BAB III

Model Optimisasi Masalah Perencanaan Produksi

Bab ini membahas masalah perencanaan produksi pada sebuah perusahaan. Karena tujuan akhir dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan alternatif penyelesaian masalah perencanaan produksi, maka perlu dibentuk model optimisasi yang sesuai dengan keadaan perusahaan. Selanjutnya, model optimisasi yang digunakan adalah model *Goal Programming* dan akan diselesaikan dengan menerapkan metode Simpleks.

1.1 Masalah Perencanaan Produksi

Perencanaan produksi adalah tahapan sebelum kegiatan produksi dilakukan. Suatu perusahaan membutuhkan perencanaan produksi yang matang untuk mengoptimalkan sumber daya sehingga mencapai setiap tujuan yang dikehendaki perusahaan. Masalah pengoptimalan perencanaan produksi merupakan bagian dari masalah optimisasi multi objektif karena memiliki lebih dari satu tujuan untuk dioptimalkan terhadap beberapa sumber daya yang dimiliki dalam melakukan usaha produksi. Peran pengambil keputusan sangat penting terutama untuk menentukan prioritas kebijakan yang akan diambil ke depannya.

Penelitian ini membahas masalah perencanaan produksi yang ditemukan pada sebuah perusahaan dengan ketersediaan sumber daya sebagai berikut: jam kerja pegawai, jumlah mesin beroperasi, waktu pengerjaan dan jam lembur pegawai. Masalah perencanaan produksi pada perusahaan tersebut adalah bagaimana :

1. Memperoleh pendapatan yang maksimal sambil memenuhi setiap permintaan produk.
2. Memperoleh pendapatan yang maksimal sambil meminimalkan biaya yang dibutuhkan untuk kegiatan produksi.
3. Memaksimalkan penggunaan kapasitas jam kerja reguler sehingga permintaan setiap produk dapat terpenuhi.
4. Meminimalkan penggunaan kapasitas jam kerja lembur sehingga biaya produksi yang dikeluarkan dapat diminimalkan.

5. Memperoleh pendapatan yang maksimal sambil meminimalkan penggunaan kapasitas jam kerja lembur.

1.2 Model Optimisasi

Model perencanaan produksi yang dibahas dalam penelitian ini akan diselesaikan dengan pendekatan model *Goal Programming* (GP). Model tersebut dapat ditentukan jika model *Linear Programming* (LP) dari masalah perencanaan produksi sudah dibangun. Untuk membuat model perencanaan produksi yang bisa diterima dan diaplikasikan di perusahaan maka dibutuhkan asumsi-asumsi yang menggambarkan permasalahan yang terjadi dalam proses produksi, yaitu :

1. Jumlah bahan baku selalu mencukupi untuk proses produksi.
2. Perusahaan tidak dibatasi dana produksi.
3. Tidak ada pengembalian produk dari konsumen dan tidak ada produk yang cacat.
4. Tidak terjadi penambahan jam lembur yang telah ditetapkan selama ini.
5. Jumlah pegawai tidak mempengaruhi pengambilan keputusan.

Model optimisasi yang akan dibangun terdiri dari model multi objektif awal dan model *Goal Programming.* Untuk keperluan penurunan model didefinisikan parameter berikut :

R_j : estimasi permintaan produk ke-*j*

F_1 : pendapatan penjualan produk

F_2 : biaya produksi yang dikeluarkan perusahaan

H_j : harga jual per unit produk *j*

B_j : biaya produksi per unit produk *j*

W_j : total waktu produksi per unit produk *j* di setiap mesin

JR : kapasitas jam kerja reguler mesin

JL : kapasitas jam kerja lembur mesin

n : banyaknya jenis produk

Variabel keputusan dari masalah perencanaan produksi adalah tersedianya setiap produk pada setiap permintaan dengan parameter yang sudah ditentukan. Misal X_j menyatakan banyaknya produk jenis ke- j yang harus diproduksi. X_j , j = 1,…,n.

