BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Regresi Spasial

Sering kali dalam analisis regresi ditemukan pola spasial (lokasi) yang memengaruhi model. Hal ini apabila diabaikan akan menghasilkan kesimpulan yang kurang tepat karena terdapat pelanggaran asumsi dalam model. Regresi spasial dapat digunakan sebagai salah satu solusi dalam pemodelan data yang terdapat unsur spasial didalamnya. Lebih lanjut, regresi spasial merupakan salah satu metode statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel dependen dan variabel independen dengan mempertimbangkan keterkaitan lokasi atau spasial (Dona & Setiawan, 2015). Hal ini sebagaimana dikemukakan dalam hukum geografi pertama Tobler (1979) dalam Anselin (1988), "*Everything is related to everything else, but near things are more related to each other*", yang berarti bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang lebih dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh.

Secara umum, Anselin (1988) menyatakan persamaan regresi spasial sebagai berikut:

$$Y = \rho W_1 Y + X\beta + u \tag{3.1}$$

$$u = \lambda W_2 u + \varepsilon \tag{3.2}$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

dengan

Y merupakan vektor variabel dependen berukuran $(n \; x \; 1)$

ρ merupakan koefisien spasial lag dari variabel dependen,

X merupakan matriks variabel independen berukuran $n \; x \; (k+1)$,

β merupakan vektor parameter koefisien regresi berukuran $(k+1) \; x \; 1$,

λ merupakan koefisien spasial lag pada *error*,

u merupakan vektor *error* pada persamaan (3.1) berukuran $(n \; x \; 1)$,

ε merupakan vektor *error* pada persamaan (3.2) berukuran $(n \; x \; 1)$,

W_1,W_2 merupakan matriks pembobot berukuran $(n \; x \; n)$.

Berdasarkan persamaan (3.1), dapat dibentuk beberapa model regresi spasial sebagai berikut:

- Jika $\rho = 0$ dan $\lambda = 0$, maka persamaan (3.1) menjadi:

$$Y = X\beta + u \tag{3.3}$$

model tersebut merupakan model regresi linear klasik tanpa ada pengaruh spasial.

- Jika $\rho \neq 0$ dan $\lambda = 0$, maka persamaan (3.1) menjadi:

$$Y = \rho W_1 Y + X\beta + u \tag{3.4}$$

model tersebut merupakan model *spatial autoregressive* (SAR) atau spasial lag.

- Jika $\rho = 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka persamaan (3.1) menjadi:

$$Y = X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon \tag{3.5}$$

model tersebut merupakan model *spatial autoregressive disturbance* atau biasa disebut *spatial error model* (SEM)

- Jika $\rho \neq 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka persamaan (3.1) menjadi:

$$Y = \rho W_1 Y + X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon \tag{3.6}$$

model tersebut merupakan model *Spatial Autoregressive With Autoregressive Disturbances* (SARAR).

3.2 Spatial Autoregressive (SAR)

Model *Spatial Autoregressive* (SAR) merupakan model gabungan antara model regresi linear dengan lag spasial pada variabel dependen dengan menggunakan data *cross section* (Anselin, 1988).

Secara umum, bentuk umum model SAR pada persamaan (3.4) adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Jika dituliskan kembali dalam bentuk persamaan adalah sebagai berikut:

$$Y = \rho W_1 Y + X\beta + u$$

$$u \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$$

dengan

Y merupakan vektor variabel dependen berukuran $(n \; x \; 1)$

ρ merupakan koefisien spasial lag dari variabel dependen

X merupakan matriks variabel independen berukuran $n \; x \; (k+1)$

β merupakan vektor parameter koefisien regresi berukuran $(k+1) \; x \; 1$

u merupakan vektor *error* pada persamaan (3.4) berukuran $(n \; x \; 1)$

W_1 merupakan matriks pembobot berukuran $(n \; x \; n)$

LeSage (1998) menyatakan jika parameter X dan W_2 pada persamaan (3.6) bernilai nol, maka akan diperoleh model sebagai berikut:

$$Y = \rho W_1 Y + \varepsilon \quad (3.7)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Model (3.7) tersebut menjelaskan variasi dalam Y sebagai kombinasi linear dari unit yang bertetangga tanpa variabel penjelas lainnya. Model ini disebut *autoregression spatial*, karena merupakan analogi spasial dengan model *autoregressive* orde pertama dari analisis runtun waktu $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$, dimana observasi di waktu sebelumnya menjelaskan variasi Y_t. Hal ini menunjukkan bahwa model *spatial autoregressive* (SAR) adalah perluasan dari model *autoregressive* (AR).

