BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas mengenai metodologi penelitian, *scatterplot*, regresi semiparametrik *spline*, regresi semiparametrik *spline* linear, regresi semiparametrik *spline* kuadratik, regresi semiparametrik *spline* kubik, pemilihan titik knot optimal, dan penaksiran parameter regresi semiparametrik *spline*.

3.1. Metodologi Penelitian

Pada penelitian ini dilakukan pemilihan metode regresi yang sesuai dengan pola hubungan yang terbentuk antara variabel respon dan variabel prediktor. Studi kasus akan dilakukan terhadap data IPM Provinsi Papua, IPM Provinsi Papua Barat, dan IPM Provinsi Nusa Tenggara Timur tahun 2016 yang merupakan tiga provinsi dengan IPM terendah di Indonesia (Badan Pusat Staistik, 2017, hlm. 95). Setelah dianalisis, ternyata sebagian pola data dari masing-masing data dapat diketahui dan sebagian lagi tidak diketahui, maka metode yang dipilih adalah regresi semiparametrik. Komponen nonparametrik pada regresi semiparametrik dapat didekati oleh fungsi *spline*. *Spline* digunakan karena mempunyai keunggulan dalam mengatasi ketajaman kenaikan atau penurunan pola data dengan bantuan titik-titik knot. Dalam penelitian ini digunakan fungsi *spline* linear, *spline* kuadratik, dan *spline* kubik. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan metode regresi semiparametrik *spline* linear, metode regresi semiparametrik *spline* kuadratik, dan metode regresi semiparametrik *spline* kubik. Selain itu, pada penelitian ini digunakan satu titik knot.

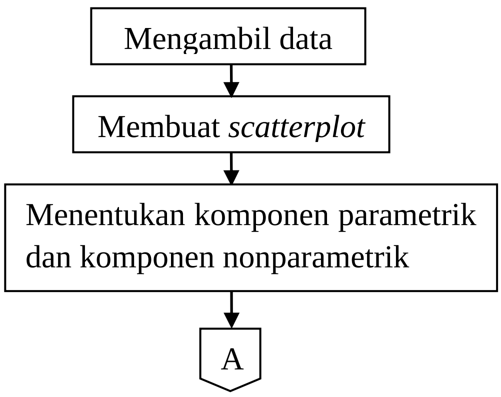
Pemilihan titik knot optimal dan penaksiran parameter dilakukan dengan bantuan bahasa pemrograman R. Bahasa pemrograman R digunakan karena *compatible* dengan program statistik. Bahasa pemrograman R terdiri dari *tools* statistik yang terintegrasi untuk analisis data, diantaranya statistik deskriptif, fungsi probabilitas, dan berbagai macam uji statistik hingga *time series*.

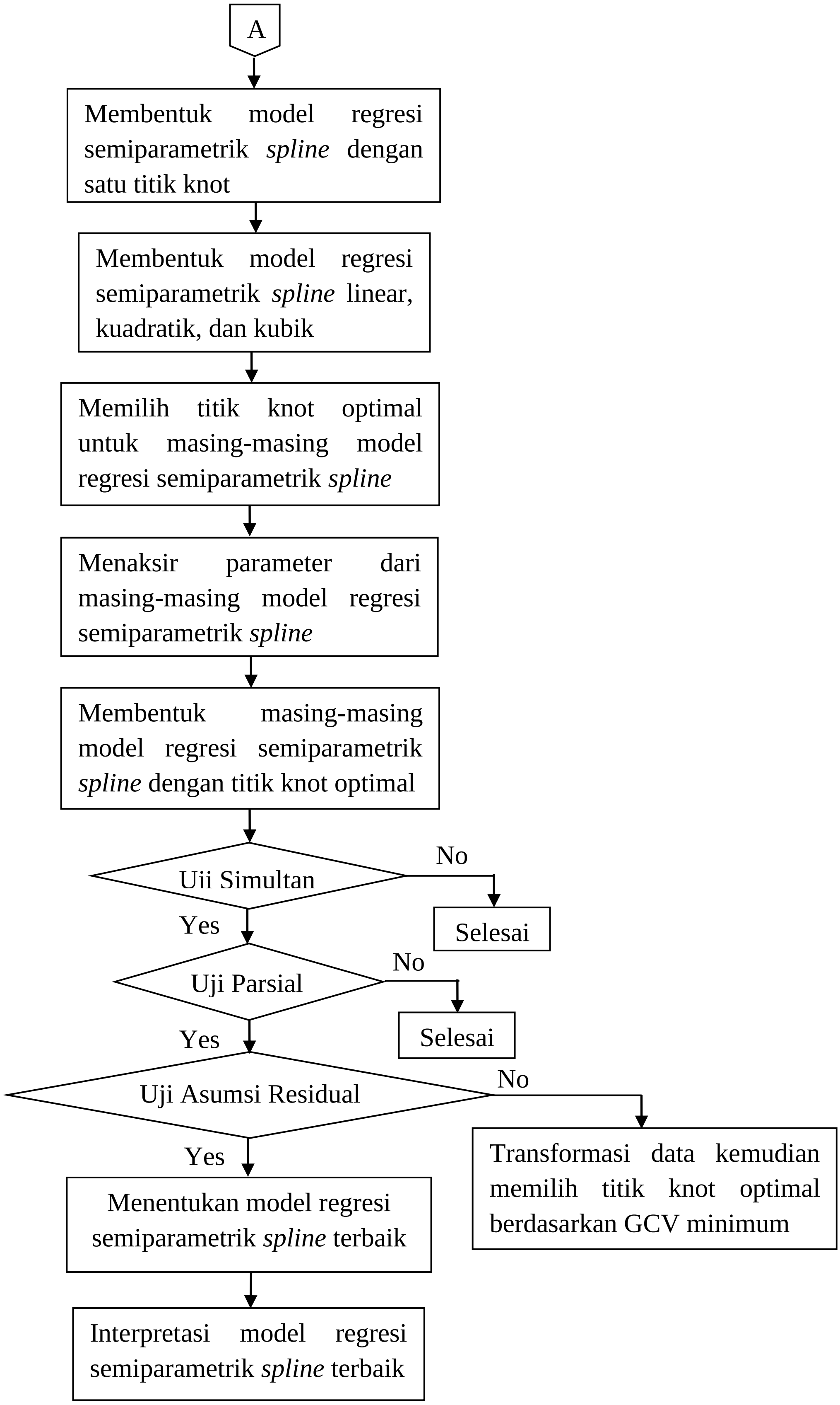
Berikut langkah-langkah dalam metodologi penelitian pada skripsi ini.

