BAB III

DISTRIBUSI WEIBULL-NORMAL{LOG-LOGISTIK}

Pada bab ini akan dibahas mengenai metode transformasi transformator sebagai metode pengembangan distribusi Weibull-normal{log-logistik}. Selain itu, pada bab ini juga akan dibahas karakteristik, fungsi kuantil, fungsi *survival*, fungsi Hazard, dan pengestimasian parameter dari distribusi Weibull-normal{log-logistik}. Karakteristik yang akan dibahas pada bab ini terdiri atas fungsi distribusi kumulatif, fungsi kepadatan peluang, ekspektasi, variansi, momen, dan fungsi pembangkit momen.

3.1. Metode Transformasi Transformator

Terdapat minat baru dalam mengembangkan distribusi statistik yang lebih fleksibel dalam beberapa dekade terakhir. Tonggak utama dalam metode untuk menghasilkan distribusi statistik adalah sistem pendekatan persamaan diferensial yang diperkenalkan oleh Pearson.

Metode pengembangan distribusi baru diklasifikasikan atas dua periode waktu, yaitu sebelum tahun 1980 dan tahun 1980 dan setelahnya. Metode umum yang digunakan sebelum tahun 1980, yaitu metode persamaan diferensial, metode transformasi (atau translasi), dan metode fungsi kuantil. Dan untuk metode umum yang digunakan tahun 1980 dan setelahnya, yaitu metode untuk menghasilkan distribusi miring, metode generalisasi distribusi beta, metode penambahan parameter, metode transformasi transformator, dan metode komposit.

Nicholas Eugene mengusulkan penggeneralisasian distribusi beta dengan distribusi beta sebagai generator. Fungsi distribusi kumulatif dari keluarga distribusi generalisasi beta didefinisikan sebagai berikut:

$$G(x) = \int_0^{F(x)} b(t)dt;\ 0 < x < 1, \tag{3.1}$$

dengan $b(t)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari peubah acak yang berdistribusi beta dan $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu X dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Misalkan X peubah acak kontinu, maka fungsi kepadatan peluang dari distribusi generalisasi beta dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} f(x) F^{\alpha-1}(x)\big(1 - F(x)\big)^{\beta-1}, \qquad (3.2)$$

dengan $B(\alpha,\beta)$ merupakan distribusi beta dengan parameter α dan β, dan $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu X dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Dapat dikatakan bahwa $F(x)$ sebagai distribusi induk dan $b(t)$ sebagai distribusi generator. Selain menghasilkan distribusi baru, beberapa distribusi umum yang ada juga dapat dihasilkan menggunakan $g(x)$ dengan mendefinisikan $F(x)$ dengan tepat (Alzaatreh, Lee, & Famoye, 2014).

Distribusi generalisasi beta hanya terbatas pada distribusi dengan peubah acak dari 0 sampai 1 sebagai generator. Dengan keterbatasan tersebut, Alzaatreh *et al* mengusulkan metode transfromasi transformator untuk menggeneralisasi $b(t)$ yang merupakan distribusi beta pada persamaan (3.1) dengan sembarang distribusi peluang kontinu dengan tujuan memperluas interval dari nilai-nilai peubah acak.

Misalkan $f_T(t)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari suatu peubah acak $T \in (a,b), -\infty < a < b < \infty$, dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Misalkan pula $W(F_X(x))$ adalah fungsi dari fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Berikut kondisi-kondisi yang harus dipenuhi fungsi $W(F_X(x))$:

i. $W_X\big(F(x)\big) \in (a,b)$.
ii. $W_X\big(F(x)\big)$ terdiferensial pada (a,b) dan merupakan fungsi monoton naik.
iii. $W_X\big(F(x)\big) \to a$ jika $x \to -\infty$ dan $W\big(F(x)\big) \to b$ jika $x \to \infty$.

Sehingga fungsi distribusi kumulatif yang baru dapat dituliskan sebagai berikut:

$$G(x) = \int_a^{W(F_X(x))} f_T(t)dt = F_T\big(W(F_X(x))\big);\ -\infty < x < \infty, \qquad (3.3)$$

dan fungsi kepadatan peluangnya adalah sebagai berikut:

$$g(x) = \left\{\frac{d}{dx} W(F_X(x))\right\} f_T\{W(F_X(x))\}. \qquad (3.4)$$

(Aljarrah, Lee, & Famoye, 2014).

