BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Pengumpulan Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari situs www.yahoo.finance.com. Data yang diperoleh adalah data *closing price* saham periode 26 Januari 2015 sampai dengan 24 Januari 2020 dari dua saham yaitu Hanjaya Mandala Sampoerna Tbk PT (HMSP) dan Semen Indonesia (Persero) Tbk PT (SMGR). Untuk mengestimasi VaR akan digunakan data *return* dari kedua saham tersebut yang terdiri dari 1264 observasi untuk tiap saham.

Dalam penelitian ini perhitungan estimasi risiko VaR pada portofolio ini digunakan beberapa perangkat lunak yaitu Microsoft Excel dan RStudio. Microsoft Excel digunakan untuk menyimpan data mentah dan menghitung nilai *return* saham. Selanjutnya perangkat lunak pemograman RStudio digunakan dalam proses estimasi parameter GARCH atau GJR GARCH dan parameter distribusi nilai ekstrim yakni GPD, kemudian untuk mengestimasi parameter copula dan melakukan estimasi VaR.

3.2 Prosedur Penelitian

Perhitungan VaR berbasis copula dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menghitung *return* saham .
2. Mendeskripsikan karakteristik data *return* saham untuk mengetahui adanya efek heteroskedastisitas.
3. Melakukan estimasi parameter model AR(1)-GARCH-t(1,1) untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas.
4. Melakukan uji asimetris terhadap model AR(1)-GARCH-t(1,1). Jika terdapat indikasi adanya keasimetrisan pada volatilitas, maka akan digunakan model AR(1)-GJRGARCH-t(1,1).
5. Memodelkan nilai ekstrim dengan *Extreme Value Theory* yakni GPD, kemudian mengestimasi parameter nilai ekstrim pada ekor kiri residual.

6. Uji dependensi.
7. Membentuk distribusi gabungan dari model marginal kedua saham dengan copula kemudian mengestimasi parameter copula.
8. Memilih copula terbaik berdasarkan AIC dan BIC terkecil.
9. Melakukan estimasi VaR berbasis copula.

3.3 Copula

Konsep copula pertama kali diperkenalkan pada tahun 1959 oleh Abe Sklar, namun pertama kali digunakan dalam bidang keuangan pada tahun 1999 oleh Embrechts. Copula merupakan alat yang sangat penting untuk memodelkan kebergantungan tidak linear antarpeubah pada distribusi multivariat dan menggabungkan fungsi distribusi marginalnya sehingga menghasilkan distribusi bersama multivariat (Nelsen, 2006).

Definisi 3.1 Copula (Franke, Hardle, & Hafner, 2011)

Copula berdimensi d adalah fungsi distribusi berdimensi d dengan fungsi marginal seragam standar $[0,1]$.

Copula memiliki keunggulan yaitu tidak memerlukan asumsi normalitas pada marginalnya, sehingga fleksibel terhadap berbagai macam data dan dapat menunjukan pola sebaran data pada ekor distribusi masing-masing variabel.

Misal X dan Y adalah peubah acak yang menggambarkan *return* dari dua aset saham dengan fungsi distribusi kumulatif berturut-turut adalah $F(x) = \Pr(X \leq x)$ dan $G(y) = \Pr(Y \leq y)$. Kemudian fungsi distribusi gabungan dari peubah acak X dan Y adalah $H(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$. Untuk setiap $(x, y); x, y \in \mathbb{R}$ diperoleh tiga bilangan yaitu fungsi distribusi marginal $F(x), G(y)$, dan fungsi distribusi gabungan $H(x, y)$ yang ada pada interval $[0,1]$. Dengan kata lain, untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}$ menghasilkan titik $(F(x), G(y))$ dalam persegi satuan $[0,1] \times [0,1]$ dan pasangan terurut ini berkorespondensi dengan bilangan $H(x, y)$ pada interval $[0,1]$. Korespondensi ini yang menjadi karakteristik dari copula (Nelsen, 2006).

Hubungan copula dengan fungsi distribusi gabungan H didasarkan pada teorema Sklar. Didefinisikan simbol $\overline{\mathbb{R}}$ merupakan garis bilangan real yang diperluas, dengan $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Dengan analogi yang sama, maka $\overline{\mathbb{R}}^d$ didefiniskan sebagai ruang d-dimensi bilangan real yang diperluas (Nelsen, 2006).