1. Mendapatkan data IPM Provinsi Papua, IPM Provinsi Papua Barat, dan IPM Provinsi Nusa Tenggara Timur beserta variabel-variabel yang diduga mempengaruhi IPM.

2. Membuat *scatterplot* untuk mengetahui pola data antara variabel IPM dan variabel-variabel yang diduga mempengaruhinya.
3. Menentukan komponen parametrik dan komponen nonparametrik untuk model regresi semiparametrik yang akan dibentuk.
4. Membentuk model regresi semiparametrik *spline* dengan satu titik knot.
5. Membentuk model regresi semiparametrik *spline* linear, model regresi semiparametrik *spline* kuadratik, dan model regresi semiparametrik *spline* kubik yang masing-masing memiliki satu titik knot.
6. Memilih titik knot optimal berdasarkan nilai GCV minimum untuk masing-masing model regresi semiparametrik *spline*.
7. Menaksir parameter dari masing-masing model regresi semiparametrik *spline*.
8. Membentuk masing-masing model regresi semiparametrik *spline* dengan satu titik knot optimal.
9. Melakukan uji signifikansi parameter dari masing-masing model regresi semiparametrik *spline*
10. Melakukan uji IIDN pada residual yang dihasilkan dari masing-masing model regresi semiparametrik *spline* kuadratik dengan satu titik knot optimal. Jika asumsi tersebut tidak dipenuhi maka dilakukan transformasi data. Selanjutnya memulai kembali pemodelan dari langkah ke lima.
11. Menentukan model terbaik dengan melihat nilai MSE.
12. Menginterpretasikan model regresi semiparametrik *spline* dengan satu titik knot terbaik untuk memodelkan data IPM Provinsi Papua, IPM Provinsi Papua Barat, dan IPM Provinsi Nusa Tenggara Timur tahun 2016.

Langkah-langkah dari metodologi penelitian di atas disajikan dalam bentuk *flowchart* berikut.