Persamaan (3.4) merupakan fungsi kepadatan peluang dari keluarga distribusi T-X. Fungsi $W(F_X(x))$ yang berbeda akan menghasilkan fungsi kepadatan peluang yang berbeda juga untuk keluarga distribusi T-X. Apabila X peubah acak diskrit, maka distribusi baru yang dihasilkan pun diskrit dan apabila X peubah acak kontinu, maka distribusi baru yang dihasilkan pun kontinu.

Istilah 'transformasi transformator' dinobatkan untuk transformasi dari fungsi $F_X(x)$ menjadi fungsi $W(F_X(x))$ dan kemudian dari fungsi $W_X\big(F(x)\big)$ menjadi fungsi $Q_X(p)$. Ketiga fungsi tersebut merupakan transformator untuk menghasilkan keluarga distribusi yang baru.

Keluarga distribusi T-X kemudian dikembangkan menjadi keluarga distribusi T-X{Y} dengan menggunakan fungsi kuantil dari peubah acak Y dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Misalkan S adalah fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak $Y \in (a, b)$ dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Fungsi *invers* dari fungsi distribusi kumulatif peubak acak Y atau yang dikenal dengan fungsi kuantil didefinisikan sebagai berikut:

$$Q_Y(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}: S_Y(x) \geq p\}, p \in (0,1). \tag{3.5}$$

Jika $S_Y(x)$ kontinu dan monoton naik, maka $Q_Y(p) = S_Y^{-1}(x)$ juga kontinu dan monoton naik.

Pada keluarga distribusi T-X, fungsi W didefinisikan sebagai sembarang fungsi, namun pada keluarga distribusi T-X{Y} fungsi W lebih khusus didefinisikan sebagai fungsi kuantil dari peubah acak Y, $Q_Y\big(F_X(x)\big)$. Sehingga fungsi distribusi kumulatif dari keluarga distribusi T-X{Y} dengan menggunakan fungsi kuantil Q_Y didefinisikan sebagai berikut:

$$G(x) = \int_a^{Q_Y(F_X(x))} f_T(t)dt = F_T\big(Q_Y(F_X(x)\big);\ -\infty < x < \infty. \tag{3.6}$$

Selanjutnya, jika diasumsikan fungsi kepadatan peluang dari peubah acak Y, $s_Y(x) > 0$ untuk semua x di persekitaran dari $Q_Y(p)$ dengan $p \in (0,1)$, maka $\frac{d}{dp}Q_Y(p)$ ada dan sama dengan $\big[p\big(Q_Y(p)\big)\big]^{-1}$. Persamaan (3.6) dapat digunakan untuk menghasilkan distribusi baru lainnya dari keluarga distribusi T-X{Y} dengan menggunakan fungsi kuantil dari peubah acak Y dengan sembarang distribusi peluang kontinu. Untuk menghindari penggunaan notasi *X* yang berulang, maka penamaan T-X{Y} berganti menjadi T-R{Y} (Aljarrah, Lee, & Famoye, 2014).

Misalkan *T*, *R*, dan *Y* adalah peubah acak kotinu dengan fungsi distribusi kumulatif dinotasikan berturut-turut sebagai $F_T(x) = P(T \leq x)$, $F_R(x) = P(R \leq x)$, dan $F_Y(x) = P(Y \leq x)$. Jika fungsi kepadatan peluang masing-masing peubah acak ada, maka dinotasikan beturut-turut sebagai $f_T(x)$, $f_R(x)$, dan $f_Y(x)$. Untuk fungsi kuantilnya dinotasikan berturut-turut sebagai $Q_T(p)$, $Q_R(p)$, dan $Q_Y(p)$, dan fungsi kuantil ketiganya didefinisikan sebagai $Q_X(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) \geq p\}, p \in (0,1)$. Asumsikan peubah acak $T \in (a,b)$ dan $Y \in (c,d), -\infty < a < b < \infty$ dan $-\infty < c < d < \infty$.

Misalkan *X* peubah acak kontinu yang berasal dari keluarga distribusi T-R{Y}. Berdasarkan (Alzaatreh, Lee, & Famoye, 2014), fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak *X* didefinisikan sebagai berikut:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{Q_Y(F_R(x))} f_T(t)dt = F_T\{Q_Y(F_R(x))\}. \tag{3.7}$$

dan untuk fungsi kepadatan peluang dari peubah acak *X* didefinisikan sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\Big(Q_Y\big(F_R(x)\big)\Big) f_T\left(Q_Y\big(F_R(x)\big)\right) f_R(x), \tag{3.8}$$

dengan

f_T : fungsi kepadatan peluang dari peubah acak *T*

Q_Y : fungsi kuantil dari peubah acak *Y*

F_R dan f_R : fungsi distribusi kumulatif dan fungsi kepadatan peluang dari peubah acak *R*

(Alzaatreh, Lee, & Famoye, 2014).