Menurut LeSage & Pace (2009), model *spatial autoregressive* terjadi akibat adanya unsur ketergantungan nilai variabel dependen antar lokasi. Parameter ρ menjelaskan seberapa besar ketergantungan spasial dari sampel yang diobservasi. Parameter yang ditaksir pada model SAR adalah parameter β, σ dan tentunya parameter ρ. Jika parameter ρ bernilai nol, maka tidak terdapat ketergantungan spasial di dalam data *cross-sectional* observasi Y.

3.3 Penaksir Parameter *Spatial Autoregressive* (SAR)

Bentuk lain dari persamaan (3.4) dapat dinyatakan sebagai

$$u = Y - \rho W Y - X\beta \quad (3.8)$$

$$u = (I - \rho W)Y - X\beta \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9), diperoleh nilai dari Jacobian yaitu:

$$J = \left| \frac{du}{dY} \right| = |I - \rho W|$$

Penaksir parameter pada model ini menggunakan metode kemungkinan maksimum (*Maksimum Log Likelihood*). Analisa pada model SAR melibatkan u_i yang merupakan galat spasial pada lokasi ke-i yang diasumsikan berdistribusi normal, homogen, identik dengan nilai tengah nol dan ragam σ^2I.

Fungsi kepadatan peluang dari u_i dinyatakan sebagai:

$$f(u_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} exp\left[-\frac{u_i^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.10}$$

Fungsi kepadatan peluang bersama dari n variabel acak $u_1, u_2, \dots, u_n$ adalah:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_1).f(u_2) \dots .f(u_n) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} exp\left[-\frac{u_1^2}{2\sigma^2}\right]\right)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} exp\left[-\frac{u_2^2}{2\sigma^2}\right]\right) \dots \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} exp\left[-\frac{u_n^2}{2\sigma^2}\right]\right) \\ &= \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{u^T u}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Fungsi kepadatan peluang bersama dari n variabel dependen Y adalah:

$$\begin{aligned} f(Y) &= f(u))|\,\mathrm{J}\,| \\ &= \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{u^T u}{2\sigma^2}\right] \left|\frac{du}{dY}\right| \\ &= \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2}\right] |\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sehingga, fungsi kepadatan peluang variabel dependen dinyatakan sebagai:

$$f(Y;\ \beta,\rho,\sigma^2) = \frac{|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2}\right] \tag{3.13}$$

Penaksir parameter diperoleh dengan memaksimalkan logaritma natural dari fungsi kepadatan peluang, sehingga fungsi log-*Likelihood* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} ln\, f(Y;\ \beta,\rho,\sigma^2) &= ln\left(\frac{|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2}\right]\right) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - nln\sigma + ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| - \frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - nln\sigma + ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| - \frac{((I-\rho W)Y-X\beta)^T((I-\rho W)Y-X\beta)}{2\sigma^2} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Atau dapat tuliskan

$$\begin{aligned} ln\, f(Y;\ \beta,\rho,\sigma^2) &= ln\left(\frac{|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2}\right]\right) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - nln\sigma + ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| - \frac{((I-\rho W)Y-X\beta)^T((I-\rho W)Y-X\beta)}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\Pi)-\frac{n}{2}ln\sigma^2+ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|-\frac{1}{2\sigma^2}[Y^T(I-\rho W)^T(I-\rho W)Y-\beta^TX^T(I-\rho W)Y-Y^T(I-\rho W)^TX\beta+\beta^TX^TX\beta]$$

Karena $\beta^TX^T(I-\rho W)Y$ adalah matriks berukuran $(1\ x\ 1)$ dan $(\beta^TX^T(I-\rho W)Y)^T=Y^T(I-\rho W)^TX\beta$ menghasilkan nilai skalar yang sama, sehingga:

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\Pi)-\frac{n}{2}ln\sigma^2+ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|-\frac{1}{2\sigma^2}[Y^T(I-\rho W)^T(I-\rho W)Y-\beta^TX^T(I-\rho W)Y-\beta^TX^T(I-\rho W)Y+\beta^TX^TX\beta]$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\Pi)-\frac{n}{2}ln\sigma^2+ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|-\frac{1}{2\sigma^2}[Y^T(I-\rho W)^T(I-\rho W)Y-2\beta^TX^T(I-\rho W)Y+\beta^TX^TX\beta] \quad (3.19)$$