Penyelesaian masalah perencanaan produksi adalah untuk memenuhi lima tujuan. Oleh karena itu masalah perencanaan produksi yang dibahas dapat dimodelkan sebagai model optimisasi multi objektif yang terdiri dari lima fungsi tujuan. Fungsi-fungsi tujuan tersebut adalah sebagai berikut :

1. Maksimumkan pendapatan penjualan, maka banyaknya produk X_j yang akan diproduksi dijual seharga H_j. Secara matematis, tujuan ini dapat dinyatakan dengan,

   Maksimumkan:
$$\sum_{j=1}^{n} H_j X_j$$
2. Fungsi tujuan untuk minimumkan biaya produksi, maka banyaknya produk X_j yang akan diproduksi akan dikenakan biaya sebesar B_j. Secara matematis, tujuan ini dapat dinyatakan dengan,

   Minimumkan:
$$\sum_{j=1}^{n} B_j X_j$$
3. Fungsi tujuan untuk maksimumkan jam kerja regular dari mesin yang tersedia, maka banyaknya produk X_j yang akan diproduksi membutuhkan waktu produksi sebesar W_j. Secara matematis, tujuan ini dapat dinyatakan dengan,

   Maksimumkan:
$$\sum_{j=1}^{n} W_j X_j$$
4. Fungsi tujuan untuk maksimumkan jam kerja lembur dari mesin yang tersedia, maka banyaknya produk X_j yang akan diproduksi akan membutuhkan waktu produksi sebesar W_j. Secara matematis, tujuan ini dapat dinyatakan dengan,

   Minimumkan:
$$\sum_{j=1}^{n} W_j X_j$$
5. Fungsi tujuan untuk maksimumkan kapasitas produksi setiap jenis produk. Secara matematis, tujuan ini dapat dinyatakan dengan,

Maksimumkan: $X_j,\ j = 1, \ldots, n$

Adapun kendala dari model memenuhi kondisi-kondisi berikut :

1. Produk yang dihasilkan dapat terjual dengan harga H_j dan menghasilkan pendapatan yang melebihi atau sama dengan target pendapatan yang ditetapkan F_1. Secara matematis, kendala ini dapat dinyatakan dengan :
$$\sum_{j=1}^{n} H_j X_j \geq F_1$$
2. Produk yang dihasilkan membutuhkan biaya produksi sebesar B_j dan mengeluarkan biaya produksi yang tidak melebihi atau sama dengan target biaya produksi yang ditetapkan F_2. Secara matematis, kendala ini dapat dinyatakan dengan:
$$\sum_{j=1}^{n} B_j X_j \leq F_2$$
3. Produk yang dihasilkan memerlukan waktu produksi sebesar W_j dengan dimaksimalkannya penggunaan mesin selama jam kerja regular JR. Secara matematis, kendala ini dapat dinyatakan dengan :
$$\sum_{j=1}^{n} W_j X_j \geq JR$$
4. Produk yang dihasilkan memerlukan waktu produksi sebesar W_j dengan diminimalkannya penggunaan mesin selama jam kerja lembur JL. Secara matematis, kendala ini dapat dinyatakan dengan :
$$\sum_{j=1}^{n} W_j X_j \leq JL$$
5. Produk yang dihasilkan dapat memenuhi permintaan, sehingga kapasitas produksi setiap produk melebihi atau sama dengan permintaan yang diramalkan. Secara matematis, kendala ini dapat dinyatakan dengan :
$$X_j \geq R_j$$
$$X_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Selengkapnya, model multi objektif masalah perencanaan produksi adalah sebagai berikut :

Maksimumkan

$$\sum_{i=1}^{n} H_j X_j$$

Minimumkan

$$\sum_{i=1}^{n} B_j X_j$$

Maksimumkan

$$\sum_{i=1}^{n} W_j X_j$$

Minimumkan

$$\sum_{i=1}^{n} W_j X_j$$

Maksimumkan X_j

terhadap :

$$\sum_{i=1}^{n} H_j X_j \geq F_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_j X_j \leq F_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_j X_j \geq JR$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_j X_j \leq JL$$

$$X_j \geq R_j$$

$$X_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

1.3 Model *Goal Programming* dari Masalah Perencanaan Produksi

Permasalahan pada model multi objektif di sub bab 3.2 melibatkan banyak tujuan dari ketersediaan sumber daya yang pada sebuah perusahaan yang dijadikan sebagai dasar mengambil keputusan untuk menganalisis dan membuat solusi optimal. Oleh karena itu, masalah perencanaan produksi ini dapat diselesaikan melalui pendekatan model *Goal Programming* yang berusaha memberi kepuasan pada semua kendala sambil meminimumkan total penyimpangan dari target yang ditetapkan.