Teorema 3.1 Teorema Sklar 2-Dimensi (Nelsen, 2006)

Misal H adalah fungsi distribusi bersama dengan distribusi marginal F dan G yang kontinu. Maka terdapat copula C sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{3.1}$$

Teorema 3.2 Teorema Sklar d-Dimensi (Nelsen, 2006)

Misal H adalah fungsi distribusi berdimensi d dengan distribusi marginal $F_1, \dots, F_d$. Maka terdapat copula C berdimensi d sedemikian sehingga untuk semua $x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}}^d$.

$$H(x_1, \dots, x_d) = C\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big) \tag{3.2}$$

Jika $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ kontinu maka C unik. Jika, $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ tidak kontinu maka copula C unik pada $Ran(F_1) \times \dots \times Ran(F_d)$ .Sebaliknya, jika C adalah copula berdimensi d dan $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ adalah fungsi distribusi, maka fungsi H yang di definisikan oleh persamaan (3.2) adalah fungsi distribusi berdimensi d dengan marginal $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$.

Fungsi kepadatan dari distribusi multivariat yang dinotasikan dengan f diperoleh dengan menderivatifkan persamaan (3.2) secara parsial terhadap x_i dengan $i = 1,2, \dots, d$ sehingga didapat (Franke, Hardle, & Hafner, 2011)

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_d) &= \frac{\partial^d H(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1, \dots, \partial x_d} \\ &= \frac{\partial^d C\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big)}{\partial x_1, \dots, \partial x_d} \\ &= \frac{\partial^d C\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big)}{\partial F_1(x_1), \dots, \partial F_d(x_d)} \prod_{i=1}^{d} \frac{dF_i(x_i)}{dx_1} \\ &= c\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big) \prod_{j=1}^{d} f_i(x_i) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jika fungsi distribusi $F_i(x_i)$ pada persamaan (3.3) ditransformasi menjadi *uniform* $(u_i = F_i(x_i) \sim U(0,1))$, maka akan didapat $x_i = F_i^{-1}(u_i)$ yang merupakan invers dari fungsi distribusi marginalnya sedemikian sehingga akan diperoleh fungsi kepadatan copula

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^{d} f_i(F_i^{-1}(u_i))} \tag{3.4}$$

3.4 Keluarga Copula

3.3.1 Eliptical Copula

Eliptical copula eliptical berasal dari distribusi elips multivariat. Copula yang paling penting dalam keluarga ini adalah gaussian copula dan student's t copula.

1. Gaussian Copula

Definisi 3.2 Gaussian Copula (Cherubini, Luciano, & Vecchiato, 2004)

Fungsi gaussian copula dari distribusi normal standar bivariat distulis sebagai berikut

$$C^{Ga}(u_1, u_2) = P(\phi(X_1) \le u_1, \phi(X_2) \le u_2) = \phi_\rho\left(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho_{12}xy + y^2}{2(1-\rho_{12}^2)}\right) dx\, dy \tag{3.5}$$

dimana ϕ_ρ adalah fungsi distribusi bersama dari fungsi distribusi normal standar bivariat dengan matriks korelasi linear ρ, ϕ^{-1} adalah invers dari fungsi distribusi normal bivariat, $x = \phi^{-1}(u_2)$ dan $y = \phi^{-1}(u_1)$ dan ρ_{12} merupakan koefisien korelasi linear dengan $-1 < \rho_{12} < 1$.

2. Student-t Copula

Definisi 3.3 Student-t Copula (Cherubini, Luciano, & Vecchiato, 2004)

Fungsi student-t copula dari distribusi student-t bivariat adalah

$$C^T(u_1, u_2\,;\, \rho, v) = P(t_v(X_1) \le u_1, t_v(X_2) \le u_2)$$
$$= t_{v,\rho}\left(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(1 + \frac{x^2 - 2\rho_{12}xy + y^2}{v(1-\rho_{12}^2)}\right)^{-\frac{(v+2)}{2}} dx\, dy \tag{3.6}$$

dimana $t_{v,\rho}$ adalah distribusi student-t bivariat dengan v adalah parameter derajat kebebasan, t_v^{-1} invers dari fungsi distribusi student-t, $x = t_v^{-1}(u_2)$ dan $y = t_v^{-1}(u_1)$ dan ρ_{12} adalah koefisien korelasi linear.

3.2.2 Archimedian Copula

Archimedian copula merupakan salah satu keluarga copula yang dapat diaplikasikan secara luas, karena (Nelsen, 2006) :

1. Mudahan untuk dikonstruksi
2. Mempunyai sub-keluarga yang besar dan bervariasi
3. Banyak sifat copula yang dipengaruhi oleh anggota dari keluarga archimedian copula.