3.2. Distribusi Weibull-normal{log-logistik}

Berdasarkan penjelasan pada subbab sebelumnya, distribusi Weibull-normal{log-logistik} merupakan salah satu distribusi dari keluarga distribusi T-

R{Y}. Keluarga distribusi T-R{Y} merupakan perkembangan dari keluarga distribusi T-X yang dihasilkan dengan menggunakan metode transformasi transformator. Metode transformasi transformator merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengembangkan distribusi statistik baru yang lebih fleksibel. Pada distribusi Weibull-normal {log-logistik}, distribusi Weibull berperan sebagai distribusi generator, melibatkan parameter dari distriburi Weibull dan distribusi normal, dan menggunakan fungsi kuantil dari distribusi log-logistik dengan mengasumsikan $\alpha = 1$ dan $\lambda = 1$. Distribusi Weibull-normal {log-logistik} memiliki 1 buah parameter lokasi yaitu μ, 2 buah parameter bentuk yaitu σ^2 dan c dan 1 buah parameter skala yaitu γ, yang merupakan gabungan dari parameter distribusi Weibull dan distribusi normal.

3.3. Karakteristik Distribusi Weibull-normal{log-logistik}

Pada subbab ini akan dibahas mengenai karakteristik distribusi Weibull-normal{log-logistik}. Karakteristik distribusi Weibull-normal{log-logistik} terdiri atas fungsi distribusi kumulatif, fungsi kepadatan peluang, ekspektasi, momen, fungsi pembangkit momen, dan variansi.

1) Fungsi Distribusi Kumulatif

Misalkan peubah acak T berdistribusi Weibull dengan dua parameter yaitu c dan γ, $T \sim Wei(c, \gamma)$, maka fungsi distribusi kumulatif dari T dituliskan sebagai berikut:

$$F_T(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^c\right\}, \text{ untuk } x > 0 \text{ dan } c, \gamma > 0. \qquad (3.9)$$

Misalkan peubah acak R berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ^2, $R \sim N(\mu, \sigma^2)$, dan didefinisikan $\Phi(x)$ sebagai fungsi distribusi kumulatifnya dan $\varphi(x)$ sebagai fungsi kepadatan peluangnya.

Misalkan peubah acak Y berdistribusi log-logistik dengan parameter α dan λ, $Y \sim LL(\alpha, \lambda)$, maka fungsi distribusi kumulatif dari Y dituliskan sebagai berikut:

$$F_Y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}} \text{ untuk } \alpha, \lambda > 0 \text{ dan } x \geq 0.$$

dan fungsi kuantilnya dituliskan sebagai berikut:

$$F_Y(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}} = p$$

$$1 = p + p\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}$$

$$1 - p = p\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}$$

$$\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} = \frac{p}{1-p}$$

$$\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{x}{\lambda} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$x = \lambda\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Diasumsikan $\alpha = 1$ dan $\lambda = 1$, yang merupakan nilai parameter untuk distribusi log-logistik standar, sehingga bentuk fungsi kuantil dari distribusi log-logistik yang digunakan sebagai berikut:

$$x = Q_Y(p) = \frac{p}{1-p} \text{ untuk } 0 < p < 1. \tag{3.10}$$

Substitusikan fungsi distribusi kumulatif distribusi normal, $\Phi(x)$, ke persamaan (3.10) sehingga diperoleh:

$$\mathrm{Q_Y}(\Phi(x)) = \frac{\Phi(x)}{1-\Phi(x)} \tag{3.11}$$

dengan $\Phi(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) dan (3.11), ke persamaan (3.7), diperoleh bentuk fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull-normal{log-logsitik} yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_T\{Q_Y(F_R(x))\} \\ &= F_T\{Q_Y(\Phi(x))\} \\ &= F_T\left\{\frac{\Phi(x)}{1-\Phi(x)}\right\} \end{aligned}$$

$$= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^{c}\right\}, \text{untuk } -\infty < x < \infty, \qquad (3.12)$$

dengan $\Phi(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

2) Fungsi Kepadatan Peluang

Misalkan X peubah acak kontinu yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik}. Berdasarkan definisi fungsi kepadatan peluang, maka fungsi kepadatan peluang dari distribusi Weibull-normal{log-logistik}, $f_X(x)$, dituliskan sebagai berikut:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}$$