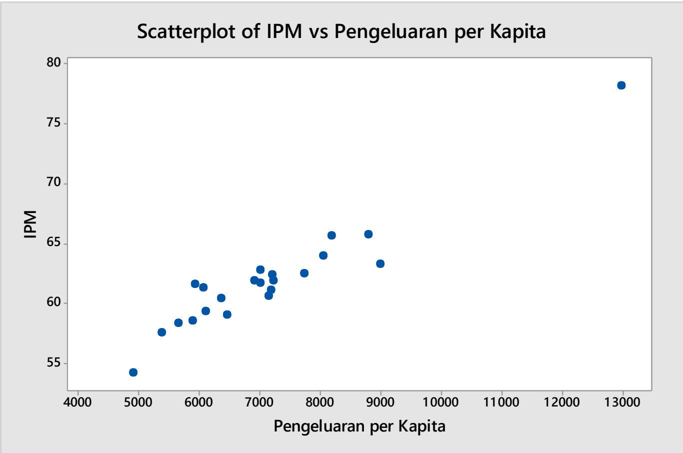




Gambar 3.1.
***Flowchart* Metodologi Penelitian**

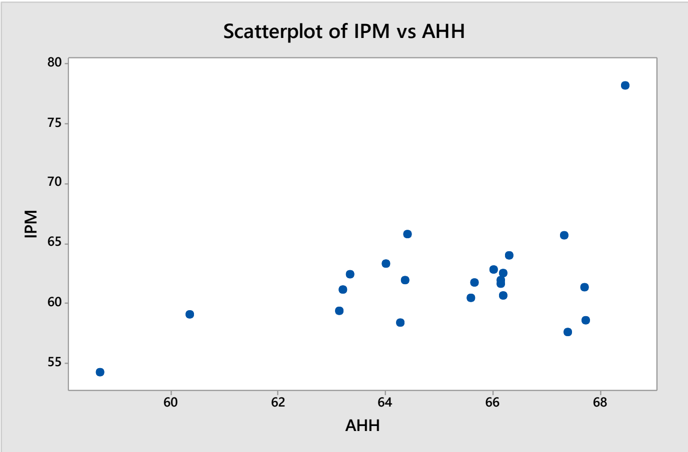
3.2. *Scatterplot* Data

Untuk mengetahui data yang dimiliki apakah termasuk kedalam komponen parametrik atau komponen nonparametrik, maka terlebih dahulu dibuat *scatterplot* antara variabel respon dan variabel prediktor. Sebuah variabel prediktor dikatakan sebagai komponen parametrik apabila *scatterplot* antara variabel respon dan variabel prediktor membentuk pola data tertentu. Contoh *scatterplot* yang menunjukkan komponen parametrik dapat dilihat pada Gambar 3.2. sebagai berikut.



Gambar 3.2.
***Scatterplot* Komponen Parametrik**

Sebuah variabel prediktor dikatakan sebagai komponen nonparametrik apabila *scatterplot* antara variabel respon dan variabel prediktor tidak membentuk pola data tertentu. Contoh *scatterplot* yang menunjukkan komponen nonparametrik dapat dilihat pada Gambar 3.3. sebagai berikut.



Gambar 3.3.
***Scatterplot* Komponen Nonparametrik**

3.3. Regresi Semiparametrik *Spline*

Regresi semiparametrik *spline* merupakan suatu metode statistika untuk menganalisis hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor yang sebagian bentuk kurva dari hubungan antara variabel tersebut diketahui bentuknya dan sebagian lagi tidak diketahui bentuknya, dimana kurva yang tidak diketahui bentuknya didekati oleh fungsi *spline*. Jika $f(z)$ pada model regresi semiparametrik pada persamaan (2.26) didekati oleh model *spline*, maka diperoleh

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{t} \beta_j X_{ji} + \sum_{m=0}^{p} \alpha_m Z_i^m + \sum_{h=1}^{K} \gamma_h (Z_i - k_h)_+^m + \varepsilon_i,\ \ i = 1,2,\cdots,n \quad (3.1)$$

dengan

Y_i : variabel respon data ke-i

β_0 : konstanta model

β_j : parameter yang tidak diketahui

X_{ji} : variabel prediktor ke-j dari data ke-i untuk komponen parametrik

t : banyaknya variabel prediktor komponen parametrik

α_m : koefisien dari variabel z_i^m

Z_i^m : variabel prediktor data ke-i untuk komponen nonparametrik

m : orde fungsi *spline*

γ_h : koefisien pada variabel z_i^m *truncted knot* ke-*h* pada *spline* berorde *p*

k_h : *knot* ke-*h* variabel z_i^m

h : banyaknya knot dalam variabel prediktor data ke-*i*

ε_i : galat ke-*i* yang diasumsikan berdistribusi $N\sim(0,\sigma^2)$

Persamaan (3.1) merupakan model regresi semiparametrik *spline* dengan satu variabel prediktor dari komponen nonparametrik. Jika variabel prediktor dari komponen nonparametrik yang digunakan sebanyak *s*, maka regresi semiparametrik *spline* memiliki bentuk umum model sebagai berikut

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{t} \beta_j X_{ji} + \sum_{q=1}^{s} \left(\sum_{m=0}^{p} \alpha_{mq} Z_{qi}^m + \sum_{h=1}^{K} \gamma_{hq} \left(Z_{qi} - k_h\right)_+^m \right) + \varepsilon_i \quad (3.2)$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, maka diperoleh bentuk sebagai berikut.