Tahapan pertama mengonversi model multi objektif menjadi model *GP* adalah mendefinisikan variabel deviasi. Variabel deviasi digunakan untuk menampung ketidaksamaan hasil optimisasi dengan target yang ingin dicapai, sehingga variabel deviasi dimasukkan pada setiap fungsi kendala dalam model *GP*. Ada dua jenis variabel deviasi, nilai penyimpangan di bawah goal (${d_i}^-$) dan nilai penyimpangan di atas goal (${d_i}^+$). Berdasarkan pendefinisian tersebut, maka fungsi tujuan dari model multi objektif berubah menjadi meminimumkan total setiap variabel deviasi supaya target tercapai. Secara matematis, fungsi tujuan dapat dinyatakan dengan,

Meminimumkan:

$$\sum_{i=1}^{m} Pi \sum_{k=1}^{5} ({W_{ik}}^+ {d_i}^+ + {W_{ik}}^- {d_i}^-)$$

dengan W_{ik} adalah bobot relatif yang diberikan ke masing-masing *k* tingkatan prioritas yang berbeda dalam *i* yang ditandai dengan P_i dan *m* adalah banyaknya fungsi kendala.

Pada penelitian ini, akan dibahas dua jenis model *Goal Programming* yaitu tanpa prioritas dan dengan prioritas. Selanjutnya, kedua model tersebut akan dibandingkan ketika diimplementasikan pada data.

Tahapan selanjutnya dalam mengonversi model multi objektif menjadi model *GP* adalah mengubah fungsi tujuan pada multi objektif menjadi kendala-kendala pada model *GP*. Perubahan tersebut melibatkan variabel deviasi ${d_i}^-$ dan ${d_i}^+$ yang bersesuaian dengan masing-masing kendala sasaran, dapat dilihat pada Tabel 2.1. Secara matematis, pembentukan kendala-kendala dalam pada model *GP* dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Kendala sasaran memaksimalkan pendapatan penjualan

   Fungsi tujuan untuk memenuhi target pendapatan penjualan secara maksimal yang jumlahnya harus sama atau lebih besar dari target yang telah ditetapkan. Secara matematis dapat dinyatakan dengan :

$$\sum_{j=1}^{n} H_j X_j \geq F_1$$

   Jika ${d_1}^-$ dan ${d_1}^+$ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah penjualan produk, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} H_j X_j + d_1^- - d_1^+ = F_1$$

2. Kendala sasaran meminimalkan biaya produksi

   Fungsi tujuan untuk memenuhi target penggunaan biaya produksi yang jumlahnya maksimal sama atau lebih kecil dari anggaran biaya yang telah ditetapkan. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

$$\sum_{j=1}^{n} B_j X_j \leq F_2$$

   Jika d_2^- dan d_2^+ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah biaya produksi yang digunakan di perusahaan ini, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} B_j X_j + d_2^- - d_2^+ = F_2$$

3. Kendala sasaran memaksimalkan jam kerja regular mesin

   Fungsi tujuan untuk memenuhi target waktu yang digunakan untuk produksi setiap produk secara maksimal, jumlahnya minimal harus sama atau lebih besar dari jumlah jam kerja reguler mesin yang telah ditetapkan. Secara matematis dapat dinyatakan dengan :

$$\sum_{j=1}^{n} W_j X_j \geq JR$$

   Jika d_3^- dan d_3^+ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah waktu produksi yang digunakan di perusahaan ini, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} W_j X_j + d_3^- - d_3^+ = JR$$

4. Kendala sasaran meminimalkan jam kerja lembur mesin

   Pada persamaan di atas, d_3^+ merupakan variabel yang menyatakan penyimpangan di atas jam kerja regular mesin. Sehingga d_3^+ masuk ke dalam jam kerja lembur, yang mana harus diminimalkan penggunaannya. Fungsi tujuan untuk memenuhi target jam kerja lembur mesin, yang jumlahnya maksimal sama atau lebih kecil dari jumlah jam kerja lembur mesin yang telah ditetapkan. Secara matematis dapat dinyatakan dengan:

$$d_3^+ \leq JL$$

5. Kendala sasaran memaksimalkan kapasitas produk ke-1

Fungsi tujuan untuk memenuhi target kapasitas produksi secara maksimal yang jumlahnya minimal sama atau lebih besar dari jumlah penjualan produk ke-1 pada tahun pertama. Secara matematis dapat dinyatakan dengan :

$$X_1 \geq R_1$$

Jika d_4^- dan d_4^+ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah produk ke-1 yang dihasilkan di perusahaan ini, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$X_1 + d_4^- - d_4^+ = R_1$$