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

$$= -\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}\left(-c\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}\right)$$

$$\left(\frac{\left(\Phi\prime(x)\right)\left(\gamma[1-\Phi(x)]\right)-\left(-\gamma\Phi\prime(x)\right)\left(\Phi(x)\right)}{\left(\gamma[1-\Phi(x)]\right)^{2}}\right)$$

$$= -\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}\left(-c\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}\right)$$

$$\left(\frac{\gamma\Phi\prime(x)-\gamma\Phi\prime(x)\Phi(x)+\gamma\Phi\prime(x)\Phi(x)}{\left(\gamma[1-\Phi(x)]\right)^{2}}\right)$$

$$= -\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}\left(-c\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}\right)\left(\frac{\gamma\Phi\prime(x)}{\left(\gamma[1-\Phi(x)]\right)^{2}}\right)$$

$$= -\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}\left(-c\left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}\right)\left(\frac{\Phi\prime(x)}{[1-\Phi(x)]^{2}}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma^{2}\gamma^{c-1}}\right)$$

$$= -\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}\left(-c\left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}\right)\left(\frac{\Phi\prime(x)}{[1-\Phi(x)]^{2}}\right)\left(\gamma^{-c}\right)$$

$$= \frac{c}{\gamma^{c}}\left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^{2}}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^{c}\right\}, \; -\infty < x < \infty \qquad (3.13)$$

dengan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

3) Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan X peubah acak yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik}. Jika fungsi pembangkit momen X, $M_X(t)$, ada dan terbatas untuk setiap bilangan riil $t \in [-h, h] \subseteq \mathbb{R}$, dengan $h > 0$, maka $M_X(t)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$M_X(t) = E(\exp(tX)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tX) f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tX) \frac{c}{\gamma^c} \left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^2}\right) \left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\} dx$$

$$= \frac{c}{\gamma^c} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tX) \left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^2}\right) \left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\} dx \quad (3.14)$$

dengan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

4) Momen Ke-*r*

Misalkan X peubah acak yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik}, maka momen ke-*r* didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{c}{\gamma^c} \left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^2}\right) \left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\} dx \quad (3.15)$$

dengan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

5) Ekspektasi

Misalkan X peubah acak yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik}, maka $E(X)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \frac{c}{\gamma^c} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^2}\right) \left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\} d \quad (3.16)$$

dengan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

6) Variansi

Misalkan X peubah acak yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik}, maka $E[(X-\mu)^2]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$E[(X-\mu)^2] = \frac{c}{\gamma^c} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^2}\right) \left(\frac{\Phi(x)}{[1-\Phi(x)]}\right)^{c-1}$$

$$\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\} dx \quad (3.17)$$

dengan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

3.4. Fungsi Kuantil Distribusi Weibull-normal{log-logistik}

Misalkan peubah acak X dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$. Jika $p \in (0,1)$, maka p-kuantil dari X $\left(\text{dinotasikan}\, Q_X(p)\right)$ adalah $Q_X(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}$.

Fungsi kuantil dari suatu distribusi merupakan fungsi *invers* dari fungsi distribusi kumulatifnya. Berikut merupakan bentuk fungsi *invers* dari fungsi distribusi kumulatif distribusi Weibull-normal{log-logistik}:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^c\right\} = p$$

$$1 - p = \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^c\right\}$$

$$\ln(1-p) = \ln\left(\exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^c\right\}\right)$$

$$-\ln(1-p) = \left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^c$$

$$(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}} = \left(\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}}$$

$$(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}} = \frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}$$

$$\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}} - \Phi(x)\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}} = \Phi(x)$$

$$\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}} = \Phi(x) + \Phi(x)\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}$$

$$\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}} = \Phi(x)\left(1 + \gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}\right)$$

$$\Phi(x) = \frac{\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}}{\left(1+\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}\right)}$$

$$x = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}}{\left(1+\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}\right)}\right)$$

Sehingga fungsi kuantil dari distribusi Weibull-normal{log-logistik} dituliskan sebagai berikut:

$$Q_Y(p) = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}}{\left(1+\gamma(-\ln(1-p))^{\frac{1}{c}}\right)}\right) \tag{3.18}$$

dengan Φ^{-1} adalah fungsi kuantil dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2.