$$Y = X\beta + Z\theta + \varepsilon \quad (3.3)$$

dimana

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{t1}\\1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{t2}\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{tn}\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\vdots\\\beta_t\end{bmatrix},\ \text{dan } \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$Z^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\Z_{s1} & Z_{s2} & \cdots & Z_{sn}\\Z_{11}^p & Z_{12}^p & \cdots & Z_{1n}^p\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\Z_{s1}^p & Z_{s2}^p & \cdots & Z_{sn}^p\\(Z_{11}-k_1)^p & (Z_{12}-k_1)^p & \cdots & (Z_{1n}-k_1)^p\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(Z_{11}-k_K)^p & (Z_{12}-k_K)^p & \cdots & (Z_{1n}-k_K)^p\\(Z_{s1}-k_1)^p & (Z_{s2}-k_1)^p & \cdots & (Z_{sn}-k_1)^p\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(Z_{s1}-k_K)^p & (Z_{s2}-k_K)^p & \cdots & (Z_{sn}-k_K)^p\end{bmatrix}\quad \text{dan}\quad \omega=\begin{bmatrix}\varphi\\\alpha_{11}\\\vdots\\\alpha_{1s}\\\alpha_{p1}\\\vdots\\\alpha_{ps}\\\gamma_{11}\\\vdots\\\gamma_{K1}\\\gamma_{1s}\\\vdots\\\gamma_{Ks}\end{bmatrix}$$

3.4. Regresi Semiparametrik *Spline* Linear

Regresi semiparametrik *spline* linear adalah regresi semiparametrik dengan fungsi *spline* berorde satu. Berdasarkan bentuk umum model regresi semiparametrik *spline* maka model regresi semiparametrik *spline* linear deng *K* titik knot adalah sebagai berikut.

$$Y_i=\beta_0+\sum_{j=1}^{t}\beta_j X_{ji}+\sum_{q=1}^{s}\left(\alpha_{0q}+\alpha_{1q}Z_{qi}^1+\sum_{h=1}^{K}\gamma_{hq}\left(Z_{qi}-k_h\right)_+^1\right)+\varepsilon_i$$

atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$Y_i=\beta_0+\sum_{j=1}^{t}\beta_j X_{ji}+\sum_{q=1}^{s}\left(\alpha_{0q}+\alpha_{1q}Z_{qi}+\sum_{h=1}^{K}\gamma_{hq}\left(Z_{iq}-k_h\right)_+\right)+\varepsilon_i \tag{3.4}$$

Model regresi semiparametrik *spline* linear dengan satu titik knot adalah sebagai berikut.

$$Y_i=\beta_0+\sum_{j=1}^{t}\beta_j X_{ji}+\sum_{q=1}^{s}\left(\alpha_{0q}+\alpha_{1q}Z_{qi}+\gamma_{1q}\left(Z_{iq}-k_1\right)_+\right)+\varepsilon_i \tag{3.5}$$

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_tX_{ti}+\alpha_{01}+\alpha_{11}Z_{1i}+\gamma_{11}(Z_{1i}-k_1)_++\alpha_{12}Z_{2i}$$
$$+\gamma_{12}(Z_{2i}-k_1)_++\cdots+\alpha_{1s}Z_{si}+\gamma_{1s}(Z_{si}-k_1)_++\varepsilon_i$$

$$Y_i=(\beta_0+\alpha_{01}+\alpha_{02}+\cdots+\alpha_{0s})+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_tX_{ti}+\alpha_{11}Z_{1i}+\alpha_{12}Z_{2i}$$
$$+\cdots+\alpha_{1s}Z_{si}+\gamma_{11}(Z_{1i}-k_1)_++\gamma_{12}(Z_{2i}-k_1)_++\cdots+\gamma_{1s}(Z_{si}-k_1)_++\varepsilon_i$$

$$Y_i=\varphi+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_tX_{ti}+\alpha_{11}Z_{1i}+\alpha_{12}Z_{2i}+\cdots+\alpha_{1s}Z_{si}$$
$$+\gamma_{11}(Z_{1i}-k_1)_++\gamma_{12}(Z_{2i}-k_1)_++\cdots+\gamma_{1s}(Z_{si}-k_1)_++\varepsilon_i \tag{3.6}$$

3.5. Regresi Semiparametrik *Spline* Kuadratik

Regresi semiparametrik *spline* kuadratik adalah regresi semiparametrik dengan fungsi *spline* berorde dua. Berdasarkan bentuk umum model regresi semiparametrik *spline*, maka model regresi semiparametrik *spline* kuadratik dengan K titik knot adalah sebagai berikut.

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{t} \beta_j X_{ji} + \sum_{q=1}^{s} \left(\alpha_{0q} + \alpha_{1q} Z_{qi} + \alpha_{2q} Z_{qi}^2 + \sum_{h=1}^{K} \gamma_{hq} \left(Z_{qi} - k_h\right)_+^2\right) + \varepsilon_i \quad (3.7)$$

Model regresi semiparametrik *spline* kuadratik dengan satu titik knot adalah sebagai berikut.