Penaksir untuk β diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(ln\ f(Y;\ \beta,\rho,\sigma^2))=0$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(-2X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y+\left(\hat{\beta}^TX^TX\right)^T+X^TX\hat{\beta}\right)=0$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(-2X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y+X^TX\hat{\beta}+X^TX\hat{\beta}=0$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(-2X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y+2X^TX\hat{\beta}=0$$

$$\frac{2}{2\sigma^2}(X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y-X^TX\hat{\beta})=0$$

$$X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y-X^TX\hat{\beta}=0$$

$$X^TX\hat{\beta}=X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y$$

$$(X^TX)^{-1}X^TX\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y$$

$$\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^T(\mathrm{I}-\rho\mathrm{W})Y$$

$$\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY-(X^TX)^{-1}X^T\rho WY \quad (3.15)$$

Penaksir untuk σ^2 diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}(ln\ f(Y;\ \beta,\rho,\sigma^2))=0$$

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2}+\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\left[\left((I-\rho W)Y-X\beta\right)^T\left((I-\rho W)Y-X\beta\right)\right]=0$$

$$\frac{-n\hat{\sigma}^2+\left((I-\rho W)Y-X\beta\right)^T\left((I-\rho W)Y-X\beta\right)}{2\hat{\sigma}^4}=0$$

$$-n\hat{\sigma}^2+\left((I-\rho W)Y-X\beta\right)^T\left((I-\rho W)Y-X\beta\right)=0$$

$$n\hat{\sigma}^2 = ((I-\rho W)Y - X\beta)^T((I-\rho W)Y - X\beta)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{((I-\rho W)Y-X\beta)^T((I-\rho W)Y-X\beta)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{n} \quad (3.16)$$

Penaksir untuk ρ diperoleh sebagai berikut :

Menurut LeSage & Pace (2009, hlm. 48), estimasi parameter $\hat{p}$ dapat menggunakan optimalisasi fungsi dari persamaan $\hat{\beta}$.

$$\begin{aligned}
ln\, f(Y;\beta,\rho,\sigma^2) &= ln\left(\frac{|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|}{(2\Pi)^{n/2}\sigma^n} exp\left[-\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2}\right]\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - nln\sigma + ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| - \frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2} \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - \frac{n}{2}ln\sigma^2 + ln\,|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| - \frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai dari taksiran parameter σ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
ln\, f(Y;\beta,\rho,\sigma^2) &= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - \frac{n}{2}ln\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{n} + ln|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| \\
&\quad - \frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{2\frac{(Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)}{n}}
\end{aligned}$$

Dengan menyederhanakan dan menggunakan sifat dari logaritma, diperoleh:

$$\begin{aligned}
ln\, f(Y;\beta,\rho,\sigma^2) &= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - \frac{n}{2}\ln((Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)) \\
&\quad -\frac{n}{2}\ln n + ln\,|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| - \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

misalkan c = $-\frac{n}{2}\ln(2\Pi) - \frac{n}{2}\ln n - \frac{n}{2}$, maka:

$$\begin{aligned}
ln\, f(Y;\beta,\rho,\sigma^2) &= \mathrm{c} - \frac{n}{2}\ln((Y-\rho WY-X\beta)^T(Y-\rho WY-X\beta)) + ln\,|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| \\
&= \mathrm{c} - \frac{n}{2}\ln(\left(Y-\rho WY - X(\beta_{OLS} - \rho\beta_{Lag})\right)^T \\
&\quad \left(Y-\rho WY - X(\beta_{OLS} - \rho\beta_{Lag}))\right) + ln\,|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}| \\
&= \mathrm{c} - \frac{n}{2}\ln\left((\varepsilon_{OLS} - \rho\varepsilon_{Lag}\right)^T\left(\varepsilon_{OLS} - \rho\varepsilon_{Lag})\right) + ln\,|\mathrm{I}-\rho\mathrm{W}|
\end{aligned}$$

(3.17)

Keterangan:

$\varepsilon_{OLS} = Y - X\beta_{OLS}$

$\varepsilon_{Lag} = WY - X\beta_{Lag}$

$\beta_{OLS} = (X^TX)^{-1}X^TY$

$\beta_{Lag} = (X^TX)^{-1}X^TWY$

Dengan menghitung nilai log likelihood pada persamaan (3.17), maka akan diperoleh nilai taksiran dari ρ, yaitu $\hat{\rho}$.