6. Kendala sasaran memaksimalkan kapasitas produk ke-2

Fungsi tujuan untuk memenuhi target kapasitas produksi secara maksimal yang jumlahnya minimal sama atau lebih besar dari jumlah penjualan produk ke-2 pada tahun pertama. Secara matematis dapat dinyatakan dengan :

$$X_2 \geq R_2$$

Jika d_5^- dan d_5^+ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah produk ke-2 yang dihasilkan di perusahaan ini, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$X_2 + d_5^- - d_5^+ = R_2$$

7. Kendala sasaran memaksimalkan kapasitas produk ke-3

Fungsi tujuan untuk memenuhi target kapasitas produksi secara maksimal yang jumlahnya minimal sama atau lebih besar dari jumlah penjualan produk ke-3 pada tahun pertama. Secara matematis dapat dinyatakan dengan :

$$X_3 \geq R_3$$

Jika d_6^- dan d_6^+ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah produk ke-3 yang dihasilkan di perusahaan ini, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$X_3 + d_6^- - d_6^+ = R_3$$

8. Kendala sasaran memaksimalkan kapasitas produk ke-4

   Fungsi tujuan untuk memenuhi target kapasitas produksi secara maksimal yang jumlahnya minimal sama atau lebih besar dari jumlah penjualan produk ke-4 pada tahun pertama. Secara matematis dapat dinyatakan dengan :

$$X_4 \geq R_4$$

   Jika d_7^- dan d_7^+ menyatakan variabel penyimpangan (deviasi) negatif dan positif dari jumlah produk ke-4 yang dihasilkan di perusahaan ini, maka perumusannya dinyatakan sebagai berikut :

$$X_4 + d_7^- - d_7^+ = R_4$$

$$X_j,\ d_i^+,\ d_i^- \geq 0, j = 1, \dots, n \ dan\ i = 1, \dots, m$$

Perumusan fungsi pencapaian untuk masing-masing tujuan adalah sebagai berikut:

1. Fungsi pencapaian tujuan 1 (memaksimalkan pendapatan) :
   Meminimumkan d_1^-
2. Fungsi pencapaian tujuan 2 (meminimalkan biaya produksi) :
   Meminimumkan d_2^+
3. Fungsi pencapaian tujuan 3 (memaksimalkan jam kerja regular mesin) :
   Meminimumkan d_3^-
4. Fungsi pencapaian tujuan 4 (meminimalkan jam kerja lembur mesin) :
   Meminimumkan d_3^+
5. Fungsi pencapaian tujuan 5 (memaksimalkan kapasitas produksi):
   Meminimumkan $d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^-$

Model *Goal Programming* Tanpa Prioritas

Dalam model *GP* tanpa prioritas, koefisien masing-masing variabel deviasi pada fungsi tujuan adalah sama karena tidak diberikan prioritas pada masing-masing tujuan. Jadi, model *GP* tanpa prioritas dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$Min: \quad Z = \sum_{i=1}^{m} d_i^{+} + d_i^{-}$$

$$Min: \quad Z = d_1^{-} + d_2^{+} + d_3^{-} + d_3^{+} + d_4^{-} + d_5^{-} + d_6^{-} + d_7^{-}$$

dengan kendala :

$$H_1X_1 + H_2X_2 + H_3X_3 + H_4X_4 + d_1^{-} = F_1$$

$$B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_4X_4 - d_2^{+} = F_2$$

$$W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 + W_4X_4 + d_3^{-} - d_3^{+} = JR$$

$$d_3^{+} \leq JL$$

$$X_1 + d_4^{-} = R_1$$

$$X_2 + d_5^{-} = R_2$$

$$X_3 + d_6^{-} = R_3$$

$$X_4 + d_7^{-} = R_4$$

$$X_j,\ d_i^{+},\ d_i^{-} \geq 0, j = 1, \ldots, 4 \ dan \ i = 1, \ldots, 7$$

Berbeda dengan model *GP* tanpa prioritas, model *GP* dengan prioritas memberikan bobot prioritas di setiap variabel deviasi pada fungsi tujuan. Bobot yang bersesuaian dengan tingkat prioritas dinyatakan pada Tabel 3.1. Oleh karena itu, model *GP* dengan prioritas dapat dirumuskan sebagai berikut :