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{t} \beta_j X_{ji} + \sum_{q=1}^{s} \left(\alpha_{0q} + \alpha_{1q} Z_{qi} + \alpha_{2q} Z_{qi}^2 + \gamma_{1q}\left(Z_{qi} - k_1\right)_+^2\right) + \varepsilon_i \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_t X_{ti} + \alpha_{01} + \alpha_{11} Z_{1i} + \alpha_{21} Z_{1i}^2 + \gamma_{11}(Z_{1i} - k_1)_+^2 \\ &\quad + \alpha_{02} + \alpha_{12} Z_{2i} + \alpha_{22} Z_{2i}^2 + \gamma_{12}(Z_{2i} - k_1)_+^2 + \cdots + \alpha_{0s} + \alpha_{1s} Z_{si} + \alpha_{2s} Z_{si}^2 \\ &\quad + \gamma_{1s}(Z_{si} - k_1)_+^2 + \varepsilon_i \\ Y_i &= (\beta_0 + \alpha_{01} + \alpha_{02} + \cdots + \alpha_{0s}) + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_t X_{ti} + \alpha_{11} Z_{1i} + \alpha_{12} Z_{2i} \\ &\quad + \cdots + \alpha_{1s} Z_{si} + \alpha_{21} Z_{1i}^2 + \alpha_{22} Z_{2i}^2 + \cdots + \alpha_{2s} Z_{si}^2 + \gamma_{11}(Z_{1i} - k_1)_+^2 \\ &\quad + \gamma_{12}(Z_{2i} - k_1)_+^2 + \cdots + \gamma_{1s}(Z_{si} - k_1)_+^2 + \varepsilon_i \\ Y_i &= \varphi + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_t X_{ti} + \alpha_{11} Z_{1i} + \alpha_{12} Z_{2i} + \cdots + \alpha_{1s} Z_{si} + \alpha_{21} Z_{1i}^2 \\ &\quad + \alpha_{22} Z_{2i}^2 + \cdots + \alpha_{2s} Z_{si}^2 + \gamma_{11}(Z_{1i} - k_1)_+^2 + \gamma_{12}(Z_{2i} - k_1)^2{}_+ + \cdots \\ &\quad + \gamma_{s1}(Z_{si} - k_1)^2{}_+ + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.6. Regresi Semiparametrik *Spline* Kubik

Regresi semiparametrik *spline* kubik adalah regresi semiparametrik dengan fungsi *spline* berorde tiga. Berdasarkan bentuk umum model regresi semiparametrik *spline* maka model regresi semiparametrik *spline* kubik dengan K titik knot adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_0 + \sum_{j=1}^{t} \beta_j X_{ji} \\ &\quad + \sum_{q=1}^{s} \left(\alpha_{0q} + \alpha_{1q} Z_{qi} + \alpha_{2q} Z_{qi}^2 + \alpha_{3q} Z_{qi}^3 + \sum_{h=1}^{K} \gamma_{hq} \left(Z_{qi} - k_h\right)^3{}_+\right) + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

Model regresi semiparametrik *spline* kubik dengan satu titik knot adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_0 + \sum_{j=1}^{t} \beta_j X_{ji} \\ &\quad + \sum_{q=1}^{s} \left(\alpha_{0q} + \alpha_{1q} Z_{qi} + \alpha_{2q} Z_{qi}^2 + \alpha_{3q} Z_{qi}^3 + \gamma_{1q}\left(Z_{qi} - k_1\right)^3{}_+\right) + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_t X_{ti} + \alpha_{01} + \alpha_{11} Z_{1i} + \alpha_{21} Z_{1i}^2 + \alpha_{31} Z_{1i}^3$$
$$+\gamma_{11}(Z_{1i} - k_1)_+^3 + \alpha_{02} + \alpha_{12} Z_{2i} + \alpha_{22} Z_{2i}^2 + \alpha_{32} Z_{2i}^3 + \gamma_{12}(Z_{2i} - k_1)_+^3$$
$$+ \cdots + \alpha_{0s} + \alpha_{1s} Z_{si} + \alpha_{2s} Z_{si}^2 + \alpha_{3s} Z_{si}^3 + \gamma_{1s}(Z_{si} - k_1)_+^3 + \varepsilon_i$$
$$Y_i = (\beta_0 + \alpha_{01} + \alpha_{02} + \cdots + \alpha_{0s}) + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_t X_{ti} + \alpha_{11} Z_{1i} + \alpha_{12} Z_{2i}$$
$$+ \cdots + \alpha_{1s} Z_{si} + \alpha_{21} Z_{1i}^2 + \alpha_{22} Z_{2i}^2 + \cdots + \alpha_{2s} Z_{si}^2 + \alpha_{31} Z_{1i}^3 + \alpha_{32} Z_{2i}^3 + \cdots$$
$$+\alpha_{3s} Z_{si}^3 + \gamma_{11}(Z_{1i} - k_1)_+^3 + \gamma_{12}(Z_{2i} - k_1)_+^3 + \cdots + \gamma_{1s}(Z_{si} - k_1)_+^3 + \varepsilon_i$$
$$Y_i = \varphi + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_t X_{ti} + \alpha_{11} Z_{1i} + \alpha_{12} Z_{2i} + \cdots + \alpha_{1s} Z_{si} + \alpha_{21} Z_{1i}^2$$
$$+\alpha_{22} Z_{2i}^2 + \cdots + \alpha_{2s} Z_{si}^2 + \alpha_{31} Z_{1i}^3 + \alpha_{32} Z_{2i}^3 + \cdots + \alpha_{3s} Z_{si}^3 + \gamma_{11}(Z_{1i} - k_1)_+^3$$
$$+\gamma_{12}(Z_{2i} - k_1)_+^3 + \cdots + \gamma_{1s}(Z_{si} - k_1)_+^3 + \varepsilon_i \qquad (3.12)$$