3.5. Fungsi *Survival* Distribusi Weibull-normal{log-logistik}

Misalkan peubah acak X merupakan waktu ketahanan hidup yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik} dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x) = P(X \leq x)$. Fungsi *survival* dari peubah acak X dituliskan sebagai berikut:

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$$

$$= 1 - \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\}\right)$$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma[1-\Phi(x)]}\right)^c\right\} \tag{3.19}$$

dengan $\Phi(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter mean μ dan σ^2.

3.6. Fungsi Hazard Distribusi Weibull-normal{log-logistik

Misalkan peubah acak X merupakan waktu ketahanan hidup yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik} dengan fungsi kepadatan peluang $f_X(x)$ dan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x) = P(X \leq x)$. Berdasarkan persamaan (3.12) dan (3.13), maka fungsi Hazard dari peubah acak X dituliskan sebagai berikut:

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x | X>x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{P[(x<X<x+\Delta x)\cap(X>x)]}{X>x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[(x<X<x+\Delta x)\cap(X>x)]}{\Delta x P(X>x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x\left(1-F_X(x)\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x\left(1 - F_X(x)\right)}$$

$$= \frac{1}{1-F_X(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}$$

$$= \frac{c}{\gamma^c}\left(\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]^2}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{1-\Phi(x)}\right)^{c-1}, \qquad (3.20)$$

dengan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter mean μ dan σ^2.

3.7. Pengestimasian Parameter Distribusi Weibull-normal{log-logistik}

Pada subbab ini akan dibahas mengnai pengestimasian parameter-parameter distribusi Weibull-normal{log-logistik} menggunakan metode *maximum likelihood estimation*.

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ peubah acak berukuran *n* yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik} dengan nilai pengamatan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan parameter c, γ, μ, dan σ^2. Untuk menaksir parameter tersebut, akan dicari terlebih dahulu fungsi *likelihood*. Fungsi *likelihood* merupakan fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak yang bergantung pada parameter c, γ, μ, dan σ^2. Maka fungsi *likelihood* dari peubah acak yang memiliki fungsi kepadatan peluang $f_X(x; c, \gamma, \mu,$ $\sigma^2)$ tersebut adalah sebagai berikut:

$$L(x; c, \gamma, \mu, \sigma^2) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; c, \gamma, \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; c, \gamma, \mu, \sigma^2)$$

Karena $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan peubah acak yang berdistribusi Weibull-normal{log-logistik} yang memiliki fungsi kepadatan peluang $f_X(x; c, \gamma, \mu, \sigma^2)$ seperti pada persamaan (3.9), maka fungsi kepadatan peluang bersama dari *X* dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(x; c, \gamma, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{c}{\gamma^c}\left(\frac{\varphi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]^2}\right)\left(\frac{\Phi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1} exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^c\right\}$$

$$= \left(\frac{c}{\gamma^c}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\varphi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]^2}\right)\left(\frac{\Phi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1} exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^c\right\}. \qquad (3.21)$$

Selanjutnya akan dicari nilai c, γ, μ, dan σ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* pada persamaan (3.21). Karena memaksimumkan fungsi *likelihood* secara langsung cukup sulit, maka digunakan logaritma natural dari fungsi *likelihood* tersebut atau yang dinamakan dengan fungsi *ln-likelihood*. Nilai c, γ, μ, dan σ yang diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* tersebut sama dengan nilai c, γ, μ, dan σ yang diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*-nya. Sehingga fungsi *ln-likelihood* untuk persamaan (3.21) yaitu:

$$\ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma) = \ln \left[\left(\frac{c}{\gamma^c}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\varphi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]^2}\right) \left(\frac{\Phi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1} exp\left\{-\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^c\right\}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{\ln \frac{c}{\gamma^c} + \ln \varphi(x_i) - (c+1)\ln[1-\Phi(x_i)] + (c-1)\ln \Phi(x_i) - \left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^c\right\}. \quad (3.22)$$

Kemudian dicari nilai c, γ, μ, dan σ yang memaksimumkan $\ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)$ dengan turunan parsial pertama dari $\ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)$ terhadap masing-masing parameter $\ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)$ disamadenganka nol.

