A_2	A_3	A_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\cdots$	S_n	NK
Z	0	$\cdots$	0	-1	M	M	M	M	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0
A_1	$\frac{q_1-c_1-r_1}{Z^*-\bar{Z}}$	$\cdots$	$\frac{q_n-c_n-r_n}{Z^*-\bar{Z}}$	-1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	$\cdots$	0	$\frac{\bar{Z}}{Z^*-\bar{Z}}$
A_2	$\frac{-c_1}{\bar{B}-B^*}$	$\cdots$	$\frac{-c_n}{\bar{B}-B^*}$	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	$\cdots$	0	$-\frac{\bar{B}}{\bar{B}-B^*}$
A_3	$\frac{-r_1}{\bar{T}-T^*}$	$\cdots$	$\frac{-r_n}{\bar{T}-T^*}$	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	$\cdots$	0	$-\frac{\bar{T}}{\bar{T}-T^*}$
A_4	$\frac{-v_1}{\bar{U}-U^*}$	$\cdots$	$\frac{-v_n}{\bar{U}-U^*}$	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	$\cdots$	0	$-\frac{\bar{U}}{\bar{U}-U^*}$
S_5	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\cdots$	0	w_1
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	w_m

Keterangan:

A =variabel buatan, S =variable slack atau surplus