3.7. Pemilihan Titik Knot Optimal

Titik knot merupakan titik perpaduan bersama dimana terdapat perubahan pola perilaku fungsi atau kurva (Sugiantari dan Budiantara, 2013, hlm. D-38). Titik knot yang optimal dihasilkan dari nilai *Generalized Cross Validation* (GCV) yang minimum. *Generalized Cross Validation* (GCV) merupakan modifikasi dari metode *Cross Validation* (CV) dan merupakan metode yang paling banyak dipakai dan disukai karena memiliki sifat optimal asimtotik (Pratiwi, 2016, hlm. 14). Menurut Eubank (1999, hlm. 43), fungsi GCV didefinisikan sebagai berikut.

$$GCV(p; k_1, k_2, \dots, k_K) = \frac{n^{-1} RSS}{\left[n^{-1} trace\left(I - H(p; k_1, k_2, \dots, k_K)\right)\right]^2} \qquad (3.13)$$

dimana *trace* adalah hasil penjumlahan diagonal utama matriks $I - H$, I adalah matriks identitas, *n* adalah jumlah pengamatan, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_K)$ adalah titik-titik knot, $H(p; k_1, k_2, \dots, k_K)$ merupakan matriks HAT, yaitu

$$H(p; k_1, \dots, k_K) = C(C^T C)^{-1} C^T \qquad (3.14)$$

dimana C adalah matriks gabungan variabel prediktor komponen parametrik dan nonparametrik yang sudah dilengkapi titik knot, dan

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (3.15)$$

3.8. Penaksiran Parameter Regresi Semiparametrik *Spline*

Dengan menggunakan bentuk matriks dari regresi semiparametrik *spline* seperti pada persamaan (3.3), yaitu

$$Y = X\beta + Z\theta + \varepsilon$$

dimana

Y : matriks variabel respon berukuran $n \times 1$

X : matriks komponen parametrik berukuran $n \times t$

Z : matriks komponen nonparametrik berukuran $n \times q$

β : matriks parameter komponen parametrik berukuran $t \times 1$

θ : matriks parameter komponen nonparametrik berukuran $q \times 1$

ε : matriks galat berukuran $n \times 1$

Selanjutnya, ditentukan $C = [X \quad Z]$ dan $\omega = \begin{bmatrix} \beta \\ \theta \end{bmatrix}$ sehingga persamaan (3.3) dapat dinyatakan oleh

$$Y = C\omega + \varepsilon \tag{3.16}$$

(Wibowo, Haryatmi, dan Budiantara, 2013, hlm. 104).

Berdasarkan persamaan (3.16) maka diperoleh persamaan matriks untuk residual sebagai berikut.

$$\varepsilon = Y - C\omega \tag{3.17}$$

Selanjutnya didefinisikan kuadrat residual, yaitu :

$$\begin{aligned} \varepsilon^T\varepsilon &= (Y - C\omega)^T(Y - C\omega) \\ &= Y^TY - Y^TC\omega - (C\omega)^TY + (C\omega)^TC\omega \\ \varepsilon^T\varepsilon &= Y^TY - 2Y^TC\omega + \omega^TC^TC\omega \end{aligned} \tag{3.18}$$

Penaksir ω diperoleh dengan meminimumkan persamaan (3.18) terhadap ω. Oleh karena itu, persamaan (3.18) diturunkan terhadap ω sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon^T\varepsilon)}{\partial\omega} &= \frac{\partial(Y^TY - 2Y^TC\omega + \omega^TC^TC\omega)}{\partial\omega} \\ &= 0 - (2Y^TC)^T + (C^TC\omega + (\omega^TC^TC)^T) \\ &= -2C^T(Y^T)^T + (C^TC\omega + C^T(\omega^TC^T)^T) \\ &= -2C^TY + (C^TC\omega + C^T(C^T)^T(\omega^T)^T) \\ &= -2C^TY + (C^TC\omega + C^TC\omega) \\ \frac{\partial(\varepsilon^T\varepsilon)}{\partial\omega} &= -2C^TY + 2C^TC\omega \end{aligned}$$