Definisi 3.4 Archimedian Copula (Cherubini, Luciano, & Vecchiato, 2004)

Fungsi d-variat archimedian copula $C : [0,1]^{\mathrm{d}} \rightarrow [0,1]$ di definisikan

$$C(u1, \dots, u2; \varphi) = \varphi^{-1}\big(\varphi(u1) + \ \dots + \varphi(ud)\big), u_i \in [0,1]^d \qquad (3.7)$$

dimana $\varphi(u_i), i = 1,2, \dots, d$ disebut generator dari copula C yang merupakan fungsi menurun yang memetakan $[0,1]$ pada $[0, \infty)$ sedemikian sehingga $\varphi(1) = 0$, dan $\varphi(0) = \infty$. Invers dari φ adalah φ', dengan $\varphi' \colon [0, \infty) \ \rightarrow [0,1]$.

1. Clayton Copula

Fungsi generator dari clayton copula adalah

$$\varphi(u) = \frac{1}{\theta}\big(u^{-\theta} - 1\big) \qquad (3.8)$$

dengan $\varphi'(u) = (1 + \theta u)^{-1/\theta}, \theta > 0$.Kemudian, fungsi distribusi kumulatif dari clayton copula bivariat adalah (Nelsen, 2006).

$$C(u1, u2; \theta) = \max\left\{(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0\right\} \qquad (3.9)$$

dimana θ adalah nilai parameter Copula.

2. Gumbel Copula

Fungsi generator dari gumbel copula adalah

$$\varphi(u) = (-\ln(u))^{\theta} \qquad (3.10)$$

dengan $\varphi'(u) = \exp\left(-u^{1/\theta}\right), \theta > 1$. Kemudian, fungsi distribusi kumulatif dari gumbel copula bivariat adalah (Nelsen, 2006).

$$C(u1, u2) = \exp\left(-\big((-ln\, u_1)^{\theta} + (-ln\, u_2)^{\theta}\big)^{1/\theta}\right) \qquad (3.11)$$

dimana θ adalah nilai parameter Copula dengan $\theta \in [1, +\infty)$.

3. Frank Copula

Fungsi generator dari frank copula adalah

$$\varphi(u) = -\ln\left(\frac{\exp(-\theta_u) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right) \tag{3.12}$$

dengan $\varphi'(t) = \frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \exp(-u)\left(\exp(-\theta) - 1\right)\right)$, Kemudian, fungsi distribusi kumulatif dari frank Copula bivariat adalah (Nelsen, 2006).

$$C(u1, u2) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right) \tag{3.13}$$

dimana θ adalah nilai parameter Copula.

Pada skripsi ini akan lebih difokuskan pada penggunaan copula dari keluarga Elliptical copula yaitu Student-t copula.

3.5 Uji Dependensi

Ukuran kebergantungan yang umum digunakan adalah Kendall Tau dan Spearman Rho. Pada Kendall Tau dan Spearman Rho dikenal dengan istilah konkordan.

Definisi 3.5 Konkordan (Nelsen, 2006)

Didefinisikan (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) merupakan dua observasi vektor peubah acak kontinu (X, Y). (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) dikatakan konkordan jika $x_i < x_j$ dan $y_i < y_j$ atau $x_i > x_j$ dan $y_i > y_j$ atau dinyatakan

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0 \tag{3.14}$$

(x_i, y_i) dan (x_j, y_j) dikatakan diskonkordan jika $x_i < x_j$ dan $y_i > y_j$ atau $x_i > x_j$ dan $y_i < y_j$ atau dinyatakan

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \tag{3.15}$$

1. Kendall Tau

Misalkan sampel acak berukuran n yang dinyatakan dalam $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ dari vektor peubah acak kontinu (X, Y). Terdapat $\binom{n}{2}$ pasang (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) yang berbeda dan dapat berupa konkordan ataupun diskonkordan. Misalkan c merupakan banyak pasangan konkordan dan d merupakan banyak pasangan diskonkordan. Kendall tau untuk sampel dapat dinyatakan sebagai (Nelsen, 2006).

$$\tau = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}} \quad (3.16)$$

Misalkan (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) adalah vektor acak yang berdistribusi $i.i.d.$ Kendall Tau untuk populasi didefinisikan sebagai (Nelsen, 2006)

$$\tau_{X,Y} = \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.17)$$

Teorema 3.3 (Nelsen, 2006).