- Turunan parsial pertama terhadap c

$$\frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial c} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma^c}{c}\left(\frac{\gamma^c - (\gamma^c \ln \gamma)c}{\gamma^{2c}}\right) - \ln\big(1-\Phi(x_i)\big) + \ln \Phi(x_i) - \left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^{\mathrm{c}} \ln\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{1}{c} - \ln \gamma - \ln[1-\Phi(x_i)] + \ln \Phi(x_i) - \left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^c \ln\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)\right\} = 0 \quad (3.23)$$

- Turunan parsial pertama terhadap γ

$$\frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \gamma} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma^c}{c}\left(\frac{(-c\gamma^{c-1})c}{\gamma^{2c}}\right) - \left(\frac{\Phi(x_i)}{[1-\Phi(x_i)]}\right)^c (-c\gamma^{c-1}) = 0$$

$$\sum_{i-1}^{n} \left\{\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^c - 1\right\}\frac{c}{\gamma} = 0 \quad (3.24)$$

- Turunan parsial pertama terhadap μ

$$\frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \mu} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}-\left(\frac{c+1}{1-\Phi(x_i)}\right)\varphi(x)+\frac{c-1}{\Phi(x_i)}\left(-\varphi(x)\right)-\right.$$

$$\left.\frac{c}{\gamma}\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1}\frac{-\varphi(x)}{[1-\Phi(x_i)]^2}\right\}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}+\frac{\partial\Phi(x_i)}{\partial\mu}\left[\frac{c+1}{1-\Phi(x_i)}+\frac{c-1}{\Phi(x_i)}-\frac{c}{\gamma[1-\Phi(x_i)]^2}\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1}\right]\right\}=0 \quad (3.25)$$

- Turunan parsial pertama terhadap σ

$$\frac{\partial \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial\sigma}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2-1\right]-\frac{c+1}{1-\Phi(x_i)}\left(\frac{(x_i-\mu)\varphi(x)}{\sigma}\right)+\frac{c-1}{\Phi(x_i)}\left(-\frac{(x_i-\mu)\varphi(x)}{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{c}{\gamma}\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1}\left(-\frac{\frac{(x_i-\mu)\varphi(x)}{\sigma}}{[1-\Phi(x_i)]^2}\right)\right\}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2-1\right]+\frac{\partial\Phi(x_i)}{\partial\sigma}\left[\frac{c+1}{1-\Phi(x_i)}+\frac{c-1}{\Phi(x_i)}-\frac{c}{\gamma[1-\Phi(x_i)]^2}\left(\frac{\Phi(x_i)}{\gamma[1-\Phi(x_i)]}\right)^{c-1}\right]\right\}=0, \quad (3.26)$$

dengan

$\frac{\partial\Phi(x_i)}{\partial\mu}=-\varphi(x)$ dan $\frac{\partial\Phi(x_i)}{\partial\sigma}=-\frac{(x_i-\mu)\varphi(x)}{\sigma}$

dan $\varphi(x)$ dan $\Phi(x)$ berturut-turut adalah fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2. Turunan parsial kedua dari fungsi *ln-likelihood* menentukan matriks varians-kovarians untuk estimasi parameter.

Untuk menentukan perkiraan awal untuk setiap nilai parameter yaitu dengan mentransformasikan peubah acak sebagai peubah acak dari distribusi normal dan Weibull. Nilai parameter μ dan σ^2 diestimasi dengan nilai mean $\bar{x}$ dan standar deviasi s. Kemudian, dengan menggunakan salah satu lemma yang berlaku untuk distribusi Weibull-normal{log-logistik} yaitu '*Jika X berdistribusi Weibull-normal{log-logistik} dengan parameter μ, σ^2, c dan γ, maka peubah acak $Y=\frac{\Phi(x)}{1-\Phi(x)}$. berdistribusi Weibull dengan parameter c dan γ, dengan $\Phi(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2*, diperoleh $y_i=\frac{\Phi(x_i)}{1-\Phi(x_i)}$, dengan x_i memiliki mean $\bar{x}$ dan standar deviasi s. Metode momen diterapkan untuk mengestimasi parameter distribusi Weibull, c dan γ, dan diperoleh $c_* = \frac{\pi}{6s_{\log(y_i)}}$ dan $\gamma_* = \exp(-\bar{y}_{\log(y_i)} - \frac{\delta}{c_*})$, dengan $s_{\log(y_i)}$dan $\bar{y}_{\log(y_i)}$ beturut-turut adalah standar deviasi dan mean dari sampel acak untuk $\log(y_i)$ dan δ adalah konstanta Euler.