kemudian menyamakan hasil turunannya dengan nol

$$\begin{aligned} -2C^TY + 2C^TC\omega &= 0 \\ 2C^TC\omega &= 2C^TY \end{aligned}$$

$$C^T C\omega = C^T Y$$
$$(C^T C)^{-1}(C^T C)\omega = (C^T C)^{-1} C^T Y$$
$$\hat{\omega} = (C^T C)^{-1} C^T Y$$

sehingga penaksir kuadrat terkecil untuk ω adalah

$$\hat{\omega} = (C^T C)^{-1} C^T Y \tag{3.19}$$

Menurut Wibowo, Haryatmi, dan Budiantara (2013, hlm. 104), mengingat persamaan (3.2), penaksir (3.19) berlaku hanya untuk derajat polinomial p dan banyak knot k yang tertentu maka lebih tepat jika penaksir ini dinyatakan dengan

$$\hat{\omega}_{p,k} = (C^T C)^{-1} C^T Y \tag{3.20}$$
$$\hat{Y} = C\hat{\omega}_{p,k} = C(C^T C)^{-1} C^T Y$$
$$\hat{Y} = H(p; k_1, \dots, k_K)Y$$

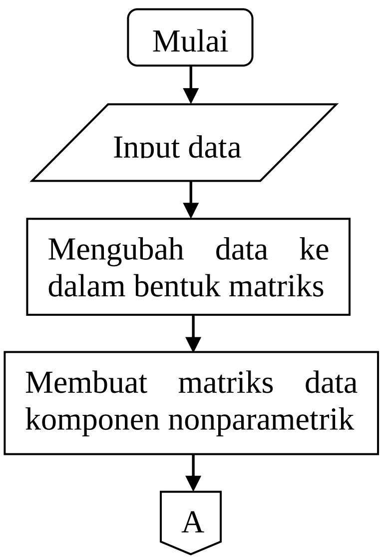
dengan $H(p; k_1, \dots, k_K) = C(C^T C)^{-1} C^T$.

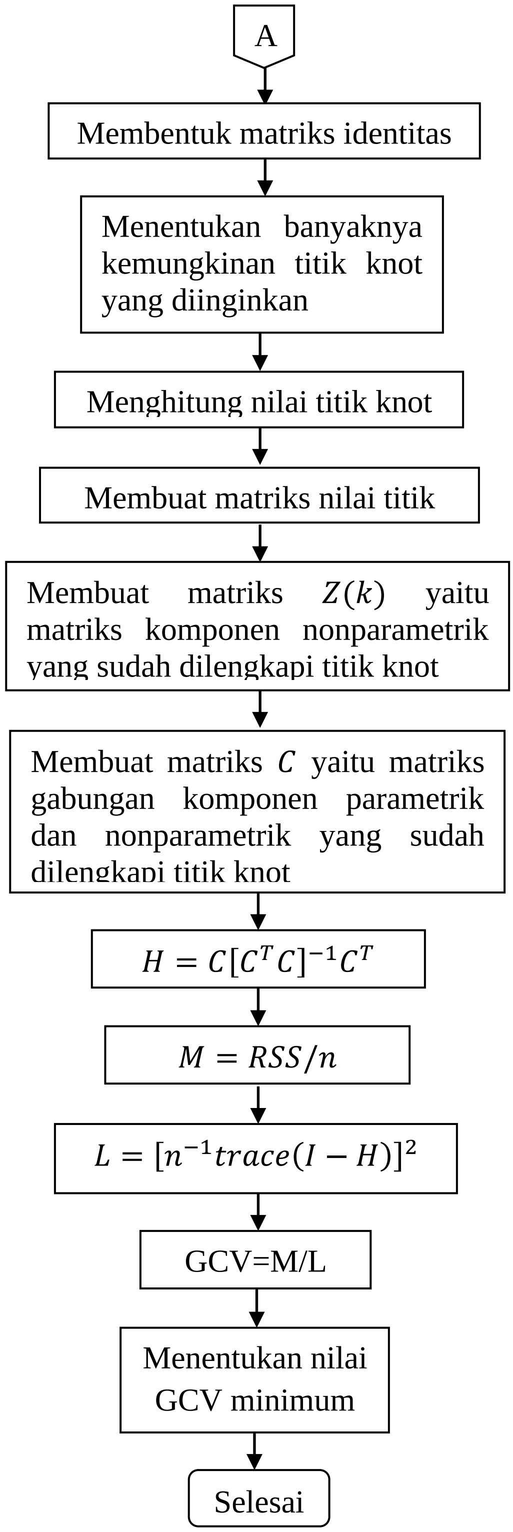
3.9. *Flowchart* Pemrograman

Flowchart pemrograman dibuat untuk mempermudah penulisan *coding* dalam mencari titik knot optimal dan penaksiran parameter beserta uji signifikansi parameter dengan menggunakan bahasa pemrograman R.