Model *Goal Programming* dengan Prioritas

$$Min: \quad Z = \sum_{i=1}^{m} Pi \sum_{k=1}^{m_i} (W_{ik}^{+} d_i^{+} + W_{ik}^{-} d_i^{-})$$

$$Min: \quad Z = P_1 (W_1 d_1^{-}) + P_2 (W_2 d_4^{-} + W_2 d_5^{-} + W_2 d_6^{-} + W_2 d_7^{-})$$
$$+ P_3 (W_3 d_2^{+}) + P_4 (W_4 d_3^{-}) + P_5 (W_5 d_3^{+})$$

dengan kendala :

$$H_1X_1 + H_2X_2 + H_3X_3 + H_4X_4 + d_1^{-} = F_1$$

$$B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_4X_4 - d_2^{+} = F_2$$

$$W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 + W_4X_4 + d_3^{-} - d_3^{+} = JR$$

$$d_3^{+} \leq JL$$

$$X_1 + d_4^{-} = R_1$$

$$X_2 + d_5^{-} = R_2$$

$$X_3 + d_6^{-} = R_3$$

$$X_4 + d_7^{-} = R_4$$

$$X_j,\ d_i^{+},\ d_i^{-} \geq 0, j = 1, \dots, 4\ dan\ i = 1, \dots, 7$$

Tabel 3.1 Prioritas Tujuan

Prioritas	Bobot	Tujuan
Prioritas 1	W_1	Memaksimalkan pendapatan.
Prioritas 2	W_2	Memaksimalkan kapasitas produksi.
Prioritas 3	W_3	Meminimalkan biaya produksi.
Prioritas 4	W_4	Memaksimalkan jam kerja regular mesin.
Prioritas 5	W_5	Meminimalkan jam kerja lembur mesin.

3.4 Teknik Penyelesaian Model *Goal Programming*

Model *GP* di atas dapat diklasifikasikan sebagai model LP karena persamaannya berupa linear. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan model tersebut dapat digunakan metode Simpleks. Pada penelitian ini, model *GP* pada perencanaan produksi akan diselesaikan dengan mengadaptasi teknik penyelesaian *GP* pada Yuwono B. (2007), yaitu menggunakan metode Simpleks. Langkah-langkah untuk menyelesaikan model *GP*, sebagai berikut:

1. Membentuk tabel simpleks awal.
2. Pilih kolom kunci di mana $Z_j - C_j$ memiliki nilai negatif terbesar.
3. Pilih baris kunci yang berpedoman pada b_i/a_{ij} dengan rasio terkecil.

4. Mencari sistem kanonikal yaitu sistem di mana nilai elemen pivot bernilai 1 dan elemen lain bernilai nol dengan cara menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE). Dengan demikian diperoleh tabel simpleks iterasi i.
5. Pemeriksaan optimalitas, yaitu melihat apakah solusi sudah layak atau tidak. Solusi dikatakan layak bila variabel adalah positif atau nol $(Z_j - C_j \geq 0)$

Jika pada iterasi 1 nilai pada baris $Z_j - C_j < 0$, maka dikatakan solusi belum optimal. Sehingga perhitungan akan dilanjutkan sampai mendapatkan nilai yang layak atau optimal $(Z_j - C_j \geq 0)$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Tabel Simpleks untuk *Goal Programming*

	C_j	0	0	…	0	W_1P_1	W_1P_1	…	W_mP_m	W_mP_m	b_i	R_i
C_i	X_i/X	X_1	X_2	…	X_m	d_1^-	d_1^+	…	d_m^-	d_m^+		
W_1P_1	d_1^-	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	1	-1	…	0	0	b_1	R_1
W_1P_1	d_2^-	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	0	0	…	0	0	b_2	R_2
…	…	…	…	…	…			…		…	…	…
W_mP_m	d_m^-	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mm}	0	0		1	-1	b_m	R_m
	Z_j	…	…	…	…	…	…	…	…	…	Z	
	$Z_j - C_j$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	Z	

Keterangan :

W_mP_m = koefisien ke-m dari prioritas ke-m

X_i = variabel basis

C_i = koefisien dari X_i

C_j = koefisien fungsi tujuan

a_{mm} = koefisien X_m

Z_j $= \sum_{i=1}^{m} C_i . a_{ij}$

Z $= \sum_{i=1}^{m} C_i . b_i$, adalah nilai fungsi tujuan

b_i = nilai yang menunjukkan ketersediaan sumber daya

R_i = rasio antara b_i dan a_{ik} jika X_k terpilih menjadi variabel basis.