Persamaan (3.23), (3.24), (3.25), dan (3.26) merupakan persamaan non linear yang sulit diselesaikan secara analitik, sehingga digunakan metode Newton-Raphson untuk menyelesaikannya. Metode Newton-Raphson adalah salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan non linear dengan pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan gradien pada titik tersebut. Berikut langkah pemrograman untuk pengestimasian parameter.

1. *n* buah data
2. Tentukan nilai estimasi awal parameter
3. Definisikan fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi kepadatan peluang bersama dan fungsi *ln-likelihood*
4. Lakukan diferensiasi secara parsial sebanyak 1 kali dari $\ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)$ yang diturunkan terhadap parameter-parameternya dan samadengankan 0
5. Turunan parsial pertama akan membentuk matriks sebagai berikut:

$$g(x; c, \gamma, \mu, \sigma) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial c} \\ \frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \sigma} \end{bmatrix}$$

6. Selanjutnya membentuk matriks Jacobian, dengan elemen matriks berupa turunan parsial kedua dari $\ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)$ yang diturunkan terhadap parameter-parameternya.
   - Turunan parsial kedua terhadap c

$$\frac{\partial^2 \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial c^2} = -\frac{1}{c^2} - \left(\ln\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)\right)^2 \left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^c = 0 \qquad (3.27)$$

   - Turunan parsial kedua terhadap γ

$$\frac{\partial^2 \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial \gamma^2} = \frac{c}{\gamma^2} - \frac{c}{\gamma^2}\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^c (1+c) = 0 \qquad (3.28)$$

- Turunan parsial kedua terhadap μ

$$\frac{\partial^2 \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial \mu^2} = \frac{x-1}{\sigma^2} + \varphi(x)\left(\frac{c+1}{1-\Phi(x)}\right)\left(\frac{x^2-\mu x}{\sigma^2} + \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}\right) +$$
$$\varphi(x)\left(\frac{c-1}{\Phi(x)}\right)\left(\frac{x^2-\mu x}{\sigma^2} - \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}\right) + \varphi(x)\left(\frac{x^2-\mu x}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\mathrm{c}}{\gamma(1-\Phi(x))^2}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma(1-\Phi(x))}\right)^{c-1} +$$
$$2c\left(\frac{\varphi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)^3}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^{c-1} - \frac{(c-1)\left(\varphi(x)\right)^2}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)^2}\left(\frac{x^2-\mu x}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^{c-2} = 0$$
$$(3.29)$$

- Turunan parsial kedua terhadap σ

$$\frac{\partial^2 \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{3(x-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^2} + \varphi(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(-\frac{1}{\sigma} + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 -\right.$$
$$\left.\frac{c+1}{\left(1-\Phi(x)\right)^2}\left(\varphi(x)\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) + \varphi(x)\left(-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{c+1}{1-\Phi(x)}\right) + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) + \varphi(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(-\frac{2}{\sigma} +\right.$$
$$\left.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + \frac{c-1}{\left(\Phi(x)\right)^2}\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\varphi(x)\right)\right) + \left(\varphi(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(-\frac{2}{\sigma} +\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right)\left(-\frac{c}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)^2}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^c + \left(\frac{2c}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)^3}\right)\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^c +$$
$$\frac{c}{\gamma}\left(\frac{\Phi(x)}{\gamma\left(1-\Phi(x)\right)}\right)^{c-1}\left(\frac{(x-\mu)\varphi(x)}{\sigma\left(1-\Phi(x)\right)^2}\right) = 0 \qquad (3.30)$$

7. Definisikan bentuk umum persamaan iterasi Newton-Raphson.

$$\begin{bmatrix} c^{k+1} \\ \gamma^{k+1} \\ \mu^{k+1} \\ \sigma^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{k} \\ \gamma^{k} \\ \mu^{k} \\ \sigma^{k} \end{bmatrix} - (J^{-1}) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial c} \\ \dfrac{\partial \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial \ln L(x;c,\gamma,\mu,\sigma)}{\partial \sigma} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial c^2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \gamma^2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(x; c, \gamma, \mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix}$$

8. Substitusikan nilai estimasi awal parameter ke vektor g dan matriks *J*.
9. Kemudian lakukan iterasi, proses iterasi berhenti apabila telah menemukan nilai estimasi yang konvergen.