3.9.1. *Flowchart* Pemilihan Titik Knot Optimal Berdasarkan Nilai GCV Minimum

Langkah-langkah pemilihan titik knot optimal berdasarkan nilai GCV minimum digambarkan mealalui *flowchart* pada Gambar 3.4.

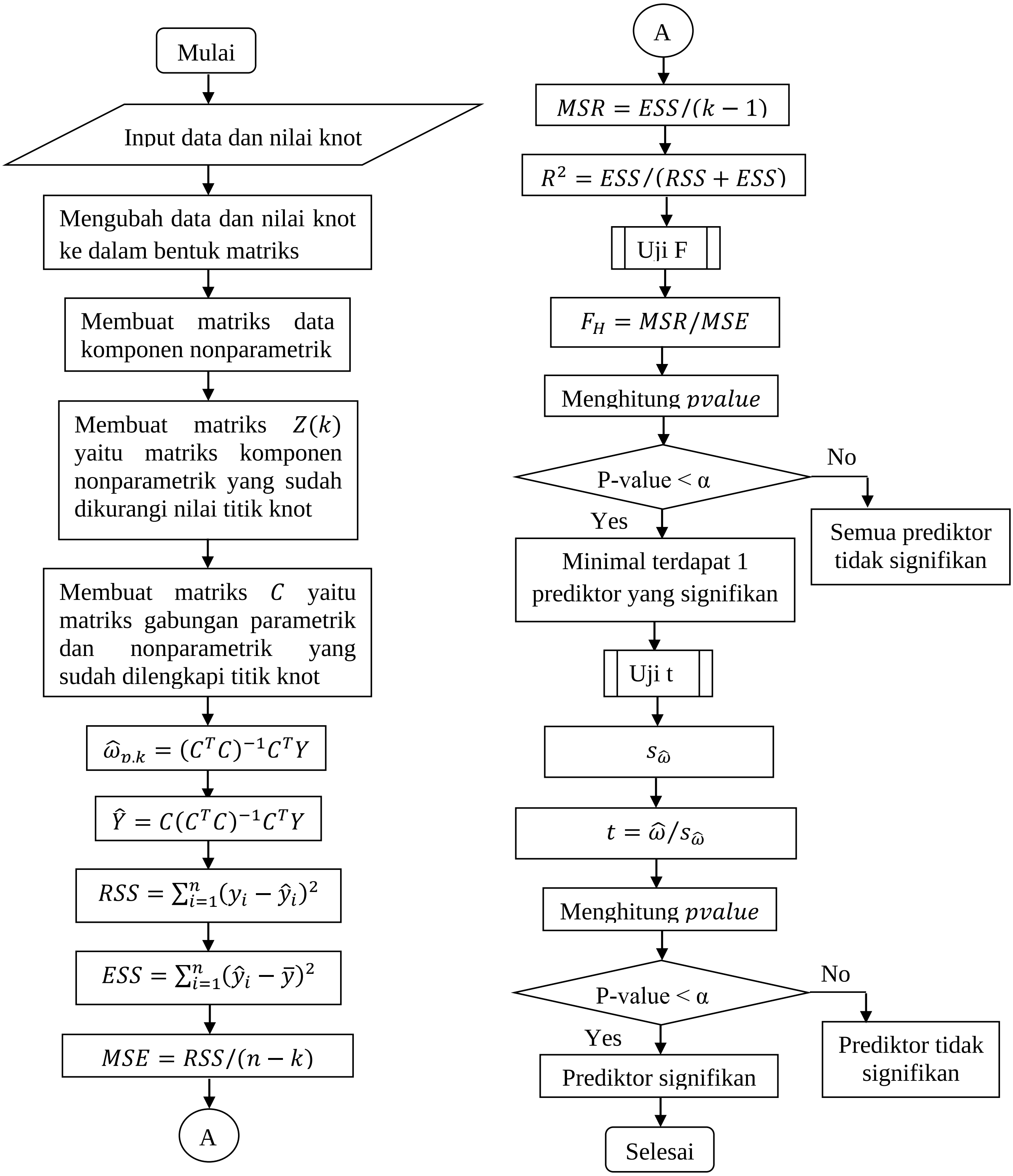




Gambar 3.4.
***Flowchart* Mencari Titik Knot Optimal**

3.9.2. *Flowchart* Penaksiran Parameter dan Uji Signifikansi Parameter

Langkah-langkah pemilihan titik knot optimal berdasarkan nilai GCV minimum digambarkan melalui *flowchart* pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5.
***Flowchart* Penaksiran Parameter dan Uji Signifikansi Parameter**