3.4 Uji Signifikansi Parameter

Uji signifikansi parameter adalah sebuah uji untuk mengetahui apakah parameter layak untuk digunakan atau tidak pada sebuah model. Pada model SAR, parameter yang harus diuji adalah β dan ρ.

Menurut Anselin (1988), salah satu uji signifikansi parameter yang dapat digunakan adalah uji Wald. Adapun Wasserman (2006, hlm. 153) mendefinisikan:

$$W = \frac{\hat{\theta}}{\widehat{se}(\hat{\theta})} \sim N(0,1) \qquad (3.18)$$

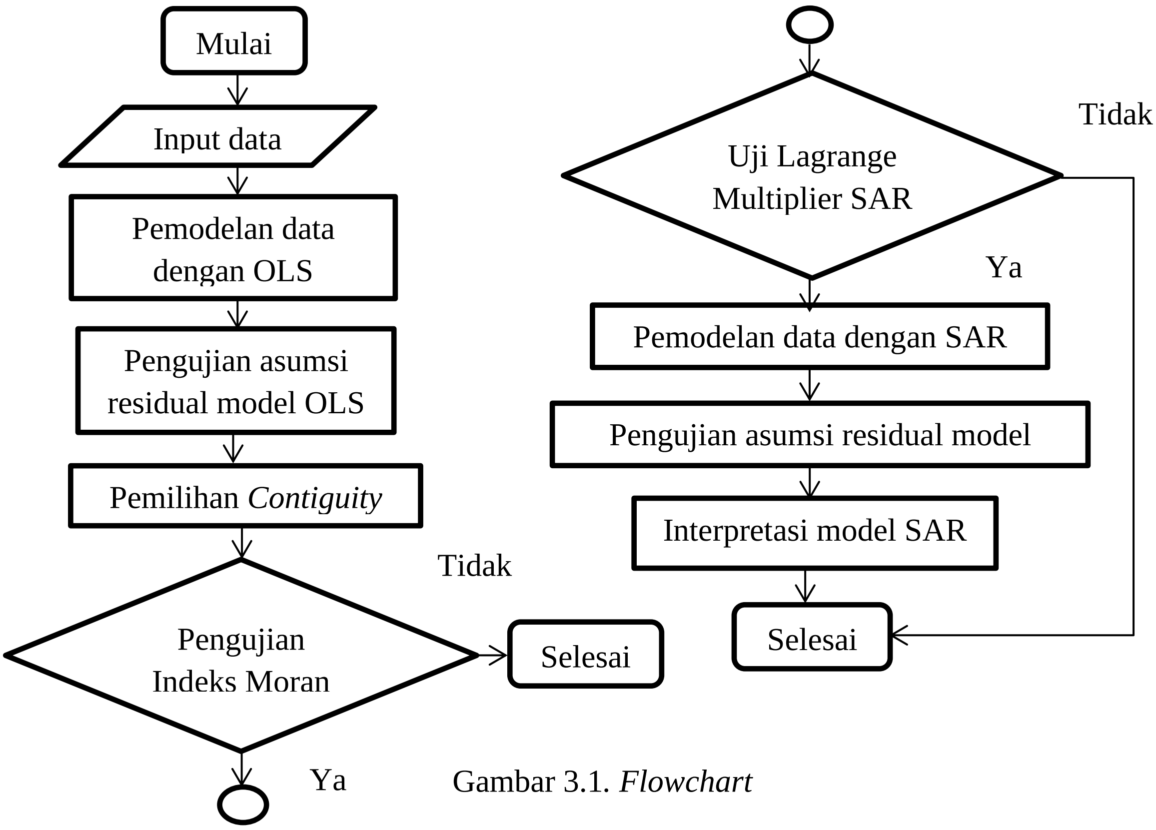
dimana

$\hat{\theta}$ adalah parameter yang ditaksir (β dan ρ).

$\widehat{se}(\hat{\theta})$ adalah standar *error* parameter yang ditaksir (β dan ρ).

dengan hipotesis H_0: $\hat{\theta}=0$ melawan H_1: $\hat{\theta}\neq 0$, Tolak H_0 jika $|W| > z_{\alpha/2}$ atau *p-value* < α/2. Hal ini berarti koefisien regresi layak untuk digunakan pada model.

3.5 Tahapan dalam Pemodelan *Spatial Autoregressive* (SAR)



Gambar 3.1. *Flowchart*