Diberikan (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) adalah vektor dar peubah acak kontinu yang independen dengan fungsi distribusi gabungan H_1 dan H_2 dengan marginal F untuk X_1, X_2 dan G untuk Y_1, Y_2. C_1, C_2 maisng-masing merupakan copula dari (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2). Maka $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ dan $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Kemudian diberikan Q yang dinotasikan sebagai selisih dari peluang konkordan dan diskonkordan dari (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) dimana

$$Q = \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.18)$$

Maka

$$Q = Q(C_1 . C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (3.19)$$

2. **Uji Spearman Rho**

Misalkan terdapat tiga vektor acak yang independen (X_1, Y_1) ,(X_2, Y_2), dan (X_3, Y_3) dengan fungsi distribusi gabungan umum H (dengan marjinnya adalah F dan G) dan copula C. Spearman Rho didefiniskan sebagai (Nelsen, 2006)

$$\rho_{X,Y} = 3[\Pr\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\big) - \Pr\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\big)] \quad (3.20)$$

Teorema 3.4 (Nelsen, 2006).

Misal X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan copula C. Maka Spearman Rho untuk populasi adalah

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 12 \iint_{I^2} C(u, v) du dv - 3 \quad (3.21)$$

3.6 Estimasi Parameter Copula

Dalam mengestimasi parameter copula dapat menggunakan *maksimum likelihood estimation* (MLE). Fungsi densitas copula pada persamaan (3.3), apabila diambil sampel sebanyak m maka bentuk persamaan tersebut mengimplikasikan dekomposisi log *likelihood* (Choroś, Ibragimov, & Permiakova, 2010).

$$L = \sum_{i=1}^{m} logc\big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d} logf_j\big(x_j\big) \qquad (3.22)$$

Kemudian jika copula C termasuk dalam keluarga copula yang berparamater θ yakni $C = C(u_1, \dots, u_d; \theta)$ dan margin F_i dan densitas univariat f_i diindekskan dengan parameter α_i; $F_i = F_i(x_i; \alpha_i)$; $f_i = f_i(x_i; \alpha_i)$. Maka estimator *maximum likelihood* untuk persamaan (3.3) adalah

$$= \arg max_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d} \sum_{i=1}^{m} logc(F_1(x_1, \alpha_1), \dots, F_d(x_d, \alpha_d); \theta)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d} logf_j\big(x_j; \alpha_j\big) \qquad (3.23)$$

Nilai estimasi parameter dan log *likehood* Copula digunakan untuk menilai kelebihan kinerja suatu model copula dengan menggunakan *Akaike information criterion* (AIC) dan *Bayesian information criterion* (BIC). Semakin kecil nilai AIC dan BIC dari suatu model, maka model tersebut semakin baik.

Nilai AIC didefinisikan sebagai (Tsay, 2002)

$$AIC = \frac{-2}{n}(\log likelihood) + 2\frac{\theta}{n} \qquad (3.24)$$

Nilai BIC didefinisikan sebagai

$$BIC = -2(loglikelihood) + \theta \log n \qquad (3.25)$$

dengan n adalah ukuran sampel dan θ adalah bayaknya parameter model.

3.7 *Value at Risk* (VaR)

Value at Risk (VaR) adalah suatu pengukuran risiko yang cukup popular. VaR dapat didefinisikan sebagai suatu ukuran risiko untuk menghitung kerugian maksimum yang akan terjadi pada suatu investasi dengan tingkat kepercayaan dan periode waktu tertentu (Best, 1998). Dengan kata lain, VaR dapat menjawab berapa besar investor dapat mengalami kerugian selama waktu investasi ke-t dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$. VaR merupakan suatu alat ukur yang mampu menghitung besar kerugian terburuk yang dapat terjadi dengan mengethaui posisi aset, tingkat kepercayaan akan terjadinya risiko, dan jangka waktu penenpatan aset.

Definisi 3.6 *Value at Risk* (VaR)

$$P\left(r \leq \widehat{VaR}\right) = 1 - \alpha \qquad (3.26)$$

Dimana r adalah *return* selama periode tertentu dan α adalah tingkat kesalahan (Jorion, 2006).

Nilai VaR pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ dalam periode waktu t dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut

$$VaR_{(1-\alpha)}(t) = W_0 R^* \sqrt{t} \qquad (3.27)$$

Dimana

W_0= dana investasi awal portofolio

R^*= nilai kuantil ke- α

t = periode waktu.

Pada penelitian ini dalam mengestimasi nilai VaR akan menggunakan metode simulasi Monte Carlo. Metode simulasi ini diperkenalkan oleh Boyle pada tahun 1997 untuk mengukur risiko. Dalam simulasi monte carlo ini akan dibangkitkan bilangan acak berdasrkan karakteristik dari data yang akan dibangkitkan, yang kemudian digunakan untuk mengestimasi nilai VaR-nya.